FOLIA 321

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 12(2020)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.12.4

Barbara Borkowicz

Obraz pojęcia ciągłości funkcji – wyniki badania przeprowadzonego wśród studentów*

Abstract. This article addresses the issue of university students' images of the concept of continuity. The aim of the reported study was learn how the students understand continuity of a function and what kind of difficulties they experience when dealing with this concept. The author hopes that this report will help academic teachers to better understand students and their mistakes, and hence will facilitate academic teaching.

1. Wprowadzenie

Pojęcie ciągłości funkcji to jedno z podstawowych pojęć analizy matematycznej. Jest ono nauczane w pierwszych latach studiów, na których wykładana jest matematyka oraz w szkołach ponadpodstawowych, na lekcjach matematyki w klasach o profilu rozszerzonym. Analiza matematyczna ma swoje zastosowania w wielu działach matematyki. Właściwe rozumienie elementów analizy matematycznej jest niezbędne do efektywnego przyswajania bardziej zaawansowanych pojęć matematycznych.

Niniejszy artykuł prezentuje wyniki badania dotyczącego rozumienia przez studentów pojęcia ciągłości. Przeprowadzona analiza wskazuje na szereg trudności jakie napotykają studenci w związku z tym pojęciem. Są to między innymi: trudności z korzystaniem z formalnych definicji, traktowanie niepoprawnych intuicji i przekonań jako podstawę rozumowania, dołączanie nowych elementów do obrazu pojęcia, ale niezestawianie ich z wcześniejszymi doświadczeniami, itd. Niepokoić może fakt, że pomimo wielu doniesień badaczy (m.in. Bugajska-Jaszczołt, 2003; Gunćaga, Powązka, 2006; Powązka, 2013; Przeniosło, 2001 i wiele innych) o występowaniu tych trudności u studentów problem zdaje się wciąż nierozwiązany.

*2010 Mathematics Subject Classification: Primary: *97E50*; Secondary: *97I20*

Keywords and phrases: *concept of continuity, reasoning, way of understanding*

Praca została wykonana w ramach projektu NCN 2015/17/B/HS1/02232 Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne

Gunćaga i Powązka (Gunćaga, Powązka, 2006) podkreślali w swoich badaniach:

> *(...) przy opracowywaniu nowego pojęcia nauczyciel powinien zdawać sobie sprawę z tego, jakie wiadomości z przerobionego już materiału będą potrzebne w ciągu dalszym. Pomoże mu to w odpowiedni sposób przygotować swych uczniów do przyswojenia nowych wiadomości. W ten sposób można ukształtować niezbędne elementy bazy intuicyjno-skojarzeniowej opracowywanych pojęć.*

Z kolei nauczyciel akademicki powinien mieć świadomość tego jaką wiedzą i umiejętnościami mogą dysponować absolwenci szkół średnich rozpoczynający kształcenie w murach uczelni. Poziom wiedzy i zakres umiejętności studentów wyniesione z liceum bądź technikum mogą być zróżnicowane. Studia matematyczne podejmują bowiem osoby, które opanowały już elementy analizy matematycznej, jak i takie, które realizując matematykę szkolną na poziomie podstawowym nie poznały podstawowych pojęć analizy matematycznej, takich jak granica, ciągłość i pochodna funkcji. Badania na ten temat były prowadzone już w latach 2002–2011 w okresie reform w edukacji. Pisze o tym Powązka (Powązka, 2013):

> *Sukces w studiowaniu analizy matematycznej może w istotny sposób zależeć od matematycznego przygotowania ze szkoły ponadgimnazjalnej. Wprowadzane od roku 2002 w naszym kraju reformy edukacji w szkołach ponadgimnazjalnych i towarzyszące im zmiany w egzaminie maturalnym z matematyki spowodowały, że kandydaci na studia dysponują mniejszym zakresem pojęć matematycznych potrzebnych do studiowania analizy matematycznej. Stwarza to określone trudności dydaktyczne wykładowcom tego przedmiotu z uwagi na konieczność korelacji treści z różnych przedmiotów matematycznych oraz uwzględnianie zmniejszającego się z roku na rok matematycznego przygotowania młodzieży podejmującej studia.*

Zagadnienia analizy matematycznej zostały wyłączone z programów nauczania w szkołach ponadgimnazjalnych, a programy studiów nie uległy żadnym większym zmianom. W 2017 zostały zlikwidowane gimnazja, program nauczania w szkołach ponownie został okrojony. Badania te, przeprowadzone w latach 2018–2019 powinny być kontynuowane, aby dać pełen obraz sytuacji w naszym kraju.

2. Przegląd literatury

2.1. Obraz pojęcia

„Concept image" (Tall, 2003; Tall, Vinner, 1981) to struktura poznawcza zawierająca wszelkie skojarzenia i wyobrażenia myślowe, które wiążą się z danym pojęciem. Są to intuicje, elementy formalnego rozumienia, schematy myślowe, reguły postępowania oraz strategie działania na pojęciu i operowaniu nim. Obraz ten powstaje w umyśle nad podstawie wiedzy oraz doświadczeń, z którymi jednostka miała styczność. Według Bugajskiej-Jaszczołt (Bugajska-Jaszczołt, 2003) na obraz pojęcia składają się:

1. *Baza intuicyjno-skojarzeniowa, którą tworzą wyobrażenia myślowe, skojarzenia oraz intuicje związane z pojęciem.*

2. *Fakty, przyjęte jako efekt logicznej analizy definicji, bądź zaakceptowane na innej drodze, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami pojęcia.*

3. *Narzędzia wykonawcze: algorytmy, procedury postępowania, strategie heurystyczne, które uczący się wykorzystuje lub które umożliwiają mu rozwiązywanie zadań dotyczących pojęcia.*

4. *Elementy systemowe: zależności pomiędzy elementami struktur poznawczych, odnoszone do pojęcia oraz jego związków z innymi pojęciami.*

5. *Aparat komunikowania, słownik związany z pojęciem, tworzą go elementy języków naturalnego, matematycznego i symbolicznego.*

6. *Konteksty sytuacyjne, konkretne sytuacje, zadania lub modele teoretyczne, wyznaczające obszary funkcjonowania pojęcia.*

Nie da się nauczyć tworzenia poprawnych obrazów pojęć, proces ten można jedynie korygować, prowadzić na właściwe tory i modelować spojrzenie szersze niż sama definicja czy wykres, wskazywać połączenia i sytuacje rzutujące na związki z innymi pojęciami, zwracać uwagę na język i reprezentacje. Dzięki temu studenci będą mogli wszystkie zdobyte wiadomości i własne doświadczenia oraz intuicje łączyć w obraz pojęcia.

