FOLIA 321

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 12(2020)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.12.10

Zbigniew Semadeni

Reformy programów i podręczników szkolnych sprzed pół wieku inspirowane prądami tzw. nowej matematyki*

Abstract. The purpose of this paper is to outline the reforms of mathematics education in the spirit of "New Math" in USA, France and to document their features in Poland. Activities and achievements of Zofia Krygowska are listed. Particular attention is paid to two radical reforms: the 1967 textbook on geometry based on set-theory for grade IX and far-reaching changes in primary math education in the 1970s. Excerpts from articles, curricula and textbooks are included.

Celem tego artykułu jest krytyczny przegląd trudnych dziś do pojęcia reform wprowadzanych ponad pół wieku temu pod hasłem „nowej matematyki" lub „matematyki nowoczesnej". Ich fala przeszła przez wiele krajów świata (w tym przez niektóre tzw. kraje rozwijające się, zmagające się z biedą i analfabetyzmem). Zaczniemy od USA, kolebki *New Math*, potem omówimy krótko zmiany we Francji i dość dokładnie reformy polskie, wprowadzane pod bezpośrednim wpływem idei francuskich i belgijskich. Bardzo istotne jest tło tych reform, pozwalające nieco lepiej zrozumieć, jak to się stało, że w tylu krajach świata wybitni matematycy i dydaktycy z entuzjazmem wprowadzali reformy, które później okazały się oparte na błędnych założeniach, zarówno w doborze treści jak i w sposobie ich wdrażania. Ich efekty we Francji i w Polsce okazały się trwałe i szkodliwe.

Celowo systematycznie umieszczam wiele dosłownych cytatów z opublikowanych źródeł, liczę się bowiem z tym, że dzisiaj trudno może być uwierzyć, że jakiś znany matematyk mógł propagować takie sądy i dążyć do wprowadzenia takiego materiału do nauczania szkolnego.

---

*2010 Mathematics Subject Classification: Primary: *97A30*; Secondary: *97B70*

Keywords and phrases: *New Math, sets, axiomatic geometry, curricula, reforms, teachers, Poland*

1. Reformy w USA i we Francji

Na Drugim Międzynarodowym Kongresie Edukacji Matematycznej ICME-2 w Exeter (1972), René Thom (1923–2002), sławny francuski matematyk, autor prac z topologii różniczkowej i teorii katastrof, laureat medalu Fieldsa (w 1958 r.), zaczął swój plenarny odczyt następującymi słowami[1]:

> Przyszły historyk matematyki będzie z pewnością zdumiony rozmiarem, jaki osiągnął w latach sześćdziesiątych ruch zwany matematyką nowoczesną. Wydaje się, że obecnie ruch ten doszedł do swego zenitu i można zauważyć pierwsze oznaki odpływu, objaw zdrowej reakcji. (Thom, 1974a)

Ruch ów, zwany w USA *New Math*, we Francji *Mathématique Moderne*[2], w Niemczech *die neue Mathematik*[3], w Polsce nie miał ogólnie używanej nazwy, jakkolwiek nieraz stosowano określenie *matematyka współczesna*. Tym, co dało nowy, bardzo silny impuls wcześniejszym dyskusjom o ulepszeniu nauczania matematyki w USA, było wystrzelenie Sputnika przez Rosjan w 1957 r. – wywołało to tam niebywały szok. Amerykanie, który zawsze byli przekonani, że są najlepsi na świecie (w tym również w nauczaniu szkolnym), nagle przegrali wyścig w najbardziej nowoczesnej i prestiżowej technologii. Słynna konferencja w Woods Hole w stanie Massachusetts w 1959 r. była poświęcona tej kwestii[4].

Postanowiono unowocześnić nauczanie matematyki i przedmiotów przyrodniczych. Aby uzyskać na ten cel fundusze z *National Science Foundation* i społeczne poparcie, wymyślono chwytliwy slogan: *New Math*. Oprócz tego modernizowano nauczanie fizyki, chemii i biologii, ale to matematyce towarzyszyła największa wrzawa. Otworzył się nowy biznes, podręcznikowy i poradnikowy. W niedzielnych dodatkach do gazet dokształcano rodziców, wyjaśniając, co to są zbiory, koniunkcja, implikacja i inne pojęcia współczesnej matematyki. Zdarzały się demagogicznie stwierdzenia, że jeżeli uczeń pozna zbiory, to będzie umiał logicznie myśleć i wobec tego nie będzie miał kłopotów z matematyką[5].

---

[1] Po wysłuchaniu jego wystąpienia część francuskich dydaktyków zapałała oburzeniem; gdyby nie fakt, że Thom był jednym z najwybitniejszych matematyków, oskarżono by go, że jest ignorantem, nie rozumiejącym, czym jest nowoczesna matematyka. Oprócz jego referatu z Exeter (Thom 1974b), ukazał się też polski przekład jego wcześniejszego artykułu ukazującego słabe punkty i nonsensy reform *Mathématique Moderne* (Thom, 1974a).

[2] Zmieniono wówczas pisownię, usuwając z tradycyjnego francuskiego słowa *mathématiques* literę *s*, aby przez gramatyczną liczbę pojedynczą *la mathématique* podkreślić, że matematyka jest jedną, niepodzieloną całością. Zmiana ta jednak nie przyjęła się w języku francuskim (nb. Krygowska zawsze pisała owo *s*). Liczba mnoga w *les mathématiques* pochodziła ze średniowiecznego *Quadrivium*, które obejmowała cztery pitagorejsko-platońskie części matematyki: *arithmétique, géométrie, musique, astronomie*. W języku angielskim *mathematics* też pisze się z *s*, ale – w przeciwieństwie do francuskiego – jest to słowo o formie liczby mnogiej, ale znaczeniowo pojedynczej (mathematics is).

[3] Bardzo popularny był podręcznik (Griesel 1971) dla nauczycieli i studentów; miał 7 wydań.

[4] O konferencji tej wspomniał amerykański psycholog i pedagog Jerome Bruner, autor wnikliwych przemyśleń dotyczących procesu kształcenia, w szczególności uczenia się matematyki przez dziecko. W książce wydanej w USA w 1960 r. pisze on o wielu ówczesnych inicjatywach reformowania edukacji, ale nie ma jeszcze u niego tam śladu idei *New Math* (Bruner, 1964).

[5] „Niektórzy twierdzą, że użycie teorii zbiorów pozwoli całkowicie zrewolucjonizować nauczanie

Wcześniejsze badania wyników nauczania wyraźnie pokazywały, że wielu amerykańskich uczniów jeszcze w klasach II i III nie rozumie *place value*, tzn. sensu miejsca jedności, dziesiątek, setek w zapisie liczb; w testach braki te ujawniały się w stopniu niewyobrażalnym w Polsce. Było to wynikiem rozpowszechnionego nauczania behawiorystycznego, opartego na systemie S+R, bodźców i reakcji. Rozpowszechnione też było nauczanie algorytmu dodawania pisemnego od samego początku nauki dodawania. Nieraz w ogóle nie zaczynano od zapisu poziomego typu 3+2=5, lecz od razu zapisywano to samo w pionie, bez znaku równości. Wielu uczniów nie rozumiało sensu *carrying*, przenoszenia jedynki do następnego rzędu przy dodawaniu z przekroczeniem progu dziesiątkowego; ćwiczono to przez wielokrotnie powtarzanie kolejnych kroków podanego schematu. W jednym z numerów wysoko nakładowego pisma *The Arithmetic Teacher* na odwrocie okładki zamieszczono apel do nauczycieli: *Nie uczcie sześciolatków dodawania liczb dwucyfrowych*[6]. Dla nas ten apel jest niepojęty, a tam po prostu wielu nauczycieli uczyło w I klasie pionowego dodawania liczb dwucyfrowych ograniczonego do sytuacji bez przekraczania progu. Robiło się to prosto: lewa cyfra do lewej, prawa do prawej, chociaż wiele dzieci niezbyt rozumiało, które cyfry oznaczały jedności, a które – dziesiątki.

Jednym z haseł *New Math* było to, że nie wystarczy sprawność w wykonywaniu rachunków, niezbędne jest ich głębsze rozumienie. Ogólne zasady arytmetyki i algebry są ważniejsze od wykonywanych obliczeń. Dedukcyjne rozumowanie powinno dotyczyć również algebry, a nie tylko geometrii. Same te postulaty brzmią słusznie, ale wiele osób wtedy było przekonanych, że właściwe rozumienie pojęć osiąga się dopiero wtedy, gdy są one wyrażane w języku mnogościowym.

Inną z głoszonych wówczas idei dydaktycznych była zasada ł ą c z e n i a i k o n t r a s t o w a n i a każdego nowego pojęcia z pojęciami wcześniejszymi, co samo w sobie też jest słuszne, ale niektórzy głosili, że należy to stosować już w momencie wprowadzania nowego pojęcia, m.in. że należy wprowadzać odejmowanie równocześnie z wprowadzaniem dodawania[7]. Polskim tego odpowiednikiem było hasło w programie: „wprowadzenie odejmowania jako działania odwrotnego do dodawania", a potem podobnie dla dzielenia, chociaż z badań Piageta wynikało, że odwracanie działania jest bardzo trudne dla sporej części dzieci w tym wieku[8]. Przez niektórych dydaktyków ów postulat był interpretowany jeszcze mocniej: uważali, że wprowadzenie odejmowania w klasie I nie powinno opierać się na tradycyjnych zadaniach na ubywanie (było tyle, potem ktoś zabrał,

matematyki i dzięki tym zmianom nawet najbardziej przeciętny uczeń będzie w stanie opanować wykładany program matematyki. Nie warto nawet mówić, że to złudzenie" (Thom 1974a, 114).

