FOLIA 345

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 13(2021)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.13.10

*Daniel Wójcik*

# Recenzja z M. Pater, R. Sochacki, *Wokół geometrii trójkąta*, Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole 2020

## 1. Wprowadzenie

Publikacja jest wynikiem współpracy dwóch osób: Mikołaja Patera, absolwenta Publicznego Liceum Ogólnokształcącego nr III z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Opolu oraz dra hab. Roberta Sochackiego, profesora Uniwersytetu Opolskiego. W swojej pracy autorzy przedstawiają uzyskane przez siebie wyniki dotyczące okręgu *mixtilinear incircle* (zwanego *mixtilinear*). Jej pierwotną wersją była praca *Okrąg mixtilinear i jego własności*, zgłoszona do XLI Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego, gdzie zdobyła srebrny medal.

## 2. Zawartość

Książka składa się ze wstępu i czterech rozdziałów:

1. Punkty, proste i okręgi związane z okręgiem *mixtilinear*

2. Okrąg *mixtilinear* na płaszczyźnie zespolonej

3. Uogólnienie konfiguracji okręgu *mixtilinear*

4. Długości odcinków związanych z okręgiem *mixtilinear*

Rozdział pierwszy jest najważniejszą cześcią książki. Autorzy przybliżają w niej pojęcie okręgu *mixtilinear* trójkąta $ABC$ oraz podstawowe pojęcia związane z poruszaną tematyką. Czytelnik znajdzie tutaj szereg ciekawych twierdzeń i wniosków (m.in. opis kontsrukcji okręgu *mixtilinear*) wraz z ich dowodami. W całej pracy autorzy rozważają przede wszystkim okrąg $A$-*mixtilinear* trójkąta $ABC$ określony jako okrąg wpisany w kąt $\angle BAC$ styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Naturalnym następstwem tego faktu jest pojawiająca się w pracy notacja oraz rozumienie pojęć w odniesieniu do wspomnianego wyboru.

W rozdziale drugim na wstępie przypomina się Czytelnikowi podstawowe zagadnienia związane z płaszczyzną zespoloną oraz podaje kilka istotnych twierdzeń opisujących tę płaszczyznę. Autorzy wykorzystują tutaj koncepcję przedstawienia liczb zespolonych w interpretacji geometrycznej do rozwiązania zagadnienia, w którym standardowe metody stosowane w planimetrii okazują się niewystarczające. W dalszej części autorzy rozważają zagadnieia związane z okręgiem $A$-*mixtilinear* na płaszczyźnie zespolonej, podając szereg twierdzeń wraz z ich dowodami. Rozdział kończy się zbiorem zadań z różnorakich konkursów i olimpiad wraz z rozwiązaniami wykorzystującymi rozważane w tym rozdziale liczby zespolone. Rozwiązania te wykorzystują wyniki pracy autorów zawarte w niniejszej monografii.

W rozdziale trzecim autorzy prowadzą rozważania nad uogólnioną konfiguracją, w której wyniki rozpatruje się dla punktów innych niż punkt $T_A$ z rodziałów pierwszego i drugiego, będący punktem styczności okręgu $A$-*mixtilinear* i okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ (patrz Twierdzenie 1.2).

Rozdział czwarty poświęcony jest długościom odcinków związanych z okręgiem $A$-*mixtilinear* i trójkątem $ABC$. Autorzy wyznaczają między innymi długość promienia RA okręgu $A$-*mixtilinear*, odległości punktu $T_A$ od wierzchołków trójkąta, długość odcinka, którego końcami są punkty wspólne boku $BC$ trójkąta i okręgu $A$-*mixtilinear* (stycznego do boków $AB$ i $AC$). Znajdziemy tu również szereg ciekawych twierdzeń dotyczących innych zagadnień związanych z okręgiem $A$-*mixtilinear* trójkąta $ABC$ (m.in. podobieństw trójkątów lub współpękowości prostych).