2.2. „Met-befores"

Tall (Tall, 2003) podkreśla, że obiekty poznane w przeszłości mogą wywierać znaczny wpływ na to jak jednostka postrzega i interpretuje nowe pojęcia. Autor wprowadza pojęcie „met-befores" i określa je w następujący sposób:

> *A working definition of a 'met-before' is 'a structure we have in our brains now as a result of experiences we have met before'. A met-before can be supportive in a new situation, or it can be problematic. (...) The manner in which individuals deal with these aspects and the resulting emotional effects plays a major role in individual development of mathematical thinking* (Tall, 2003, s. 23).

Podstawową zasadą nauczania matematyki jest stopniowanie trudności poznawanych pojęć. Rozpoczynamy od zaznajomienia się z prostymi pojęciami poprzez które budujemy coraz bardziej złożone struktury. Przykładowo, uczeń szkoły podstawowej poznaje najpierw liczby naturalne i wykonuje na nich działania arytmetyczne. Niemal wszystkie jego doświadczenia związane z mnożeniem dwóch liczb kształtują w nim przekonanie, że działanie to „zwiększa", tzn. wynik mnożenia jest liczbą większą niż czynniki. Przykłady mnożenia przez zero są sporadyczne i nie wywołują u ucznia konfliktu poznawczego. Natomiast mnożenie w zbiorze liczb całkowitych czy wymiernych dostarcza przykładów, w których uzyskiwane wyniki przeczą wcześniejszym doświadczeniom. Z kolei uczniowie szkoły średniej rozwiązujący równania kwadratowe wiedzą, że kiedy wyróżnik jest ujemny, to równanie kwadratowe „nie posiada rozwiązań”. Dopiero jednak na studiach dowiadują się, że kiedy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, to równanie to nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, natomiast posiada w ciele liczb zespolonych.

W toku edukacji jednostka kształtuje obraz związany z danym pojęciem. Napotkane sytuacje i konflikty poznawcze powinno się wykorzystać do rozwijania i poszerzania tego obrazu.

2.3. Rozumowanie, wnioskowanie

Zofia Krygowska (Krygowska, 1969) wyróżniła między innymi trzy typy rozumowania: intuicyjne, formalne i wnioskowanie empiryczne.

O wnioskowaniu empirycznym mówimy wtedy, gdy wnioski wyciągane są na podstawie doświadczeń i dostrzeżonych konkretnych zależnościach na modelach, w otaczającym świecie czy na rysunkach, wykresach, diagramach. Uczeń może również sformułować hipotezę na podstawie kilku prób i dostrzeżenia w nich pewnej zależności.

Z rozumowaniem intuicyjnym mamy do czynienia wtedy, gdy uczeń formułuje hipotezę matematyczną na podstawie analogii, zależności czy analizy innych pojęć. Uczeń wysnuwa wnioski na podstawie skojarzeń, posługuje się przede wszystkim obrazami pojęć, niezależnie od formalnych definicji. Zdarza się również, że uczniowie wypowiadają tezy z poczuciem oczywistości. Przy stwierdzeniu „tak musi być” mamy do czynienia z rozumowaniem intuicyjnym opartym na faktach, jednak uczeń nie potrafi ich sprecyzować.

Rozumowanie formalne opiera się natomiast na prawidłowym korzystaniu z definicji i twierdzeń oraz rozumienia zależności między poznanymi pojęciami i umiejętności przeprowadzenia poprawnych wnioskowań. Uczeń musi wiedzieć, że formułować hipotezy może tylko na podstawie znanych i wyjaśnionych wcześniej definicji, za pomocą terminów, które zostały już wprowadzone.

Dobrze przeprowadzone rozumowanie intuicyjne może wprowadzić ucznia w dalsze i głębsze intuicje, a dzięki poprawnemu korzystaniu z definicji i dowodzenia hipotez może wprowadzić ucznia w świat formalny. Możliwość określenia tego, jak jednostka rozumuje, pozwala lepiej zrozumieć proces tworzenia obrazu oraz tego, jaki wpływ mają na jego rozwój doświadczenia, „met-befores” i intuicje. Na przykład rozumowanie tylko na podstawie intuicji i brak odniesienia do formalnych definicji może świadczyć o nieprzepracowanych konfliktach poznawczych. Student nie tworzy pełnego obrazu, tylko traktuje formalne definicje i doświadczenia jako odrębne lub sprzeczne.

2.4. Korzystanie z formalnej definicji

Przy korzystaniu z definicji studenci muszą uważać, aby nie osłabić jej ścisłości. „Odformalizowanie” może się okazać przydatne w interpretacji definicji. Student może jednak uznać, że zna i rozumie tekst formalny, ale tę wiedzę można zweryfikować dopiero w trakcie stosowania definicji w rozwiązywaniu zadań. Przeniosło

(Przeniosło, 2001) opisała w swoich badaniach problemy związane z rozumieniem formalnej definicji:

> *Definicja podana „z zewnątrz" w postaci sformalizowanej może zostać dołączona do obrazu i istnieć jako jego element obok tworzących go również rozmaitych skojarzeń, wyobrażeń i intuicji. Nie dochodzi przy tym do konfrontacji tych elementów. Zgodnie bowiem z zasadą asymilacji uczący się nie przyswaja informacji zbyt różniących się od posiadanych; może je mechanicznie zapamiętać, ale w zasadzie nie spowoduje to zmiany jego struktur poznawczych. Trudności z odwoływaniem się do określeń pojęć abstrakcyjnych (szczególnie granicy czy ciągłości funkcji) wynikały zapewne również z samej ich struktury. Bez względu na rozważane teorie mamy bowiem do czynienia ze skomplikowanymi definicjami nominalnymi. Ich zrozumienie wymaga znajomości elementów pewnego „słownika", za pomocą którego zostały określone, a do ich wykorzystywania konieczna jest umiejętność stosowania tych elementów. „Słownik" ten jest zaś skomplikowany, jest bowiem nie tylko zbiorem pewnych pojęć matematycznych, ale zawiera także zależności między nimi.* (Przeniosło, 2001, s. 100)