[6]Napisała go Constance Kamii, Amerykanka pochodzenia japońskiego, wybitna propagatorka zmian podejścia do uczniów w edukacji początkowej, uczennica Piageta, autorka znanej książki *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory.*

[7]Zofia Krygowska we francuskiej wersji swego programu matematyki dla klasy I podkreśliła to bardzo wyraźnie, wyróżnioną czcionką: „L'addition et la soustraction sont introduites *en même temps* (la même situation, la même pensée, s'expriment de façons différentes)" – dodawanie i odejmowanie są wprowadzanie *w tym samym czasie* (ta sama sytuacja, to samo myślenie, wyrażają się na różne sposoby). Ponowiła to przy mnożeniu i dzieleniu (Krygowska, 1971a, s.104).

[8]Głoszono, że dzięki używaniu grafów trudność ta będzie pokonana.

zgubił, zjadł,..., ile zostało?), lecz przez pytanie o brakujący składnik w sumie, np. przy dopełnianiu. Inny polski przykład to postulat kontrastowania porównywania ilorazowego z różnicowym już na samym początku wprowadzania ilorazowego.

Zgodnie z powyższą zasadą uznano też w USA, że właściwe rozumienie systemu dziesiątkowego można osiągnąć przez kontrastowanie go z innym systemami. Za jedno z lekarstw na nierozumienie systemu dziesiątkowego uznano bardzo wczesne (już w I klasie) równoczesne z dziesiątkowym pokazywanie systemu dwójkowego i trójkowego (oczywiście odbywało się to też w behawiorystyczny sposób, bo innego nauczyciele amerykańscy nigdy w swej edukacji nie spotkali)[9].

New Math dominowało w szkołach USA przez większość okresu 1960–1970. Gorliwi zwolennicy reformy dokonali wielu ciekawych eksperymentów z dziećmi, nie próbowano jednak sprawdzić, jak realizowanie tego będzie wyglądać w praktyce przy masowym nauczaniu. Spodziewano się oczywiście trudności, ale wierzono, że będą one przejściowe, dopóki nauczyciele nie opanują tego nowego podejścia. Po dekadzie niepowodzeń nastąpił równie głośny odwrót pod hasłem *Back to Basics* (tzn. wracamy do nauczania podstawowych umiejętności matematycznych), choć zdarzały się też nieśmiałe sugestie, by było to raczej *Forward to Basic*, by – owszem – uczyć *basics*, ale nie wracać do tego, co było, lecz wprowadzić lepsze metody[10].

Fałszywe, choć rozpowszechnione jest mniemanie, że reformy *New Math* w USA były inspirowane przez twórczych matematyków. Wręcz przeciwnie, wybitni matematycy bardzo wcześnie wyrazili swój sprzeciw, o czym świadczy zredagowany w 1961 r. memoriał czołowych matematyków USA, z którego wybieram fragmenty[11].

> Matematycy amerykańscy mają teraz korzystniejszy klimat dla rozwoju i życzliwej oceny ulepszeń nauczania matematyki. Jest faktem, że pewne ugrupowania matematyków spostrzegły właściwy moment i usilnie, z najlepszymi zamiarami pracują nad wykorzystaniem tego. Byłoby to jednak tragiczne, gdyby ta złota okazja została zmarnowana i program nauczania skierowany na niewłaściwe tory. Na nieszczęście, istnieją współcześnie czynniki i siły, które mogą doprowadzić na błędną

[9] W 1978 r. metodyczki edukacji początkowej pytały mnie w Manili na Filipinach, czy uczniowie w I czy II klasie muszą koniecznie uczyć się systemu dwójkowego, bowiem tak im to wmawiali ochotnicy z *Peace Corps*, organizacji powołanej przez prezydenta USA Johna Kennedy'ego. Byli to najczęściej absolwenci *college*, którzy po trzymiesięcznym przeszkoleniu jechali, zazwyczaj na dwa lata, do wybranego kraju służyć miejscowym swoją wiedzą. Uderzył mnie kontrast między abstrakcją systemu dwójkowego a poziomem dzieci, które idąc do szkoły na ogół nie znały nawet angielskiego, języka, w którym prowadzona była nauka szkolna (w domu mówiły bądź ogólnym językiem *tagalog* bądź innym z setki języków lokalnych). Dopiero później jako język nauczania początkowego wprowadzono na Filipinach tagalog.

[10] Pouczające uwagi o *New Math* i o *Back to Basics* sformułował Peter Hilton (1982).

[11] Memorandum to (Ahlfors et al. 1963) podpisali dwaj byli prezesi *American Mathematical Society*: Marston Morse i Deane Montgomery oraz dwaj późniejsi: Lipman Bers i Peter Lax, a nadto kilkudziesięciu matematyków, m.in. Richard Courant, H.S.M. Coxeter, George Polya, André Weil (jeden z wczesnych liderów grupy Bourbakiego) oraz emigranci z Polski: Mark Kac i Jerzy Spława-Neyman. Inicjatorzy memorandum nie starali się zebrać wielu podpisów. Tekst ten otrzymał – dzięki swym rozlicznym znajomościom – w powielonej wersji Marceli Stark, redaktor Wiadomości Matematycznych i natychmiast zdecydował się opublikować polski przekład. Oryginalny tekst *The Mathematics Curriculum of the High School* ukazał się w The American Mathematical Monthly 69(3), 1962, s. 189-193.

drogę. [. . .] Matematycy mogą nieświadomie uważać, że wszyscy młodzi ludzie powinni lubić to, co lubią współcześni matematycy, lub że godni starań są tylko ci studenci, którzy zostaną zawodowymi matematykami. Fakt, że obecnie należy nauczać matematyki o wiele więcej niż w przeszłości, może spowodować, że zażądamy pewnych skrótów, które mogą przynieść więcej szkód niż pożytku. [. . .]

1. Dla kogo? Program nauczania matematyki w liceum powinien zaspakajać potrzeby wszystkich studentów: dawać podstawowe wykształcenie ogółowi studentów i jednocześnie dać zawodowe przygotowanie do przyszłej pracy osobom korzystającym z matematyki: inżynierom i oraz uczonym. Należy wziąć pod uwagę zarówno nauki fizyczne, które leżą u podstaw naszej technologicznej cywilizacji, jak i nauki humanistyczne, które w przyszłości mogą potrzebować więcej matematyki. [. . .]

2. „Wiedzieć znaczy działać”. W matematyce wiedzą posiadającą jakąkolwiek wartość nie jest nigdy gromadzenie wiadomości, ale „wiedzieć jak”. [. . .] Dlatego wprowadzanie nowych pojęć bez dostatecznej znajomości konkretnych faktów, wprowadzenie pojęć unifikujących tam, gdzie nie ma potrzebnego doświadczenia, wreszcie bawienie się wprowadzanymi pojęciami bez konkretnych zastosowań, które mogłyby mobilizować studentów, jest gorzej niż bezużyteczne: przedwczesna formalizacja może prowadzić do jałowości. [...]

3. Matematyka a nauka. W swym znaczeniu kulturalnym, jak i w swych zastosowaniach matematyka jest powiązana z innymi naukami, a inne nauki z nią; matematyka jest ich językiem i ich istotnym narzędziem. Odseparowana od innych nauk matematyka traci jedno ze swoich najważniejszych źródeł pobudzających zainteresowanie i swe uzasadnienie.

4. Podejście indukcyjne i formalny dowód. Matematyczne myślenie nie jest tylko rozumowaniem dedukcyjnym; nie składa się ono tylko z formalnych dowodów. [. . .] w rzeczywistości, bez pewnego doświadczenia z takimi „nieformalnymi” procesami myślowymi student nie może rozumieć prawdziwej roli ścisłego, formalnego dowodu, który Hadamard tak dobrze scharakteryzował: „Celem ścisłości matematycznej jest utwierdzenie i usankcjonowanie zdobyczy intuicji i nigdy nie miała ona innego celu”. Jest kilka stopni ścisłości. Student powinien nauczyć się oceniać, znajdować i krytykować dowody na poziomie odpowiadającym jego wiadomościom i doświadczeniu. Pchnięty zbyt wcześnie do zbyt formalnego poziomu mógłby się zniechęcić i stracić odwagę. Co więcej, wyczucie ścisłości może być wpojone o wiele lepiej przez dawanie przykładów, w których dowód rozstrzyga prawdziwe trudności niż przez niekończące się powtarzanie i rozszczepianie rzeczy trywialnych.