## 3. Wnioski

Całość tworzy spójną strukturę, w której kolejne częsci stanowią rozwinięcie lub dopełnienie poprzednich, a szczególnie zdają się korespondować z rozdziałem pierwszym. Autorzy najpierw zapoznają nas z otrzymanymi przy użyciu środków standardowej geometrii płaskiej wynikami, by następnie przejść na płaszczyznę zespoloną i z jej perspektywy spojrzeć na omawiane zagadnienia. Pozwala to Czytelnikowi na porównanie metod oraz ocenę wad i zalet wykorzystywania każdej z nich w opisywanej sytuacji. Warto również zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie dowody w rozdziale pierwszym zostały przeprowadzone bez użycia metod algebraicznych i obliczeniowych. Najczęściej wykorzystywanymi w dowodach twierdzeń są elementy z obszaru trygonometrii, podobieństwa, jednokładności lub innych twierdzeń geometrii płaskiej nauczanych w szkole ponadpodstawowej. Sięgnięto po zagadnienia spoza podstawy programowej, takie jak twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy (w dowodzie Twierdzenia 4.7), twierdzenie Menelaosa i twierdzenie odwrotne do twierdzeia Menelaosa (w dowodzie Twierdzenia 4.8), twierdzenie o potędze punktu względem okręgu (w dowodzie Twierdzenia 4.4), inwersję względem okręgu (w dowodzie Lematu 1.4), twierdzenie Pascala (w dowodzie Twierdzenia 1.6, Twierdzenia 1.29), twierdzenie La Hire (w dowodzie Twierdzenia 1.33). W kilku przypadkach podane są dwa różne dowody danego twierdzenia lub zadanie rozwiązane jest dwoma różnorakimi sposobami, co jest szczególnie cenne z punktu widzenia dydaktyki matematyki (np. Lemat 1.3, Lemat 1.4, Twierdzenie 1.4, Twierdzenie 2.19, zadanie Z.O.12, zadanie Z.O.18, Twierdzenie 3.11). Wyniki zawarte w rozdziałach pierwszym i drugim znajdują swoje zastosowanie w rozwiązaniu niektórych zadań z rozdziału trzeciego.

Na pochwałę zasługuje fakt, że praca zawiera dużą liczbę rysunków ilustrujących omawiane twierdzenia i zadania. Zdecydowanie ułatwiają one Czytelnikowi lekturę twierdzeń oraz zrozumienie i ocenę poprawności ich dowodów. Jak również analizę rozwiązań cytowanych zadań i proponowanych konstrukcji.

Autorzy nie ustrzegli się drobnych błędów. Na przykład:

- na stronach 14 i 15 symbol $R$ jest rozumiany jako rzut punktu, a nieco później jako długość promienia okręgu wpisanego

- na rysunku 13 ze strony 41 dwa punkty nazwane są $J$

- niektóre rysunki są mało czytelne (rys. 13 na str. 41, rys.22 na str. 61)

Należy jednak wyraźnie podkreślić, iż są to drobne mankamenty, niemające wpływu na wysoką ocenę całości. Poza tym, dla uważnego czytelnika, który z łatwością może zorientować się w naturze wspomnianych usterek, nie będą one przeszkodą w zrozumieniu zagadnienia.

Nieco mylący jest tytuł monografii oraz jej okładka, w żaden sposób nie sugerujące związku z okręgiem *mixtilinear*. I o ile trójkąt pełni jedną z podstawowych ról w poruszanych rozważaniach, to brakuje uszczegółowienia dotyczącego drugiego obiektu – jakim jest okrąg *mixtilinear*. Wszak geometria trójkąta wraz ze wszystkimi obiektami rozważanymi w jej kontekscie jest tematyką tak szeroką, że zasadną wydaje się większa precyzja.

Zagadkowo brzmi również zdanie zawarte we wstępie, mówiące, że ”ewentualne podobieństwo podanych w tej pracy wyników do innych jest niezamierzone i może wynikać z niedostatecznego rozpoznania źródeł bibliograficznych”.

## 4. Podsumowanie

Uważam, że monografia *Wokół geometrii trójkąta* autorstwa Mikołaja Patera i Roberta Sochackiego jest bardzo ciekawą pozycją adresowaną zarówno do zawodowych matematyków, jak również do nauczycieli szkół ponadpodstawowych oraz ich uzdolnionych matematycznie i chcących rozwijać swoją matematyczną pasję uczniów. Poruszana w niej tematyka wykracza co prawda poza program realizowany w szkole ponadpodstawowej, jednak może stać się obszarem ciekawych poszukiwań przy pewnym uzupełnieniu wiedzy szkolnej. Powinna zatem znaleźć się w biblioteczce tych nauczycieli, którzy prowadzą wszelkiego rodzaju zajęcia dodatkowe, ”kółka matematyczne”, zajęcia rozszerzające wiedzę szkolną oraz tych, którzy pragną pomóc swoim uczniom w przygotowaniach do konkursów i olimpiad.

*Instytut Matematyki*
*Uniwersytet Pedagogiczny*
*ul. Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*Daniel Wójcik*
*e-mail:* daniel.wojcik@up.krakow.pl