Niektóre pojęcia matematyczne noszą nazwy występujące także w języku potocznym. Może to prowadzić do nieporozumień. Krygowska (Krygowska, 1969) pisze o takich pojęciach:

> *Sens potoczny jest tak bardzo zakotwiczony w myśli ucznia, że nie dociera doń przy czytaniu sens umowny nadany temu samemu terminowi przez matematyczną definicję, którego bardzo odległą genezą może być znaczenie potoczne, ale które ostatecznie z tym znaczeniem nie pokrywa się i nie może się pokrywać choćby ze względu na abstrakcyjność dziedziny, w której go interpretujemy.* (Krygowska, 1969)

Słownik Języka Polskiego (*Słownik Języka Polskiego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, n.d.) podaje następującą definicję słowa ciągły:
ciągły

1. *„trwający bez przerwy"*
2. *„powtarzający się stale"*
3. *„ciągnący się nieprzerwanie w przestrzeni"*

Ciągłość funkcji przedstawiana jest natomiast jako *właściwość, polegająca na tym, że dostatecznie mało różniącym się wartościom argumentu są przyporządkowane dowolnie mało różniące się własności funkcji.* Już na pierwszy rzut oka widać, że potoczna definicja ciągłości różni się od tej matematycznej. Może to powodować zaburzenia obrazu pojęcia ciągłości w matematyce i zmniejszać szanse na jego prawidłowy rozwój.

2.5. Intuicje

Może zdarzyć się, że studenci na zadane pytania nie będą odpowiadać odwołując się do definicji, ale zasugerują się potocznym znaczeniem terminu ciągłość. Im więcej jest błędnych intuicji związanych z pojęciem, tym trudniejsze jest korzystanie z formalnych definicji. Przeniosło (Przeniosło 2001) pisała o trudnościach związanych z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej i o sile intuicji w następujący sposób:

> *Wyjątkową rolę w strukturach poznawczych wielu badanych studentów odgrywały odczucia intuicyjne, szczególnie te niepoprawnie ukształtowane. Skojarzenia, które nabrały takiego charakteru, mogły bowiem blokować rozwój obrazu pojęcia, a nawet zburzyć już istniejącą strukturę, również poprawnie ukształtowaną, a podejmowane próby ich korygowania nastręczały wielu trudności. Przyczyną tak wielkiej siły tego typu przekonań była zapewne sama istota wszystkich intuicyjnych odczuć – postrzeganie ich jako oczywiste.* (Przeniosło, 2001, s. 101)

3. Metodologia badań

Opisane tutaj badanie zostało przeprowadzone w semestrze zimowym roku akademickiego 2018/2019. W artykule przedstawiam wyniki badania 120 studentów Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Grupa ta obejmowała:

1. 24 studentów I roku studiów I stopnia na kierunku Matematyka (Mat1),
2. 37 studentów II roku studiów I stopnia na kierunku Matematyka (Mat2)
3. 28 studentów I roku studiów I stopnia na kierunku Nauczanie matematyki i informatyki (NMI1),
4. 10 studentów II roku studiów II stopnia na kierunku Nauczanie matematyki i informatyki (NMI5)
5. 4 studentów II roku studiów I stopnia na kierunku Informatyka (INF),
6. 17 studentów II roku studiów II stopnia na kierunku Analiza i przetwarzanie danych (APD).

Liczba osób biorących udział w badaniu była większa od przedstawionych powyżej, jednak po ukończeniu wypełniania kart pracy część studentów odmówiła oddania swoich prac, twierdząc, że nie znali odpowiedzi i ich karty są puste. Taka sytuacja dotyczyła około 40 osób na kierunku *Informatyka* oraz 7 osób na kierunku *Analiza i przetwarzanie danych.*

Dobór studentów był celowy. W badaniu wzięli udział studenci reprezentujący różne kierunki studiów oraz różne roczniki. Stwarza to możliwość porównywania wyników uzyskiwanych przez osoby będące na różnych poziomach doświadczenia matematycznego, a także spoglądające na treści matematyczne z różnych perspektyw. Studenci kierunku *Informatyka* zasygnalizowali podczas badania, że nie czują się pewnie, mówiąc, że „to nie jest ich dziedzina”, „oni się do takich zadań nie nadają”, „już nic nie pamiętają” itp.

Studenci I roku studiów I stopnia z kierunków *Matematyka* oraz *Nauczanie matematyki i informatyki* ukończyli przed badaniem kurs Analiza matematyczna 1 (ich plan studiów obejmuje jeszcze kursy: Analiza matematyczna 2 i 3, Analiza funkcjonalna, Analiza zespolona, Funkcje analityczne, Topologia, Równania różniczkowe oraz kilka innych przedmiotów, na których poruszany jest temat ciągłości). Studenci *Matematyki* z II roku studiów I stopnia ukończyli już Analizę matematyczną 1 i 2, a biorąc udział w badaniu byli bliscy ukończenia kursu Analiza matematyczna 3. Studenci *Informatyki* ukończyli jeden (i jedyny ujęty w planie studiów) kurs Analizy matematycznej. Część studentów *Analizy i przetwarzania danych* ukończyła studia licencjackie a w niektórych przypadkach również magisterskie na kierunku *Matematyka.* Z kolei kilkoro z tej grupy ukończyło jedynie kurs Podstawy matematyki. Ta rozbieżność doświadczeń matematycznych badanych może tłumaczyć różnorodność udzielanych przez nich odpowiedzi i komentarzy. Studenci *Nauczania matematyki i informatyki* II roku studiów II stopnia ukończyli większość matematycznych przedmiotów dedykowanych na tym kierunku. Biorąc pod uwagę jedynie rodzaj kursów ujętych w planie studiów można spodziewać się, że studenci *Matematyki* i *Nauczania matematyki i informatyki* już na pierwszym roku mogą okazać się lepiej przygotowania do rozwiązywania zadań dotyczących ciągłości funkcji niż studenci *Informatyki* oraz (część studentów) *Analizy i przetwarzania danych.* Na etapie planowania badania spodziewałam się także tego, że na odpowiedzi udzielane przez studentów I roku studiów I stopnia większy wpływ może mieć wiedza zdobyta w szkole niż uzyskana i jeszcze nie ugruntowana na studiach.