5. Metoda genetyczna. [. . .] To może sugerować ogólną zasadę: najlepszym sposobem kierowania rozwojem umysłowym jednostki jest pozwalać mu odtworzyć umysłowy rozwój ludzkości. [. . .] Ta genetyczna

> zasada pozwoli nam uniknąć pospolitego zamieszania: Jeśli A logicznie poprzedza B w pewnym systemie, to mimo wszystko może być usprawiedliwione nauczanie B przed A, zwłaszcza jeśli B poprzedza A historycznie. [...]
>
> **6. Matematyka „tradycyjna".** Nauczanie matematyki w szkołach niższych i średnich pozostaje daleko w tyle za wymaganiami dzisiejszego dnia i wymaga istotnych ulepszeń: z pełnym przekonaniem podpisujemy się pod tą powszechnie przyjętą opinią. Nie powinno się jednak bezkrytycznie przyjmować często cytowanego twierdzenia, że przedmioty nauczane w szkole średniej są przestarzałe; należy to szczegółowo rozpatrzyć. [...]
>
> **7. Matematyka „nowoczesna"**. Z uwagi na brak spójności między poszczególnymi częściami obecnego programu będzie dobrą radą dla grup pracujących nad nowym programem, by starały się o wprowadzenie do niego ujednolicających ogólnych pojęć. Uważamy także, że rozsądne używanie pojęcia zbioru i języka oraz pojęć abstrakcyjnej algebry może wnieść więcej spójności i jednolitości do programu licealnego. Jednakże ducha współczesnej matematyki nie można wpoić jedynie przez posługiwanie się jej terminologią. Zgodnie z naszymi zasadami pragniemy, aby wprowadzenie nowych terminów i pojęć było poprzedzone dostatecznie konkretnym przygotowaniem i żeby po nim następowały istotne i pobudzające do myślenia zastosowania, a nie jałowy i nieciekawy materiał [...] (Ahlfors at al., 1963)

Apel ten nie został jednak wystarczająco nagłośniony i nie przebił się do publicznej świadomości. Po spektakularnej porażce ruchu *New Math*, po dziesięcioleciu *Back to basics* na następny okres wybrano hasło: *Problem solving.* Zarazem zaczęły przebijać się idee nauczania opartego na pewnych wersjach konstruktywizmu. W roku 1994 władze stanu Kalifornia zatwierdziły nowe programy akcentujące potrzebę niezależności myślenia i kreatywności dzieci. Jednakże w skali masowej, przy behawiorystycznie myślących nauczycielach nie mogło to dać oczekiwanych efektów i w wielu szkołach doprowadziło do chaosu. Efektem tego były głośne *Math Wars* między przeciwnikami nowej reformy i jej obrońcami[12]. Jednym z powtarzanych żądań zwolenników tradycyjnego nauczania było to, by reformatorzy pokazali wyniki badań naukowych świadczących o poprawie wyników dzięki stosowaniu

[12]W ruchu rodziców protestujących przeciwko tej konstruktywistycznej reformie i domagających się powrotu do bardziej tradycyjnego nauczania było sporo matematyków. Jedną z głośnych liderek tego ruchu była matematyczka Abigail Thompson z *University of California* w Davis, mająca wybitne osiągnięcia w teorii węzłów i w topologii rozmaitości o wymiarach 3 i 4. Zaczęła działać, gdy się zorientowała, że jej córka chodząca do I klasy nic nie uczy się z matematyki. Wcześniej, wiosną 1990 słuchałem na konferencji wystąpienia dydaktyka matematyki Juliana Weissglassa z *UC Santa Barbara* zatytułowanego *Dlaczego nasza najbliższa reforma się nie powiedzie?* Stwierdził, że projekt reformy nie wyszedł od nauczycieli, nie ma ich poparcia, będzie to narzucone odgórnie przez władze oświatowe Kaliforni, a więc nie ma szans powodzenia.

nowych metod, a ci z kolei argumentowali, że tradycyjnym testowaniem, nastawionym na behawiorystyczne wyćwiczanie, nie można wykazać, że uczeń lepiej rozumie arytmetykę ani tym bardziej ukazać jego twórczego myślenia[13].

Zupełnie inaczej reforma przebiegała we Francji. Tam przed rokiem 1939 powstała grupa znakomitych matematyków, która postanowiła napisać – pod pseudonimem Nicolas Bourbaki – w pełni ścisły, wielotomowy podręcznik przedstawiający w sposób jednolity wszystkie ważne działy matematyki, poczynając od teorii mnogości w pierwszym tomie[14]. Realizacja tego trwała kilkadziesiąt lat. Tytuł *Éléments de mathématique* nawiązywał wprost do tytułu *Éléments* Euklidesa. Nie ma tam jednak w ogóle geometrii elementarnej z wyjątkiem tego, co można przedstawić w języku algebry liniowej[15]. Nie ma też teorii prawdopobieństwa (na Międzynarodowym Kongresie ICM w Nicei w 1970 r., który organizował czołowy bourbakista Jean Dieudonné, zgłoszone referaty z teorii prawdopobieństwa włączono w jeden dział z teorią miary i całki). Nigdzie w dziele Bourbakiego nie ma wzmianki o stosowaniu matematyki i jej związkach ze światem.

W dziele tym z żelazną konsekwencją stosowano zasadę, by zawsze najpierw wprowadzać pojęcia ogólniejsze, a potem ich szczególne przypadki. Nigdzie więc nie pojawia się uogólnienie wcześniejszego pojęcia. Tak więc czytelnik – jeżeli by się trzymał kolejności wyznaczonej przez autorów – wcześniej poznaje teorię przestrzeni jednostajnych (wspólne uogólnienie przestrzeni metrycznych i grup topologicznych) i bardzo ogólne twierdzenie o uzupełnianiu przestrzeni jednostajnych, a dopiero potem – jako szczególny przypadek – poznaje uzupełnienie $\mathbb{R}$ zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych, poznaje liczby rzeczywiste i dopiero wtedy może pojawić się $\sqrt{2}$. Nikt zresztą tego dzieła tak nie studiuje; korzysta się ze streszczeń w wyodrębnionych *Fascicules de résultats*.

W tle dzieła Bourbakiego tkwiło ich przekonanie (które zdołali przekazać wielu innym matematykom), że ich system jednej, jednolitej *la mathématique* – opartej na teorii mnogości, systemach aksjomatycznych i wyodrębnionych strukturach – jest nie tylko produktem rozwoju historycznego, ale jest też produktem finalnym, doskonałym, który w swej głównej części nie będzie podlegał już dalszym zmianom.

Bourbakiści rozpropagowali bardzo ważne pojęcie struktur w matematyce, dzieląc je na struktury algebraiczne, porządkowe i topologiczne, a także struktury mieszane, łączące dwa lub trzy rodzaje struktur, jak np. grupy topologiczne. Opracowali też, w języku teorii mnogości, bardzo ogólną teorię struktur. Niestety, jeśli ktoś chce poznać formalną definicję struktury, będzie w kłopocie. Kolejne definicje ciągną się przez dziesięć niełatwych do rozgryzienia stron (Bourbaki,

[13] Wyważony, zbiorczy opis przebiegu *Math Wars* jest w (Jackson, 1997), a głęboka analiza związanych z tym problemów dydaktycznych w (Kilpatrick, 2001).

[14] Popularny zarys idei dzieła Bourbakiego i historii jego powstawania, z podkreśleniem jego wagi i zalet, napisał Henri Cartan, jeden z założycieli grupy Bourbakiego i jeden ze współautorów tego dzieła (Cartan, 1963). Z późniejszej perspektywy opisuje to (Corry, 2008).

[15] „Tendencja do algebraizacji nauczania ze szkodą dla geometrii pogłębia się jeszcze bardziej w nauczaniu uniwersyteckim” (Thom, 1974b, s.114). Podobna idea przyświecała w Polsce (ok. 1964 r.) ministerialnej komisji opracowującej zasadniczo zmieniony program uniwersyteckich studiów matematycznych. Zlikwidowano na studiach przedmiot *Geometria analityczna*, włączając geometrię do algebry liniowej; w efekcie u części studentów w pamięci zostają potem jedynie fragmenty algebry.

1957, s. 9–22), po których przeczytaniu czytelnik nadal nie wie, w którym miejscu znajduje się odpowiedź na pytanie, co to jest struktura. Co więcej, okazuje się, że z tych zawiłych definicji nigdzie dalej w tym wielotomowym dziele się nie korzysta. Są właściwie zbędne; czytelnik z konieczności opiera się intuicyjnym rozumieniu, o co chodzi, a potem w kolejnych tomach są już normalnie zdefiniowane struktury poszczególnych typów. Nie ma też kryterium pozwalającego przy tej ogólnej definicji odróżnić – przez analizę formalną typu zapisu warunków nałożonych na daną strukturę – np. struktury topologiczne od innych; to też opiera się tu na ogólnym sensie, na praktyce.

Należy rozróżniać dwie kwestie: jedna to wielkie osiągnięcia naukowe ludzi identyfikowanych z grupą Bourbakiego (w tym Alexandre Grothendieck i Jean-Pierre Serre, zaliczani do najwybitniejszych matematyków świata), a druga to ocena wielotomowego dzieła *Éléments de mathématique*, które ukazało wyraźne, że w praktyce nie da się sensownie i systematycznie przedstawić całej matematyki w sposób konsekwentnie dedukcyjny, w języku teorii mnogości i to tak, by pojęcia ogólniejsze zawsze poprzedzały bardziej szczegółowe.

Niezależnie od dzieła grupy Bourbakiego, trochę na uboczu ich programu, choć pod wyraźnym wpływem ich nastawienia do matematyki, rozpoczęto w Europie modernizację programów nauczania szkolnego, z oczywistym przesłaniem, że należy uwzględnić zmiany, jakie zaszły w matematyce od XIX wieku. Zorganizowano szereg międzynarodowych spotkań poświęconych problemom programów i metod nauczania matematyki[16].

W 1961 r. w Brukseli odbyła się konferencja *Nauczanie geometrii w jednolitej matematyce współczesnej.* Dieudonné i Georges Papy przedstawili tam swe koncepcje nauczania geometrii, które wytyczyły kierunek przyszłych reform w szkołach średnich kontynentalnej Europy[17]. Dominowały trzy tendencje: opieranie nauczania na pojęciu zbioru, nacisk na metodę aksjomatyczną, wczesne wprowadzenie przestrzeni wektorowej. Hans Freudenthal wyraził wtedy zdecydowane zastrzeżenia zarówno do zbyt wczesnego wprowadzania ogólnych struktur, gdy uczeń zna zbyt mało przykładów, jak i do przesady w stosowaniu metody aksjomatycznej.

W szczytowym zapale reform głoszono szczególnie szkodliwe hasło: *zapomnijcie o tym, czego was wcześniej z matematyki uczono w szkole, bo uczono was źle*; matematykę trzeba teraz od początku opierać na pojęciu zbioru i na ścisłych rozumowaniach, wolnych od nieścisłości, które utrudniają uczniom rozumienie matematyki. Dopiero po latach zrozumiano, że precyzyjniejsze przedstawienie jakiegoś fragmentu matematyki bywa dla ucznia utrudnieniem, nieraz poważnym[18].

Na to nakładały się inne hasła: matematyka jest wszędzie, coraz ważniejsza; należy uczyć matematyki odpowiadającej naszym czasom; należy zreformować metody nauczania.

[16]Przegląd rozmaitych koncepcji reform nauczania matematyki na świecie w dwudziestoleciu 1960–1980 znajduje się w (Krygowska, 1981).

[17]W nazwie tej konferencji, omówionej w (Krygowska, 1962), użyto słów *la mathématique unitaire d'aujourd'hui*, dosłownie „dzisiejszej"; widać, że *nazwa mathématique moderne* jeszcze nie dominowała. Słowo *unitaire* znaczy: jednolity, dążący do jedności.

[18]Podobnie rozpowszechnione w polskiej szkole domaganie się od ucznia: *powiedz to pełnym zdaniem* nieraz wybija go z myślenia.

W owych latach dominowały pozytywne opisy założeń owych reform. W książce, którą redagowali wybitni, znani w międzynarodowym środowisku dydaktycy Belg Willy Servais i Węgier Tamas Varga, opisane są zasady owej fali reform. Zaczynało się to od słusznej krytyki wcześniejszych praktyk szkolnych, było też podłoże teoretyczne i odwołanie do znanych prac badawczych Piageta, Wygotskiego i Brunera (Servais, Varga, 1971).

Ok. 1968 r. do liceów francuskich wprowadzono nowe programy i podręczniki. Bardzo krytycznie wypowiedział się o nich wybitny matematyk Jean Leray, członek francuskiej *Académie des sciences* i kilku innych akademii (wśród nich PAN), znany ze swych twierdzeń uzyskanych wspólnie z lwowskim matematykiem Juliuszem Schauderem. Oprócz ogólnego raportu o reformie, podał on zadziwiające przykłady jej realizacji, cytując wybrane fragmenty. Z podręcznika dla zwykłej klasy maturalnej, który napisał czołowy reformator André Revuz (uczeń G. Choqueta), wybrał m.in. kuriozalną definicję: „Zbiorem skończonym (niepustym) E nazywamy obraz odcinka $[1, \alpha]$ zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych dany przez odwzorowanie bijektywne". Argumenty Leraya wykazały wyraźnie, że konsekwentne trzymanie się ogólnych pojęć mnogościowych nie jest sensowne w nauczaniu szkolnym. Z innej książki cytuje on ćwiczenie „Przedstawić, za pomocą poznanych znaków, zbiór prosiąt, które mają skrzydła" (Leray, 1974).

René Thom podał przykład wykorzystywania algebry Boole'a w zdaniach typu: „Paryżanie łysi lub bogaci" (Thom, 1974b, 123). Jest to przykład mechanicznego stosowania elementów rachunku zdań do sytuacji wziętych z życia. Rzecz w tym, że określenie „Paryżanie łysi i bogaci" (koniunkcja warunków) ma sens (to do nich adresuje się reklamy środków na porost włosów itp.), a to drugie (z „lub") żadnego życiowego sensu nie ma, a więc jako przykład dydaktyczny jest to chybiona gra słów. Thom pokazał przykłady wskazujące, że – wobec bogactwa semantycznego zdań języka potocznego – stosowanie do nich formalizmu logiki matematycznej często prowadzi do naciąganych, sztucznych wypowiedzi, prymitywnych w zestawieniu z możliwościami zwykłego języka[19].

W polskich podręcznikach takiego stosowania teorii mnogości prawie nie było, jakkolwiek w publikacjach metodycznych można było znaleźć bezsensowne przykłady, jak „zbiór gwiazd na niebie" czy „zbiór ziarnek piasku na plaży w Sopocie". Niektórzy zaś twierdzili, że prawidłowe ukształtowanie ogólnego pojęcia zbioru wymaga, by dawać uczniom klas I–III również przykłady, w których nie da się znaleźć jednej wspólnej cechy charakteryzującej wymienione elementy tego zbioru. Próby z uczniami ukazały jednak fiasko takiego myślenia.

[19] Na mnie wielkie wrażenie zrobił przykład zbioru, który znalazłem w ówczesnym francuskim podręczniku dla liceum. Pamiętam go do dziś. Napisane było: {6, Louis XIV}. Miał to być zbiór, którego jedynymi elementami są: liczba 6 i król Francji Ludwik XIV. Czułem tu wyraźny dysonans. Zastanawiałem się bardzo długo, czym jest ten drugi element. Trudność ta nie ujawniłaby się, gdyby chodziło np. o zbiór królów Francji czy o inny zbiór osób. Oto jeden z argumentów, jaki można podać na obronę tego przykładu: jeżeli uznamy, że zbiór jednoelementowy {6} ma sens i zbiór jednoelementowy {Louis XIV} też ma sens, to zawsze można utworzyć ich sumę mnogościową {6, Louis XIV}. W końcu kwestię tę wyjaśniło mi stwierdzenie: „Rozróżnianie różnych dziedzin semantycznych jest podstawową zasadą poprawnego myślenia: mieszanie tych dziedzin ma swoją nazwę: *delirium*" (Thom 1974b: 123).

2. Rola Zofii Krygowskiej w unowocześnianiu dydaktyki matematyki w Polsce

Zacznijmy od czasu zaborów. Pod koniec XIX wieku w wielu krajach krytykowano ówczesne metody nauczania matematyki, głównie w szkole średniej. Podejmowano różne próby, rozwinął się ruch reformatorski. W 1905 r. grupa warszawskich nauczycieli matematyki i fizyki wyszła z inicjatywą powołania Koła Matematyczno-Fizycznego, które m.in. opracowało nowe programy nauczania, a w następnym roku opublikowany został program komisji Towarzystw Szkół Średnich i Wyższych w Krakowie pt. *Nasza szkoła średnia, krytyka jej podstaw i konieczność reformy*. Nad tymi kwestiami dyskutowano też we Lwowie (Dubiel, 1997, s. 90–94).

Gdy w 1908 w Rzymie obradował Czwarty Międzynarodowy Kongres Matematyków, zadecydowano o powstaniu poświęconej kwestiom nauczania *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*, a Felix Klein został jej długoletnim przewodniczącym[20]. Jednym z zadań CIEM było stworzenie raportów szczegółowo opisujących praktykę nauczania matematyki w poszczególnych krajach. Chociaż Polski nie było na mapie świata, polscy matematycy zdołali napisać swój osobny raport, który został publikowany w piśmie *L'Enseignement Mathématique* w lipcu 1911. Oficjalnie była to część raportu Rosji.

Po odzyskaniu niepodległości Polacy musieli ujednolicić trzy systemy szkolnictwa, a także programy. We współpracy z CIEM polscy matematycy na konferencji w Zurychu (1932) przedłożyli raport o sposobach przygotowywania polskich nauczycieli. W Krakowie Witold Wilkosz zajmował się kwestią unowocześnienia nauczania matematyki w szkole średniej; m.in. żywa była kwestia logicznej precyzji w podręcznikach oraz zachowania równowagi między abstrakcyjnymi strukturami a ich konkretyzacjami. Otto Nikodym twierdził, że elementarna szkolna matematyka – analizowana ze współczesnego punktu widzenia – jest pełna błędów; współczesna matematyka powinna być widziana jako renesans myśli greckiej, z metodą aksjomatyczną i rozumowaniami opartymi na wyraźnej logice (Nikodym, 1930). Wacław Sierpiński i Stefan Banach napisali podręczniki dla uczniów w wieku 11–17 lat.

Podczas okupacji niemieckiej nauczanie średnie i wyższe było zakazane (z pewnymi wyjątkami, np. w latach 1942–1944 działała w Warszawie za zgodą i pod nadzorem Niemców zawodowa Państwowa Wyższa Szkoła Techniczna, w której wykładał m.in. Stefan Straszewicz). Część szkół podstawowych i szkół zawodowych działała, ale musiano zredukować programy do wiedzy praktycznej. Równocześnie, od samego początku, rozwinął się masowy system tajnego nauczania, w małych grupkach do 5 lub 10 osób, w prywatnych mieszkaniach lub pod przykrywką jakiejś oficjalnie dozwolonej działalności. Nigdzie w okupowanej Europie

[20] Komisja ta (w skrócie CIEM) zmagała się po I Wojnie Światowej m.in. z problemem wrogości Francji i innych państw do Niemiec jako winowajcy doprowadzania do wojny i wyniszczenia Europy. W 1954 r. wprowadzono obecną jej nazwę *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) i obecny statut. Jej historię, a w szczególności owe raporty, których pisanie kontynuowano jeszcze wówczas, gdy na froncie walczyli przeciwko sobie żołnierze opracowujących je państw, opisał (Howson, 1985). ICMI m.in. organizuje co 4 lata światowy kongres poświęcony badaniom dotyczącym edukacji matematycznej (dotąd było ich 13).

nie miało to takiej skali. Szacuje się, że około miliona polskich dzieci uczyło się na tajnych kompletach szkół powszechnych, ok. 100,000 w gimnazjach i liceach, a nadto 10,000 w szkołach wyższych.