Badanie ma na celu sprawdzenie czy i jaki wpływ na tworzenie obrazu pojęcia ciągłości funkcji mają:

1. perspektywa badanej jednostki oraz poziom doświadczenia matematycznego – do badania zostali zaproszeni studenci różnych kierunków, będących na różnych etapach poznania matematycznego,

2. różnorodność zadań – zestawienie różnych elementów: wykresu, słownego opisu, przedstawienia za pomocą symboli matematycznych, procedur postępowania, zależności ma na celu konfrontację wszystkich składników, która ostatecznie miałaby doprowadzić do rozwoju obrazu pojęcia ciągłości funkcji,

3. intuicje związane z potocznym znaczeniem omawianego pojęcia – słowo „ciągły” występuje w języku codziennym, należy sprawdzić czy ten fakt ma wpływ na poprawne rozwijanie i rozumienie formalnej definicji pojęcia ciągłości funkcji.

4. Opis narzędzia badawczego

Badanie wiedzy i umiejętności studentów z zakresu ciągłości funkcji przeprowadzono za pomocą zestawu zadań, które zostały dobrane w sposób umożliwiający identyfikację różnych elementów obrazu pojęcia ciągłości jaki posiadali badani studenci.

Zadania 1 i 2 sprawdzają przede wszystkim intuicje i wiadomości wyniesione ze szkoły. Na kartach pracy zadania te były umieszczone obok siebie, aby ułatwić studentom połączenie teorii z konkretnymi przykładami.

4.1. Zadanie 1

Zadanie 1 zostało sformułowane w opisowy sposób, bez użycia symboli i formalnych definicji.

Zaznacz kółkiem czy poniższe zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Wyjaśnij dlaczego wybrałeś taką odpowiedź.

1. Funkcja jest ciągła, kiedy możemy jej wykres narysować nie odrywając ołówka od kartki.	PRAWDA/FAŁSZ
2. Funkcja jest ciągła, gdy w jej wykresie nie ma żadnych luk ani przerywań.	PRAWDA/FAŁSZ

Te dwa zadania nawiązują do nieprecyzyjnych komunikatów często pojawiających się w praktyce szkolnej. Stanowią one pewne uproszczenia, które dobrze odpowiadają wielu, ale nie wszystkim, przypadkom z jakimi spotykają się uczniowie. Od studentów oczekuje się jednak korzystania z formalnych definicji pojęć i przyjmowania ich za punkt odniesienia przy ocenianiu prawdziwości podanych stwierdzeń. Wiadomo, że obraz pojęcia matematycznego w umyśle osoby uczącej się matematyki może być niespójny i zawierać elementy stojące ze sobą w sprzeczności. W szczególności możliwe jest, że student uzna, że funkcja ciągła to ta, której wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki, a jednocześnie stwierdzi, że wszystkie funkcje elementarne (w tym na przykład funkcja tangens) są ciągłe.

3. Wszystkie funkcje elementarne (czyli funkcje wielomianowe, trygonometryczne, cyklometryczne, hiperboliczne, logarytmiczne, wykładnicze, pierwiastkowe itp. oraz ich kombinacje) są ciągłe.	PRAWDA/FAŁSZ

Zestawienie zadań 1 i 2 z zadaniem 3 jest zabiegiem świadomym i ma na celu wywołanie u badanych konfliktu poznawczego i niepokoju, który doprowadzić ich może do odkrycia niespójności ich wiedzy. Słowne, formalne opisy zagadnienia zestawione z potocznymi skojarzeniami są kolejną próbą prowokowania kwestionowania posiadanej wiedzy przez studentów.

4. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, to ma w tym punkcie granicę równą $f(x_0)$.	PRAWDA/FAŁSZ
5. Funkcja jest ciągła, kiedy mała zmiana argumentu powoduje dużą zmianę wartości funkcji.	PRAWDA/FAŁSZ
6. Funkcja jest ciągła w przedziale, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.	PRAWDA/FAŁSZ

Dydaktycy zajmujący się obrazem pojęcia podkreślają, że zadania różnego typu mogą aktywować u uczących się matematyki różne elementy obrazu danego pojęcia. Błąd w zadaniu 5 jest dodatkowo próbą sprawdzenia, czy badani czytają ze zrozumieniem i nie udzielają odpowiedzi automatycznie, bez zastanowienia.

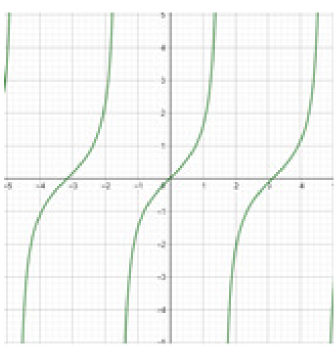
7. Jeśli funkcja jest zdefiniowana w punkcie, to funkcja jest ciągła w tym punkcie.	PRAWDA/FAŁSZ

Zadanie to zestawione z wykresem z Zadania 2e) ponownie powinno wywołać wątpliwości. Studenci mogą błędnie uważać, że funkcja niezdefiniowana w punkcie, jest w tym punkcie również nieciągła.

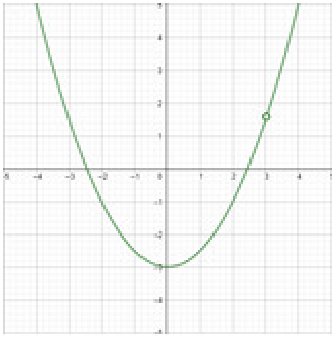
Zadanie to zestawia ze sobą formalny opis definicji i własności z potocznymi przekonaniami. Jest to próba wywołania refleksji u badanych, co mogłoby stać się bodźcem do rozwijania obrazu pojęcia u badanych.

4.2. Zadanie 2

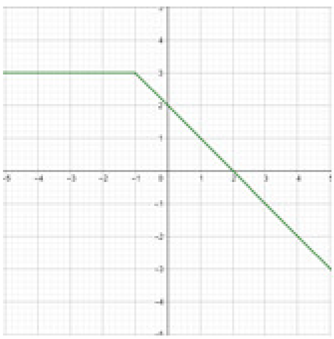
Zaznacz kółkiem, które z poniższych funkcji są funkcjami ciągłymi w swojej dziedzinie. W każdym z przypadków uzasadnij swoją odpowiedź.