Po 1945 r. kontakty Polaków z zagranicą były bardzo ograniczone. Nawet aby pójść na Rysy, trzeba było wyrobić na milicji przepustkę, bo szczyt leży na samej granicy. Na Zachód jeździli nieliczni. Po odwilży 1956 r. podróże stały się łatwiejsze, ale do trudności paszportowych dochodziły finansowe. W świetle tego trzeba oceniać wszelkie wysiłki zmierzające do modernizacji nauczania.

Czołową postacią polskiej dydaktyki matematyki w II połowie XX wieku była niewątpliwie Zofia Krygowska[21]. Jej zasługi organizacyjne i naukowe zostały opisane w wielu publikacjach[22]. Wychowała się w Zakopanem i góry były jej zawsze bardzo bliskie, uprawiała też wspinaczkę. Liceum zaszczepiło jej zamiłowania humanistyczne i dobrą znajomość francuskiego i niemieckiego. Czytała w oryginale *Der Zauberberg* (*Czarodziejską górę*) Tomasza Manna, lekturę niełatwą nawet w polskim przekładzie, oraz *Fausta* Goethego. Po studiach matematycznych na Uniwersytecie Jagiellońskim została w 1927 r. nauczycielką. Uczyła wszystkie klasy (od klasy I szkoły powszechnej po maturalną).

W czasie wojny była kurierką tajnych władz oświatowych. Przykrywką była praca urzędniczki w firmie drzewnej, jeździła kontrolować tartaki na Podhalu. Woziła z Krakowa do Nowego Targu, Makowa, Jordanowa, Ochotnicy, Rabki, Zakopanego podręczniki i inne materiały, nosiła je w plecaku dla nauczycieli i uczniów, hospitowała, doradzała, egzaminowała. Po latach wspominała: „Ja się bardzo bałam. To był koszmar, mi się śniło w nocy” (Krygowska, 1985).

Po wojnie pracowała w Ośrodku Metodycznym Matematyki w Krakowie, a od roku 1949 w WSP. W 1962 Uniwersytet Jagielloński nadał jej stopień doktora za pracę *O granicach ścisłości w nauczaniu geometrii elementarnej*. Zajmowała się kwestiami kształcenia nauczycieli matematyki, rozwijaniem dydaktyki matematyki tak, aby stała się dziedziną nauki, wykorzystaniem zdobyczy psychologii rozwojowej; dyskutowała i przygotowywała reformę programów. W 1958 r. osiągnęła to, że WSP utworzyło Katedrę Metodyki Nauczania Matematyki, pierwszą taką w Polsce. Istotne było to, że powstała ona na Wydziale Matematyki i Fizyki, a nie na Pedagogicznym.

W 1956 r. nastąpił przełom w jej życiu. Wraz ze Stefanem Straszewiczem była członkiem oficjalnej polskiej delegacji na wielką konferencję zorganizowaną przez Biuro Wychowania UNESCO w Genewie, którego dyrektorem był psycholog Jean Piaget. Oprócz oficjalnych wystąpień (na szczeblu rządowym), przedstawiających systemy oświaty w poszczególnych krajach, była tam też wyodrębniona sesja dotycząca nauczania matematyki (przedmiotu uważanego za najbardziej konserwatywny ze wszystkich). Piaget włączył się w owe dyskusje i przedstawił m.in. swój strukturalistyczny pogląd, że z psychologicznego punktu widzenia trzy *struktury macierzyste* matematyki: algebraiczne, porządkowe i topologiczne, stanowiące

[21] W akcie urodzenia i w dowodzie osobistym miała wpisane: Anna Zofia, ale w swych polskich publikacjach zawsze używała tylko drugiego imienia, a imieniny obchodziła 15 maja, na Zofię. W czasie podróży zagranicznych określano ją tak, jak było wpisane w paszporcie; również w późniejszych polskich tekstach o niej pojawiło się podwójne imię.

[22] Główne źródła: (Nowecki, 1984; Krygowska, 1985; Nowecki, 1990a, 1990b; Siwek, 2004; Ciosek, 2005).

fundament koncepcji Bourbakiego, ujawniają się wcześnie w rozwoju operacji myślowych u dziecka, toteż mogą i powinny być podstawą nowego układu programów szkolnych (Krygowska, 1957; Piaget 1970, 50–55).

Dzięki owej konferencji, która odbyła się w czasie zbliżającej się odwilży politycznej w Polsce, Krygowska nawiązała długoletnie kontakty z dydaktykami matematyki posługującymi się językiem francuskim lub niemieckim; szczególnie zaprzyjaźnieni z nią byli Willy Servais, Hans Freudenthal, Hans-Georg Steiner, Tamas Varga. Została członkiem CIEAEM, *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Międzynarodowej Komisji Studiowania i Ulepszania Matematyki, powstałej w latach 1950–1952. W pierwszym okresie (do 1960) główną rolę w tej komisji grały trzy osoby: przewodniczący, wybitny matematyk Gustave Choquet, akcentujący podstawową rolę, jaką powinny w nauczaniu pełnić struktury współczesnej matematyki, wiceprzewodniczący Piaget oraz sekretarz, którym był pedagog Caleb Gattegno, zajmujący się powiązaniem ogólnych idei matematyczno-psychologicznych z kwestiami dydaktycznymi[23].

Poglądy Piageta, Choqueta i czołowego reformatora francuskiego André Lichnerowicza wpłynęły zasadniczo na zdecydowanie strukturalistyczne nastawienie Krygowskiej do matematyki szkolnej, które uważała za naturalne, proste i nietrudne. Opisała to następująco:

> Skromny materiał nauczania objęty programem szkolnym daje wiele okazji do ukazania uczniom podstawowych struktur algebraicznych, do ujawnienia analogii i izomorfizmów między różnymi izolowanymi w pojęciu ucznia fragmentami matematyki szkolnej, i to w sposób naturalny, prosty i dostępny młodzieży. Umożliwia zburzenie sztywnych przegród dzielących poszczególne gałęzie matematyki elementarnej i pokazanie uczniom, że istnieją pewne pojęcia, które mogą interweniować w sposób szczególnie interesujący w dziedzinach całkowicie różnych. Można uczniom udostępnić łatwo ogólne pojęcie działania, pokazać przykłady różnych działań „niezwykłych", nieprzemiennych lub niemających własności łączności. Pojęciami operacji, operacji odwrotnej, grupy, pierścienia, ciała, relacji równoważnościowej, relacji porządku, transformacji, niezmiennika, izomorfizmu przeniknięty jest materiał nauczania w szkole w tym stopniu, że pomijanie tych pojęć jest czymś zupełnie nienaturalnym, jest niepotrzebną zasłoną, odgradzającą myśl ucznia od współczesnej myśli matematycznej. (Krygowska, 1959, s. 18; cyt. za: Ciesielska, Szczepański, 2017, s. 103)

[23] Warto zwrócić uwagę na zasadniczą różnicę statusu formalnego ICMI i CIEAEM. Ta pierwsza komisja jest oficjalnie powoływana przez Międzynarodową Unię Matematyczną (IMU). Członkami ICMI są państwa (jednym z nich jest Polska), podczas gdy członkami CIEAEM są pojedynczy ludzie.

W drugim okresie 1960–1970 CIEAEM była zdominowana przez swego kolejnego przewodniczącego, którym był wspomniany już Papy, profesor uniwersytetu w Brukseli. Domagał się on programów silnie nastawionych na akcentowanie struktur algebraicznych, na modernizację geometrii i na zdecydowaną zmianę edukacji początkowej (Castelnuovo, 1981).

Czternasta konferencja CIEAEM odbyła się w Krakowie w sierpniu 1960 r. Wyraźny był silny wpływ osobowości Papy'ego, który lansował tam swą ideę *La mathématique de base*. Objaśnił ją twierdząc, że w każdej epoce historii matematyki pewien ograniczony zasób pojęć i relacji pozwala na rekonstrukcję całej jej budowy. To one tworzą *matematykę podstawową* danej epoki i to jej powinna się uczyć młodzież. Drugą jego tezą było to, że o wiele łatwiej jest uczyć tego umysły świeże niż umysły już kształcone, ale nieraz obarczone złymi nawykami (Krygowska, 1961; Korczowski, 1961).

Wielu uczestnikom wbił się w pamięć pokaz zajęć, które Papy urządził z dziećmi zebranymi *ad hoc*. Z powodu wakacji szkoły były zamknięte, ale natrafiono na grupę dzieci w wieku 8 do 12 lat i przyprowadzono je na konferencję. Papy mówił po francusku, ktoś przekładał to dzieciom na polski; zdarzały się nieporozumienia. Tematem były *relacje*, traktowane wówczas jako temat uniwersytecki. Sposób prowadzenia zajęć zbliżony był do tego, co szczegółowo opisane jest w książce (Frédérique, Papy, 1968)[24]. Krakowskie dzieci, znacznie starsze od belgijskich, najpierw poproszono, by przedstawiły jakoś siebie na tablicy. Po zastanowieniu się, stawiały znaczki $\times$, a po pytaniu, jak stwierdzą, który znaczek kogo przedstawia, powybierały sobie numery. W jednym z dalszych kroków dzieci miały dorysować znaczki swoich sióstr i braci, a spytane, jak zaznaczyć te relacje, dorysowały strzałki oznaczające: „Ty jesteś moją siostrą" i inne dla braci. Wtedy Papy narysował swój osobny graf reprezentujący jakieś inne dzieci i strzałki symbolizujące braci i siostry. Kluczowe było pytanie, jakie jeszcze strzałki można na pewno dorysować, nie znając tych dzieci. Dzieci wywiązały się z tego dobrze, np. stwierdziły, że w przypadku, gdy czyjś brat ma brata, można dorysować trzecią strzałkę (naukowo jest to przechodniość relacji), ale w przeciwną stronę pewna jest tylko jedna. Słuchający tego nauczyciele byli pod wrażeniem pokazu, co przyczyniło się do pozytywnej recepcji idei Papy'ego w Krakowie.

Idee jego przez wiele lat wyraźnie wpływały na stosunek Krygowskiej do kwestii dydaktycznych. Szczególnie wyraźny był wpływ czterech jego idei:

- nacisk kładziony na rolę podstawowych struktur matematycznych w nauczaniu szkolnym,
- opieranie całej matematyki szkolnej na pojęciu zbioru,
- bardzo wczesne rozpoczynanie od *mathématique de base*,

[24] W książce tej, bogato ilustrowanej kolorowymi rysunkami z czterech kolejnych lekcji z dziećmi 6-letnimi, jako autorzy podani są: Frédérique i Papy. Wiadomo było, że kryła się za tym Frédérique Papy-Lenger i jej mąż Georges Papy. Działała ona aktywnie już w pierwszym etapie reform od 1952 r. (De Bock, Vanpaemel, 2019; Błaszczyk et al., 2019, s. 257–258). Drugą książką z tego cyklu jest (Frédérique, 1970). Obecnie w angielskiej Wikipedii znajduje się dość długi artykuł *Frédérique Lenger*; w którym jest też wspomniany George Papy, ale osobnego artykułu o nim nie ma (we francuskiej Wikipedii każde z nich ma osobny krótki artykuł).

- propagowanie diagramów Venna i grafów jako skutecznego, niewerbalnego sposobu przekazywania dzieciom pojęć owej „matematyki podstawowej".

Krygowska tak wierzyła w wyjaśniającą moc diagramów Venna, że propagowała je nawet w sytuacji dwóch linii prostych (przecinających się lub rozłącznych); sądziła, że skuteczne jest sugerowanie uczącym się (również dzieciom z edukacji początkowej), że rysunek pętli (czy raczej jej wnętrze) dobrze symbolizuje linię prostą jako zbiór punktów (Krygowska, 1977b, s. 57); dzieci jednak nie pojmowały, dlaczego prosta na tym rysunku jest zakręcona.

Równie silna była wiara w skuteczność grafów[25]. Stosowano je zarówno tam, gdzie rzeczywiście były pomocne, jak i tam, gdzie tylko zaciemniały sprawę[26].

Krygowska traktowała zbiory jako podstawę nauczania zarówno w szkole średniej (zwłaszcza w swym podręczniku geometrii, o którym będzie dalej mowa), jak i w nauczaniu początkowym. Później mawiała, że same zbiory jako takie nie są w nauczaniu specjalnie ważne, ale dostarczają świetnego języka do nauczania geometrii.

Ciekawy, a mało znany kontrprzykład do tej jej tezy podał – nieświadomie – sam Papy, w interesującej pracy (Papy, 1971). Opisuje on przykład chłopca, który – gdy klasa dostała polecenie narysowania kwadratu i rozcięcia go na cztery jednakowe części – siedział i myślał. Gdy zaintrygowany nauczyciel spytał go o to, odpowiedział: „Tylko my dwaj w tej klasie wiemy, że to się nie da wykonać". Zdumionemu nauczycielowi wyjaśnił, że jest kłopot z punktami na linii cięcia, które trzeba zaliczyć do jednej tylko części. Otóż widać tu jasno, że język teorii mnogości jest nieadekwatny do elementarnej geometrii, skoro nie można w nim wyrazić tak prostej operacji euklidesowej jak podział kwadratu na cztery przystające części[27]. Co więcej, w języku mnogościowym bardzo łatwo można udowodnić, że odcinka nie da się podzielić na dwie rozłączne przystające części, co jest jedną z najwcześniejszych konstrukcji w *Elementach* Euklidesa (nr 10 w księdze I). Ujawnia się tu podstawowy konflikt pojęciowy między ujmowaniem figur geometrycznych jako zbiorów a podejściem Euklidesa, nadal dominującym w szkole.

Strukturalistyczne nastawienie do nauczania jest widoczne w wielu wypowiedziach Krygowskiej, m.in. w kwestiach programów nauczania w klasach I–IV szkoły podstawowej, nad którymi pracowała wspólnie ze swym uczniem Henrykiem Morozem i które były eksperymentalnie wdrażane w wybranych szkołach.

[25] Frédérique Papy-Lenger lansowała – jako środek poglądowy – specjalny sposób wprowadzania strzałki jako symbolu dodawania, np. pytała uczniów: „Co liczba 4 mówi do liczby 7?". Oczekiwała odpowiedzi, że liczba 4 mówi do liczby 7: „Ty jesteś o 3 większa ode mnie". Istotny był kierunek: która liczba mówi, a która słucha. Potem liczba 7 mówiła do liczby 4: „Ty jesteś o 3 mniejsza ode mnie". Abstrahując od sztuczności mówiących liczb, warto zwrócić uwagę na to, że do wyjaśniania związku dodawania z odejmowaniem wykorzystane było porównywanie różnicowe.

[26] Na przykład równanie $18 - x = 15$ należało rozwiązywać następująco: najpierw rysowało się graf z symbolem $-x$ u góry. Po zastosowaniu działania odwrotnego pojawiało się $+x$ u dołu strzałki przy dolnej strzałce i otrzymywało się równoważne równanie $15 + x = 18$. Następnie stosowało się przemienność dodawania, by otrzymać równanie $x + 15 = 18$, które rozwiązywało się z użyciem drugiego, kolejnego grafu (Siwek, 1986, s.102). Procedura składająca się z tylu kroków była oczywiście zbyt trudna dla uczniów. Gdyby nie owa bezkrytyczna wiara w grafy, wystarczałoby spytać: Jaką liczbę należy odjąć od 18, by dostać 15?

[27] Da się to zrobić, przechodząc do klas ilorazowych (np. dzieląc przez ideał zbiorów miary zero lub w jakiś inny sposób eliminując z rozważań brzegi figur).

> Struktura pierścienia $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych jest głównym obiektem nauczania w tych klasach eksperymentalnych; studium tego jest centrum dziedziny bogatej w zadania w algebrze, w arytmetyce, w geometrii. [...] Przykłady pierścieni skończonych ułatwiają podejście do ogólnej idei działania (przykład prepojęcia). (Krygowska, 1971a, s. 103)

> Opracowany przez Z. Krygowską i autora niniejszej pracy projekt nowego programu nauczania matematyki w klasach I–IV przyjmuje jako centralny temat strukturę pierścienia liczb całkowitych. Wyniki badań eksperymentalnych wykazały niezbicie, że struktura pierścienia liczb całkowitych jest dla ucznia w wieku 7–11 lat zdecydowanie przystępniejsza, ciekawsza i bardziej kształcąca niż struktura zbioru liczb wymiernych nieujemnych. (Moroz, 1972, s. 36)

Również klocki Cuisenaire'a („liczby w kolorach"), pomyślane pierwotnie jako środek wykorzystujący bodźce wizualne, dotykowe i czucie głębokie, Krygowska widziała w kontekście struktur:

> Dla podkreślenia roli, jaką w koncepcji dydaktycznej czynnościowego nauczania odgrywa jasna koncepcja naukowa, wspomnę tu o nieco innym podejściu do elementów arytmetyki, manowicie o ujęciu opartym na tzw. materiale Cuisenaire'a. Teoretycznie wychodzimy od struktury algebraicznej arytmetyki liczb całkowitych nieujemnych, czyli półgrupy. (Krygowska, 1977a, s. 97)

Znacznie mocniej wyraził to Moroz:

> Posługując się liczbami w kolorach uczeń klasy I już w okresie przygotowawczym, ale jeszcze przed wprowadzeniem pojęcia liczby, rozwiązuje różne zadania, w trakcie których uświadamia sobie strukturę półgrupy[28]. W zbiorze liczb w kolorach dziecko odkrywa najpierw relację równoważnościową: klocki takiego samego koloru są jednakowej długości. (Moroz, 1986, s. 33)

W owych czasach wielu dydaktyków ujawniało tendencję do przypisywania obserwowanym dzieciom zawyżonego, czasem znacznie, poziomu abstrakcji[29]. Do-

[28] Uświadomienie sobie abstrakcyjnej struktury półgrupy pozostaje zapewne poza możliwością wielu maturzystów. Ponadto owo stwierdzenie jest matematycznie dyskusyjne. Półgrupa to zbiór P wraz z wyróżnionym jednym działaniem łącznym $P \times P \to P$. Aby zbiór klocków Cuisenaire'a był półgrupą z działaniem dodawania klocków, musiałby być nieskończony. Każdej parze klocków, np. o długościach 1 i 2, musi być przyporządkowany jednoznacznie określony trzeci, ich suma. Jednakże w zestawie jest wiele klocków o długości 3, nie wiadomo, który z nich miałby być tą sumą. Jedynym wyjściem jest odejście od klocków i przejście do klas równoważności.