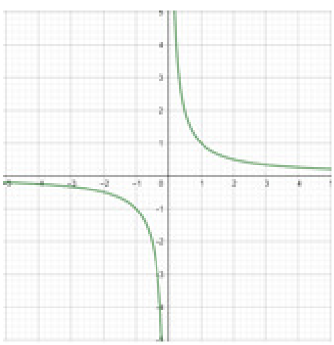
a. W zadaniu 1 podpunkt 3. studenci rozważali ciągłość funkcji trygonometrycznych. Wykres ten ma na celu wywołanie refleksji u studentów, którzy wciąż wiążą ciągłość z przykładowo „nieodrywaniem ołówka od kartki”. Ponadto niepewność może wzbudzić punkt 3 w zadaniu 1, który mówi o tym, że wszystkie funkcje elementarne (w tym funkcja tangens) są ciągłe.



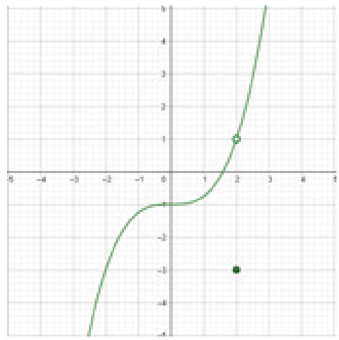
b. W zadaniu tym niezdefiniowany punkt może przywodzić na myśl brak ciągłości. Byłoby pożądane, aby badani zastanowili się nad sytuacją, w której punkt znajduje się poza rysunkiem, lub brakiem zdefiniowania go.



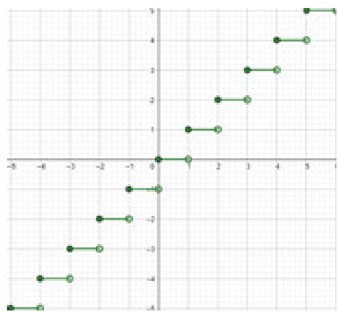
c. Wątpliwości możliwe w tym zadaniu to jak na ciągłość wpływa monotoniczność funkcji.



d. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ może prowadzić do niepoprawnego przekonania, że funkcja ta jest nieciągła, ponieważ jej wykres składa się z dwóch łuków hiperboli.



e. Określenie przedstawionego wykresu jako wykresu funkcji ciągłej świadczy o braku powiązań między ciągłością funkcji a granicami jednostronnymi w punkcie.



f. Możliwe jest, że badani określą ten wykres jako wykres funkcji ciągłej, ponieważ funkcja ta zdefiniowana jest na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Z błędnego przekonania: *Jeżeli funkcja jest niezdefiniowana w punkcie, to jest w tym punkcie również nieciągła* może zostać wyciągnięty błędny wniosek, że funkcja jest ciągła, ponieważ jest zdefiniowana.

4.3. Zadanie 3

Które ze zdań jest prawdziwe, jeśli dla funkcji f zachodzi: $f(3) = 7$?

1. $\mathit{lim}_{x \to 3} f(x) = 7$
2. *funkcja f jest ciągła w punkcie 3*
3. *funkcja f jest nieciągła w punkcie 3*
4. *żadne z powyższych nie jest prawdziwe*

Dlaczego tak uważasz?

Zadanie to wykorzystała (Amatangelo 2013) w swoich badaniach. Poprzez argumentację można podjąć próbę analizy drogi rozumowania badanych oraz umiejętności uzasadniania. Jeżeli badani uważają, że zdefiniowanie funkcji w punkcie jest równoznaczne z:

1. istnieniem granicy w tym punkcie,
2. ciągłością funkcji w tym punkcie,
3. nieciągłością w tym punkcie,

to na jakiej podstawie wyciągnęli takie wnioski.

4.4. Zadanie 4

Korzystając z definicji granicy funkcji Heine'go wykaż, że granicą funkcji $f(x) = 2x^2 + 1$ w punkcie 2 jest liczba 9.

W zadaniu tym należy skorzystać z definicji, aby wykazać prawdziwość zdania.

Liczbę g nazywamy granicą funkcji w x_0, jeśli: $\bigwedge_{\mathrm{x_n \to x_0}} \lim_{\mathrm{n \to \infty}} f(\mathrm{x_n}) = g$

Zadanie ma na celu uzyskanie informacji na temat radzenia sobie z korzystaniem z formalnej definicji. Wspomniane w pracy badania pokazują, że przejście w świat formalny jest jedną z największych trudności na drodze kształtowania matematycznych pojęć. Zadanie może okazać się problematyczne szczególnie dla studentów 1 roku studiów, ponieważ ich umysły są jeszcze pełne nieformalnych skojarzeń nieskonfrontowanych ze światem formalnym.

4.5. Zadanie 5

Sprawdź czy podana funkcja jest ciągła w swojej dziedzinie. Jakie kroki należy wykonać, aby wykonać zadanie? Opisz je.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & dla\ x < 0 \\ \sqrt{x} - 4 & dla\ x \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie to ma na celu sprawdzenie podstawowych umiejętności rachunkowych studentów oraz wiedzy dotyczącej znajomości etapów badania ciągłości funkcji. Na wcześniejszych etapach nauczania zadania rachunkowe są najczęściej rozwiązywanym typem zadań. Można zatem wnioskować, że badani, którzy znają schemat rozwiązania, nie powinni mieć problemów z odpowiedzią. Komentarze pozwolą określić czy studenci wiedzą dlaczego wykonują dane kroki.