[29] W 1972 r. obserwowałem w Sherbrooke (Kanada) badanie dzieci ok. 10–11 lat prowadzone przez pracownika *Centre de Recherche en Psychomathématiques*, którym przez wiele lat kierował Zoltan Dienes. Zaintrygowało mnie, że miało to dotyczyć *espace vectoriel*. Dzieci wykonywały ciekawie pomyślane ćwiczenia z 16 kartonikami, na których były rysunki reprezentujące wszystkie podzbiory zbioru $\{\bigcirc, \square, \triangle, +\}$. Sens tych ćwiczeń był łatwo zauważalny: chodziło o własności różnicy symetrycznej zbiorów. Wiadomo, że przy tym działaniu zbiór podzbiorów danego zbioru jest grupą (rzędu 2). Było to interpretowane jako przestrzeń wektorowa na ciałem dwuelementowym $\{0, 1\}$.

tyczy to również Piageta, choć to raczej jego wyważone wypowiedzi były nadinterpretowywane przez dydaktyków. Pod koniec życia zmodyfikował on swe podejście, o czym świadczy ważna wypowiedź: „długi do pokonania jest dystans pomiędzy spontanicznym, nieświadomym użyciem struktur a ich uświadomieniem sobie" (Piaget, Garcia, 1989, s. 25)[30].

Jesienią 1964 r. na ogólnopolskiej konferencji Krygowska przedstawiła wyraźnie sformułowany program traktowania dydaktyki matematyki jako oddzielnej dyscypliny naukowej, granicznej – na styku matematyki, dydaktyki ogólnej, psychologii, socjologii, filozofii. Była to inspirująca wizja, a jej argumenty zrobiły wrażenie na uczestnikach.

Na tejże konferencji wystąpił Zdzisław Opial, matematyk z UJ. Miał on znane specjalistom na całym świecie osiągnięcia m.in. w teorii równań różniczkowych zwyczajnych, zajmował się też historią matematyki, jej popularyzacją i problemami dydaktyki[31]. Rok akademicki 1959/1960 spędził w Paryżu. Po powrocie unowocześnił wykład algebry i napisał pierwszy polski podręcznik algebry uniwersyteckiej w pełni opartej na teorii mnogości. Jest tam definicja struktury, ale nie struktury w ogóle, lecz jedynie bardzo ogólne pojęcie struktury algebraicznej. We wstępie do książki napisał on:

> Zaznaczmy na koniec, że związane z ryzykiem podjętego zadania nowe terminy: *przeabstraholować* – na oznaczenie przesadnej skłonności do abstrakcyjnych ujęć, *homomorfinizm* – na oznaczenie nałogu ujmowania większości zagadnień w kategoriach izo- i homomorfizmów zostały wymyślone nie przez złośliwych obserwatorów, a przez samego autora, któremu nieobce były wątpliwości i wahania. (Opial, 1964)

Na owej konferencji i w późniejszym artykule wypowiedzi Opiala były znacznie bardziej kategoryczne:

> [...] niemożliwy jest kompromis między matematyką drugiej połowy XX wieku i matematyką dziewiętnastowieczną. Wobec tego jest także niemożliwy kompromis między matematyką współczesną i dzisiejszą matematyką szkolną. [...] dlatego też matematyka współczesna w swoich podstawowych propozycjach, ideach i konstrukcjach jest bezkompromisowa. Każda bezkompromisowa koncepcja jest tu lepsza, zdrowsza od jakiegokolwiek kompromisu. I dlatego matematyk musi wykładać matematykę nowoczesną według koncepcji współczesnej nauki. Musi, czy umie czy nie, czy chce czy nie, wykładać tak, aby podstawowe koncepcje współczesnej matematyki były w wykładzie uwzględnione.

[30] Dotyczy to zarówno rozwoju pojęć u pojedynczych osób, jak i historii matematyki. Nieraz przypisuje się matematykom z dawnych epok zawyżony poziom abstrakcji. Wiąże się to z tym, że nie jesteśmy w stanie wniknąć w myślenie i pojęciowy system ludzi już nawet z XIX wieku, sprzed Hamiltona, Weierstrassa i Dedekinda. Np. w często spotykanym stwierdzeniu typu „Tales udowodnił" nie bierze pod uwagę tego, że pojęcie dowodu kształtowało się dopiero w V wieku p.n.e., sto lat po śmierci Talesa.

[31] Wyniki naukowe Opiala, jego działalność, niezwykły talent do znajdowania prostych rozwiązań zadań i szybkiego redagowania nienagannie precyzyjnych tekstów matematycznych opisane są w (Bielak et al., 1979). Nierówność całkowa Opiala dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych to dziś klasyka tej teorii.

> Co przeciwstawia temu stanowisku nauki nasze szkolnictwo? Przede wszystkim zacofanie samej matematyki szkolnej, która po prostu niefrasobliwie opiera się w całości na kanonie matematyki dziewiętnastowiecznej. (cyt. za: Nowecki, 1984, s. 23)

> Chodzi o to, że w matematyce współczesnej jest wiele prostych elementów organizujących tę trudną naukę, elementów wspólnych dla wszystkich dyscyplin matematycznych, i te właśnie elementy trzeba przenieść do szkoły, wykorzystać w możliwie najszerszym zakresie, by nauczanie matematyki w szkole stało się sensownym wprowadzeniem do zagadnień nowoczesnej naukowej i praktycznej działalności człowieka. Zrobić to trzeba koniecznie, nawet gdyby to było niemożliwe! (Opial, 1966)

Tak więc w sposób bardzo zdecydowany Opial wyraził ówczesne nastroje wielu osób, ów klimat poprzedzający radykalną reformę z 1967 r.

W 1965 r. Krygowska przebywała przez dwa miesiące w centrum UNESCO w Paryżu jako redaktor pierwszego tomu *Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques*. Potem brała też udział w przygotowywaniu tomów II, III, IV owych *Tendances*.

Na XVI Międzynarodowym Kongresie Matematyków (ICM) w Nicei w 1970 r. Krygowska wygłosiła *invited address* o problemach nowoczesnego kształcenia nauczycieli w sekcji *Histoire et Enseignement* (Krygowska, 1971b). Uczestniczyła również w tej samej sekcji ICM w Moskwie (1966) i w ICM w Warszawie (1983).

Podczas zainicjowanego przez Freudenthala ICME-1, *the International Congress on Mathematical Education* w 1969 r. w Lyonie (Francja), Krygowska wygłosiła plenarny odczyt *Le texte mathématique dans l'enseignement* (Tekst matematyczny w nauczaniu). W szczególności wyjaśniała szczegółowo, jak pomóc uczącemu się pojąć kolejne zdania zaczynające się od słów:

> Schemat konstrukcji eszelonu to ciąg c_1, c_2, ... c_n par liczb naturalnych $c_i = (a_i, b_i)$ spełniający następujące warunki... (Krygowska, 1969)

co było początkiem długiej serii definicji związanych z ogólnym pojęciem struktury matematycznej w dziele Bourbakiego (o której była mowa powyżej w części *Reformy w USA i we Francji*). W ten sposób Krygowska przekazała słuchaczom przesłanie: ta definicja jest bardzo ważna, warto ją dokładnie zgłębić.

Na drugim kongresie ICME-2 (1972), który odbył się w Exeter (Anglia), Krygowska działała w sekcji poświęconej kształceniu nauczycieli matematyki. W kolejnym ICME-3, który zorganizowano w 1976 r. w Karlsruhe (RFN) była ona członkiem Komitetu Programowego przygotowującego kongres, któremu przewodniczył Hans-Georg Steiner; była też sprawozdawcą obrad toczonych w sekcji poświęconej kształceniu matematycznemu na poziomie określonym jako *Upper Primary and Junior High School*, odpowiadającemu z grubsza naszym klasom IV–VIII. Wygłaszała ona też odczyty na konferencjach w wielu krajach i odwiedzała ośrodki (IREM i inne) zajmujące się dydaktyką matematyki.

W 1970 r. Papy złożył rezygnację z funkcji przewodniczacego CIEAEM. Na jego następcę wybrano Krygowską. Pełniła tę funkcję w latach 1970–75, a potem została honorową przewodniczącą. Jednym z późniejszych przewodniczących (1981–1982) był Stefan Turnau (Gellert et al., 2015, s. 435).

W Polsce Krygowska była wpływową osobą, m.in. była członkiem Prezydium Rady Głównej Szkolnictwa Wyższego, Komitetu Nauk Pedagogicznych PAN i komisji Ministerstwa Oświaty i Wychowania. Wykorzystała to do wprowadzenia w 1967 r. przepisu umożliwiającego nadawanie przez rady wydziałów matematyki, biologi itp. doktoratów z tych dziedzin akademickich za rozprawy dotyczące dydaktyki danego przedmiotu. W latach 1968–1986 była promotorem 26 takich doktoratów (Turnau, 1983). Stworzyła aktywny ośrodek badań z dydaktyki matematyki na WSP w Krakowie, do którego przyjeżdżali też cudzoziemcy. W 1972 r. przeszła na emeryturę, ale jej aktywność nie zmalała. Była młoda duchem do końca. M.in. wielkim jej sukcesem było powstanie w 1982 r. pisma PTM *Dydaktyka Matematyki*.

W 1977 r. dwukrotnie ją uhonorowano: otrzymała doktorat *honoris causa* od swej WSP i członkostwo honorowe PTM.