5. Wyniki badania

5.1. Zadanie 1

Numer pytania	Poprawna odpowiedź	Liczba studentów, którzy udzielili poprawnej odpowiedzi						Procent poprawnych odpowiedzi
		Mat1 24 os.	Mat2 37 os.	NMI1 28 os.	NMI5 10 os.	Inf 4 os.	APD 17 os.	
1	Fałsz	12	20	8	3	3	5	45 %
2	Fałsz	8	24	8	3	1	2	38 %
3	Prawda	16	25	16	4	2	13	63 %
4	Prawda	19	31	21	8	2	14	79 %
5	Fałsz	24	33	24	10	3	15	91 %
6	Prawda	23	35	25	10	4	15	93 %
7	Fałsz	15	24	15	6	1	11	60 %

Na pytania 1 i 2 badani udzielili mniej niż połowę poprawnych odpowiedzi. Pojawiły się komentarze: „zgodnie z definicją” – co może być powodowane nieznajomością definicji lub tym, że intuicje i „met-befores” związane z „brakiem luk” są tak silnie zakorzenione w obrazie pojęcia, że formalne definicje wydają się z nimi sprzeczne. Zdarzały się również uzasadnienia typu: „tak uczono w szkole”, zatem „met-befores” wyniesione ze szkoły nie zostały jeszcze przezwyciężone. Co więcej najczęściej tego argumentu używali studenci kierunku *Nauczanie matematyki i informatyki* – przyszli nauczyciele. Przy poprawnych odpowiedziach na to pytanie jako uzasadnienie podawane były kontrprzykłady.

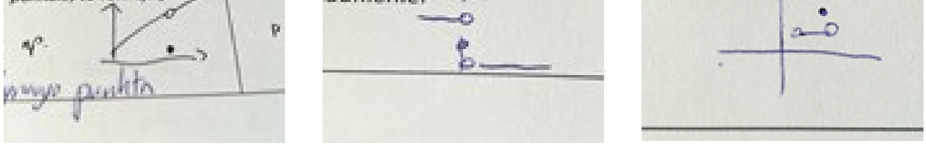
W pytaniu 3 błędna odpowiedź była uzasadniana tym, że te funkcje są ciągłe tylko na pewnych przedziałach, a nie w zbiorze liczb rzeczywistych. Studenci podali przykłady funkcji tangens i wykładniczej jako nieciągłych. Można wnioskować, że postrzegają ciągłość funkcji jako wykres na zbiorze liczb rzeczywistych.

Przy poprawnej odpowiedzi, w pytaniu 4, pojawiały się jedynie komentarze „z definicji”, „zgodnie z definicją”. Przy błędnej odpowiedzi nie było ich wcale.

Pytanie numer 5 było celowo niepoprawnie, ale z uwag studentów może wynikać, że nie z tego powodu było traktowane jako fałszywe. Komentarze: „Taka zależność nie ma znaczenia”, „Nie ma znaczenia jak zmieniają się wartości” świadczyć mogą o problemach z rozumieniem definicji. Kilkoro studentów podało jako kontrprzykład funkcję stałą: „Niekoniecznie, na przykład funkcja stała też jest funkcją ciągłą”. Można wnioskować, że gdyby zdanie napisane było poprawnie, to odpowiedzi do zadania byłby podobne.

W pytaniu 6 procent poprawnej odpowiedzi był najwyższy. Komentarze badanych odnosiły się do definicji lub „jakiegoś twierdzenia z wykładu”. Nikt z badanych nie zastanowił się głębiej nad zadaniem, na przykład czy przedział o którym mowa jest domknięty czy otwarty.

Problemy studentów z pytaniem 7 wynikają z niepoprawnie wytworzonej zależności zdefiniowania funkcji w punkcie z ciągłością w tym punkcie. Jako uzasadnienie poprawnej odpowiedzi pojawiały się komentarze: „nie, bo taki punkt może być luką lub skokiem”, „ten punkt może być punktem nieciągłości”. Kilkoro studentów połączyło to pytanie z rysunkiem E w następnym zadaniu. Tylko siedmioro studentów próbowało formalnie uzasadnić odpowiedź pisząc, że „granica w tym punkcie nie musi być równa wartości w tym punkcie”, „granice jednostronne muszą być równe” lub „należy zbadać otoczenie tego punktu”. Pięć osób narysowało rysunek służący jako kontrprzykład. Był to fragment wykresu funkcji ukazujący sytuację podobną do rysunku 1 w następnym zadaniu.



Rysunek 1. Kontrprzykłady podane przez studentów w zadaniu 1 podpunkt 7.

Zadanie 1 pokazało podział utworzony w obrazie pojęcia między definicją formalną a intuicjami i potocznymi skojarzeniami. Komentarze przy zadaniu mogą sugerować, że konflikty poznawcze nie zostały przezwyciężone. Można natomiast stwierdzić, że studenci 1 i 2 roku kierunku *Matematyka* starają się odpowiadać w bardziej formalny sposób niż na przykład przyszli nauczyciele, którzy w wielu przypadkach korzystają z intuicji i szkolnych uproszczonych definicji. W zadaniu 1 około 65% badanych uzasadniało swoje odpowiedzi.

5.2. Zadanie 2

Wykres	Poprawna odpowiedź	Liczba studentów, którzy podali poprawną odpowiedź						Procent poprawnych odpowiedzi
		Mat1 24 os.	Mat2 37 os.	NMI1 28 os.	NMI5 10 os.	Inf 4 os.	APD 17 os.	
a	Tak	13	21	17	4	2	11	57 %
b	Tak	7	17	6	3	2	5	33 %
c	Tak	23	34	25	8	4	13	89 %
d	Tak	12	20	12	6	3	11	53 %
e	Nie	5	1	4	1	1	1	89 %
f	Nie	5	4	8	1	2	2	82 %

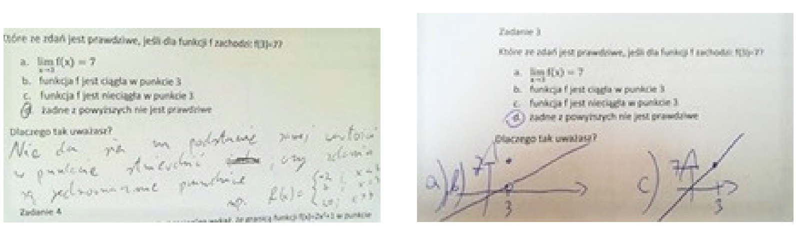
Przy tworzeniu zestawu zadań pojawiły się wątpliwości czy podane przykłady nie są nazbyt proste. Okazało się jednak, że studenci mają trudności z określeniem ciągłości dla wielu elementarnych przykładów funkcji. Komentarze najczęściej dotyczyły analizy luk i przerywań w wykresie funkcji. W przykładach z Zadania 2 a) i d) studenci rysowali asymptoty, a mimo to nie zaznaczali tych odpowiedzi jako poprawnych. Pojawiły się komentarze typu „Funkcja tangens nie jest określona w pewnych punktach, więc jej dziedzina nie jest równa zbiorowi liczb rzeczywistych.” lub „Odpowiedzi c, e i f są poprawne, ponieważ dla każdego argumentu przyporządkowana jest wartość.”, które wskazywały na problemy z rozumieniem ciągłości funkcji i błędnym kojarzeniem jej z definicją funkcji. Ostatni przykład często opatrzony był komentarzem „Argumenty się uzupełniają.” Pojawiły się również uwagi pokazujące jak silne są intuicje i doświadczenia związane z wcześniejszym etapem edukacji: „Funkcje a, d i f są nieciągłe, ponieważ nie da się narysować wykresu nie odrywając ołówka od kartki.” Przy wykresie c pojawiała się uwaga, że można go narysować bez odrywania ręki, więc jest to odpowiedź poprawna. Badani pisali również, że wykresy a czy d są „ciągłe tylko na przedziałach”, więc nie traktowali ich jako funkcji ciągłych. Można zatem wyciągnąć wniosek, że nie łączyli pojęcia ciągłości funkcji z jej dziedziną. W Zadaniu 2 b), ze względu na „dziurę” w wykresie studenci uznali funkcję za nieciągłą. Nie pojawiły się uwagi czy przemyślenia dotyczące dziedziny tej funkcji, mimo celowego zdania w poleceniu: *Zaznacz kółkiem, które z poniższych funkcji są funkcjami ciągłymi* ***w swojej dziedzinie****.*

Zadanie: 1 i 2 były w badaniu zestawione obok siebie, aby naprowadzić na połączenie elementu wizualnego z opisem słownym. Możliwe jest, że ułatwiło to niektórym pozbycie się wątpliwości i rozwój obrazu pojęcia. Możliwe jest również, że przysporzyło to zbyt dużo niepewności i pogłębiło przepaść między intuicyjnymi skojarzeniami a formalną definicją. Świadczyć o tym, mogą sytuacje, w których studenci przeczyli swoim odpowiedziom. W zadaniu 1 określali zdanie 1 i 2 jako prawdziwe i jednocześnie w zadaniu 2 zaznaczali wykresy a i d jako wykresy funkcji ciągłej. Zaznaczano również, że stwierdzenie w pytaniu 3 jest prawdziwe, ale wykres funkcji tangens nie był wykresem funkcji ciągłej i odwrotnie. Wnioskować można, że obraz pojęcia funkcji ciągłej jest nadal pełen sprzeczności i niepewności. Zapisane słowami zdanie wydaje się badanym rozbieżne z przedstawionym wykresem, a funkcja, żeby mogła być określona jako ciągła, musi być ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych, a nie dla argumentów, dla których jest określona.

5.3. Zadanie 3

Odpowiedź	Poprawna odpowiedź	Liczba studentów, którzy zaznaczyli poprawną odpowiedź						Procent poprawnych odpowiedzi
		Mat1 24 os.	Mat2 37 os.	NMI1 28 os.	NMI5 10 0s.	Inf 4 os.	APD 17 os.	
a	Nie	10	21	10	2	1	3	39 %
b	Nie	4	5	4	5	3	3	20 %
c	Nie	0	0	0	0	0	0	0 %
d	Tak	11	16	15	2	0	10	45 %

Mniej niż połowa badanych zaznaczyła poprawną odpowiedź. Studenci, którzy uzupełnili uzasadnienie swojej odpowiedzi, starali się określić jakie wnioski mogą wyciągnąć z podanej informacji i dlaczego. Można zauważyć, że najwięcej wyjaśnień zapisali studenci kierunku *Matematyka* i czują się oni najpewniej w uzasadnianiu swoich wniosków. Najczęściej pojawiającą się uwagą było: „mam za mało informacji, aby odpowiedzieć na to pytanie”. Wiele razy pojawiał się również komentarz, że brak wzoru funkcji powoduje, że nie można odpowiedzieć na to pytanie. Tylko kilka osób wspomniało o tym, że aby sprawdzić ciągłość lub nieciągłość tej funkcji należałoby również znać granicę funkcji w tym punkcie. Kilka osób podało kontrprzykłady:



Rysunek 2. Kontrprzykłady podane przez studentów w zadaniu 3.

Tylko przy poprawnej odpowiedzi badani zostawiali komentarz. Ani jedna z błędnych odpowiedzi nie zawierała uwag. Ponadto nikt nie zaznaczył odpowiedzi c.

45% badanych zaznaczyło poprawną odpowiedź, jednak tylko około połowa z nich potrafiła uzasadnić dlaczego pozostałe odpowiedzi były błędne.

5.4. Zadanie 4

Sposób rozwiązania	Liczba studentów, którzy rozwiązali zadanie danym sposobem						Procent danego rozwiązania
	Mat1 24 os.	Mat2 37 os.	NMI1 28 os.	NMI5 10 os.	Inf 4 os.	APD 17 os.	
Puste miejsce	5	5	7	2	1	7	22,5 %
Obliczenie granicy	15	25	18	7	1	8	62 %
Pokazanie, że dla pewnego ciągu granica jest równa 9	2	2	0	1	0	0	4 %
Poprawne skorzystanie z definicji i dowód	0	2	0	0	1	0	2,5 %
Inne rozwiązanie (niewykorzystujące definicji Heine'go lub niepoprawne)	2	3	3	0	1	2	9 %

Odpowiedzi w tym zadaniu można podzielić na cztery typy:

1. brak jakiejkolwiek odpowiedzi – puste miejsce,
2. obliczenie granicy i przyrównanie wyniku z granicą, którą należało wykazać – tutaj studenci wyznaczali granicę $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x^2+1) = 2\cdot 2^2+1 = 9$,
3. pokazanie, że dla pewnego ciągu granica jest równa 9 – w tym przypadku studenci szukali ciągu i za jego pomocą pokazywali prawdziwość zdania,
4. inne rozwiązanie, które nie jest poprawne – studenci obliczali wartość funkcji f w punkcie 2 ($f(2) = 9$ *zatem* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$), korzystali z definicji Cauchy'ego, błędnie obliczali granicę, badali otoczenie punktu 2 lub granice jednostronne.

Poprawnej odpowiedzi w tym zadaniu udzieliło 5 osób. Najczęściej pojawiającym się błędem było obliczanie granicy, nie korzystano także z przedstawionej definicji. Schemat działania wyglądał następująco: obliczenie granicy, sprawdzenie, że granica jest równa dokładnie tyle, ile należało wykazać zatem można zakończyć dowód. Możliwe jest, że korzystanie z formalnej definicji sprawia większe problemy osobom z mniejszym doświadczeniem matematycznym (studenci 1 roku studiów).

Jednak tylko 2 z 37 studentów matematyki na drugim roku oraz 0 z 10 studentów na piątym roku studiów rozwiązało to zadanie poprawnie. Zadanie to potwierdziło problemy studentów z korzystaniem z formalnej definicji.

5.5. Zadanie 5

Sposób rozwiązania	Liczba studentów, którzy rozwiązali zadanie danym sposobem						Procent podanej odpowiedzi
	Mat1 24 os.	Mat2 37 os.	NMI1 28 os.	NMI5 10 0s.	Inf 4 os.	APD 17 os.	
Puste miejsce	5	2	6	3	1	6	19 %
Obliczenie granicy jednostronnych w punkcie	13	26	12	6	1	4	52 %
Rozwiązanie niepełne lub błędne	5	4	7	1	1	5	19 %
Opisanie kroków słownie bez rozwiązania	1	5	3	0	1	2	10 %

Badani, którzy rozwiązywali zadanie poprawnie zauważali punkt osobliwy, obliczali granice prawo- i lewostronną, wartość funkcji w tym punkcie i na tej podstawie stwierdzali ciągłość funkcji. Do poprawnych odpowiedzi wliczane było również rozwiązanie bez komentarzy. Czasami studenci liczyli tylko granice jednostronne bez zaznaczenia, że wartość funkcji w tym punkcie jest równa granicom. Rozwiązania te były zazwyczaj bardzo krótkie i nieopisane, zatem trudno stwierdzić czy wynikało to z niewiedzy czy zostało uznane za oczywiste. Interesującym wydaje się pytanie: czy gdyby granice lewo- i prawostronna były równe natomiast wartość funkcji w punkcie byłaby inna czy studenci określaliby ciągłość tej funkcji na podstawie wartości funkcji w punkcie czy wartości granic jednostronnych i ich równości?

Błędne lub niepełne odpowiedzi to na przykład słowny opis metody rozwiązania, ale bez rozwiązania podanego zadania. W zadaniu podane jest jednak: *Sprawdź czy podana funkcja jest ciągła.* Kilkoro studentów rozwiązywało nierówności $x^2 - 4 < 0$ *oraz* $\sqrt{x} - 4 \geq 0$ i na tej podstawie oceniało ciągłość funkcji.

Studenci, którzy próbowali intuicyjnie badać wykres funkcji lub rozwiązywać nierówności wyciągali błędne wnioski.

Podsumowując, około połowa studentów potrafiła sprawdzić czy podana funkcja jest ciągła. Widać zatem, że badani lepiej poradzili sobie z zadaniem rachunkowym niż z zadaniem wymagającym korzystania z własności lub formalnych definicji.

6. Wnioski końcowe

Przeprowadzona analiza pokazuje szereg trudności związanych z kształtowaniem pojęcia ciągłości u studentów.

Perspektywa badanej jednostki oraz poziom doświadczenia matematycznego mają wpływ na rozwijanie obrazu pojęcia u badanych. Wielu badanych miało problemy z argumentowaniem swoich odpowiedzi i opisywaniem wykonywanych kroków. Niewielka liczba komentarzy do zadań może być spowodowana niepewnością i kwestionowaniem powiązań między posiadanymi informacjami i doświadczeniami dotyczącymi pojęcia ciągłości.

Zauważyć można, że głęboko zakorzenione intuicje i wiedza na temat pojęcia, pozornie bardzo prostego, przeszkadzają w formalizowaniu i tworzeniu ostatecznego obrazu danego pojęcia. Pozorna prostota wynika przede wszystkim z tego, że słowo „ciągłość” występuje również w języku codziennym. Formalna definicja podana w zadaniu mogła zostać dołączona do obrazu, ale istniała jedynie jako element obok tworzących go również skojarzeń, wyobrażeń i intuicji. Nie doszło przy tym do konfrontacji tych elementów.

Wykorzystana różnorodność zadań wywołała u badanych niemało wątpliwości i doprowadziła do udzielenia wielu sprzecznych ze sobą odpowiedzi. Studenci uznawali zdanie *Wszystkie funkcje trygonometryczne są ciągłe.* za prawdziwe, po czym nie zaznaczali wykresu funkcji tangens jako ciągłej. Ważnym aspektem przeprowadzonych badań było skłonienie studentów do refleksji.

References

Amatangelo, M.: 2013, Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions, *Theses and Dissertations*, Brigham Young University, Provo, 25–32.
`https://scholarsarchive.byu.edu/etd/3639`

Bugajska-Jaszczołt, B.: 2003, Koncepcje pojęcia kresu zbioru ograniczonego kształtowane w procesie nauczania-uczenia się matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka matematyki* **25**, 248–261.

Gunćaga, J., Powązka, Z.: 2006, Badania nad wykorzystaniem pojęcia ciągłości funkcji do definiowania pochodnej funkcji w punkcie, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka matematyki* **29**, 5–27.

Krygowska, Z.: 1969, *Zarys dydaktyki matematyki. Część 1.*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 130–153.

Powązka, Z.: 2013, O badaniach and kształtowaniem się u studentów matematyki podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **5**, 229–295.

Przeniosło, M.: 2001, Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka matematyki* **23**, 95–124.

Słownik Języka Polskiego: n.d., Wydawnictwo Naukowe PWN. dostęp: 15.03.2021.
`https://sjp.pwn.pl/`

Tall, D.: 2003, *How humans learn to think mathematically. Exploring the three worlds of mathematics*, New York: Cambridge University Press, 22–24, 80–117.

Tall, D., Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151–169.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
e-mail: barbara.borkowicz@amu.edu.pl