3. Zmiany programów matematyki na uniwersytetach (1964) i w szkołach średnich (1967)

Około roku 1964 zreformowano programy studiów matematycznych na polskich uniwersytetach. Najważniejszą zmianą było wprowadzenie – z inicjatywy Edwarda Marczewskiego – wykładu *Wstęp do matematyki* w I semestrze I roku. W pierwotnych dyskusjach przedstawiano to jako pomost między szkołą średnią a wyższą, ułatwiający początkującemu studentowi adaptację do nowego sposobu myślenia i stylu prowadzenia zajęć. Miały tam być m.in. znaki sumy $\sum$ i iloczynu $\prod$, zasada indukcji oraz elementy teorii mnogości i logiki matematycznej[32]. Ukazał się podręcznik (Rasiowa, 1967), znakomicie napisany, zawierający zaawansowany materiał, ale zamiast pełnić rolę postulowanego pomostu stał się tym, na co wskazuje jego tytuł: *Wstęp do matematyki współczesnej*. Było to zgodne z ówczesnym światowym trendem, z postulatami Francuzów, ze stanowiskiem Opiala. Otwierało drogę do opartych na teorii mnogości wykładów algebry, topologii i teorii prawdopodobieństwa.

Znaczące jednak było to, w jaki sposób Kazimierz Kuratowski wprowadził elementy logiki matematycznej w trzecim wydaniu podręcznika (Kuratowski 1967, s. 86–100). W pierwszych dwóch wydaniach symboli z logiki nie było, bowiem nie była jeszcze wtedy używana na studiach matematycznych. Otóż on – autorytet w kwestiach teorii mnogości, współautor monografii (Kuratowski, Mostowski 1952), umieścił tę symbolikę – wbrew wielu głoszonym w owych czasach deklaracjom – nie na początku swego podręcznika, lecz dopiero po wyłożeniu dość zaawansowanego materiału dotyczącego zbieżności zwykłej (w każdym punkcie) i zbieżności jednostajnej ciągu funkcji. Oba rodzaje zbieżności, których rozróżnienie nieraz

[32] Oczekiwania wiązane z owym przedmiotem opisane są w (Jeśmanowicz, Hartman, Rasiowa, 1967; Duda, 1985).

sprawia studentom sporą trudność, zdefiniował on najpierw słownie (z tradycyjnymi słowami: dla każdego $\varepsilon > 0$) i przedstawił dowody – oparte na rozumowaniu intuicyjnym – podstawowych twierdzeń. Dopiero potem umieścił w podręczniku symbole rachunku zdań i kwantyfikatorów i uzupełnił on każdą z tych definicji jej zapisem symbolicznym z użyciem czterech kwantyfikatorów

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\dots$$

w przypadku zbieżności zwykłej i

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\ \underset{n>N}{\forall}\dots$$

w przypadku zbieżności jednostajnej. Uważał, że przedwczesna formalizacja, oparta na mechanicznym przestawieniu kolejności znaków, nie sprzyja rozumieniu[33].

Równolegle z reformą studiów wyższych reformowano cały system szkolnictwa ogólnokształcącego, wydłużając o rok kształcenie ogólne[34]. Powojenny system: 7 lat szkoły podstawowej i 4 lata liceum zastąpiono systemem 8+4. W latach 1963–1966 nowy program wprowadzano rok po roku w klasach V, VI, VII, VIII. Ówczesne zmiany omawiają (Molęda, Piesyk, 1993). W dopuszczonych wtedy podręcznikach pojęcie zbioru pojawiało się okazjonalnie, np. jako zbiór rozwiązań nierówności $2x - 5 < 8$, a w klasie VIII pojawiło się też pojęcie funkcji F ze zbioru X w zbiór Y, z symbolami takimi jak $y = F(x)$ (Straszewicz, 1966). Było to jednak na uboczu głównego materiału, który w sumie pozostał dość tradycyjny.

Większych zmian oczekiwano w szkołach średnich, bowiem skok między maturą a początkiem unowocześnionych studiów stał się zbyt duży.

Z inicjatywy PTM odbyły się wówczas dyskusje dotyczące charakteru przyszłych zmian w programach liceum. Oficjalne programy przygotowała komisja w Ministerstwie Oświaty, której przewodniczącym był Straszewicz (a członkami Krygowska, Opial, Leon Jeśmanowicz, Wanda Szmielew i inni matematycy).

Zmiany programu matematyki w liceum były zasadnicze, z wyraźnym wpływem idei *Mathématique Moderne* z Francji i Belgii. Skalę zmian uświadomiono

---

[33] Z badań Mirosława Dąbrowskiego wynika, że samo zaliczenie kursu logiki nie wpływa znacząco na poprawienie rozumowania matematycznego studentów. Sporo studentów III roku matematyki UW, a więc po zaliczeniu *Wstępu do matematyki*, niezbyt rozumiało implikację. Dawano im zadania postawione niby hipotetycznemu uczniowi, potem odpowiedź tego ucznia i pytano, czy ta odpowiedź jest poprawna. Oto jedno z nich: PYTANIE. *Dla jakich trójkątów prawdziwe jest poniższe zdanie? „Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat najdłuższego boku równa się sumie kwadratów pozostałych”*. ODPOWIEDŹ: *Dla wszystkich.* Aż 9 studentów uznało tę odpowiedź ucznia za błędną, twierdząc, że implikacja jest prawdziwa tylko dla trójkątów prostokątnych. Natomiast dowód dwóch tożsamości (I), (II) polegający – w wyraźnie zadeklarowany sposób – na tym, że z założenia (II) wynika (I) i ponadto z (I) wynika (II), aż 10 studentów uznało za poprawny (Dąbrowski, 1990).

[34] Przed 1939 r. w Polsce w szkolnictwie ogólnokształcącym obowiązywał system: 6 klas szkoły zwanej wówczas powszechną, 4 lata gimnazjum (kończącego się małą maturą) i 2 lata liceum profilowanego. W 1946 r. zlikwidowano gimnazja i wprowadzono stopniowo system 7+4, który w 1962 r. zastąpiono systemem 8+4. W 1999 r. rząd Jerzego Buzka wprowadził system 6+3+3, bliższy systemowi przedwojennemu, a w 2017 r. wrócono do systemu 8+4 wprowadzonego przez Władysława Gomułkę.

sobie dopiero w roku 1967/68, gdy ukazały się dwa podręczniki do I klasy: *Algebra* i osobna *Geometria.* Nowości w podręczniku Anieli Ehrenfeucht i Olgi Stande nazwanym umownie „algebra" – oprócz elementów logiki i teorii zbiorów na początku –nie było zbyt wiele, ale wyraźne było przeładowanie materiału, bowiem ponadto były tam funkcje wymierne, ciągi liczbowe, zasada indukcji i pochodne funkcji (niepoprzedzone teorią granic).

Burzę zaś wywołała geometria Krygowskiej[35]. Przyjęła ona tezę, że dedukcja lokalna jest odpowiednia dla szkoły podstawowej, a w liceum powinna być zaprezentowana dedukcja globalna, z podanym układem aksjomatów (które jednakże w podręczniku nie zostały nazwane aksjomatami, lecz „własnościami podstawowymi"). Jej nowatorski system zakładał naiwną teorię mnogości (*figura* geometryczna to był dowolny podzbiór płaszczyzny) i wykorzystywał liczby rzeczywiste.

Wprowadziła najpierw ogólne pojęcie *odległości w zbiorze* (bez nazwy *przestrzeń metryczna*), ilustrowane dwoma przykładami. Jeden to zwykłe $|a - b|$ dla liczb. Drugi przykład zaczynał się od wyjaśnienia, że obszarem leśnym nazwiemy każdy zbiór gatunków drzew[36]. Każdej parze A, B takich obszarów przyporządkowujemy liczbę AB określoną jako iloraz liczby $a + b - 2w$ przez liczbę $a + b - w$, gdzie a jest liczbą gatunków obszaru A, b jest liczbą gatunków B, a w to liczba gatunków wspólnych dla A i B.

Drugim pojęciem potrzebnym do wysłowienia aksjomatów geometrii, była relacja „*a poprzedza b*" nazwana *dokładnym uporządkowaniem* zbioru[37]. Postulowane własności tej relacji zostały zapisane symbolicznie. Oto wierna reprodukcja pierwszej własności:

I. a poprzedza $b \Rightarrow b$ nie poprzedza a*

W zapisie tym gwiazdka przy powtórzeniu litery a nie była symbolem matematycznym. Trzeba było domyśleć się, że ta gwiazdka oznacza odsyłacz do notki u dołu strony. Tam uczeń znajdował wyjaśnienie nieobjaśnionych wcześniej symboli, złożone drobną czcionką:

> Znak $\Rightarrow$ nazywamy symbolem wynikania; zdanie I czytamy: jeżeli a poprzedza b, to b nie poprzedza a.

Zdanie to byłoby zbędne, gdyby ten aksjomat napisać tradycyjnym językiem matematycznym (użytym w notce), bez wprowadzania tu na siłę nowych symboli.

[35] Dwa lata wcześniej, w 1965 r. wydrukowano próbną wersję tego podręcznika, której używano w wybranych dwóch klasach jednego z liceów w Krakowie. Informacje od nauczycielek nie spowodowały istotnych zmian w podręczniku.

[36] Pojąłem ten przykład dopiero wtedy, gdy uświadomiłem sobie, że $a + b - 2w$ to liczebność różnicy symetrycznej $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, natomiast $a + b - w$ to liczebność sumy $A \cup B$.

[37] Był to neologizm niezgodny z tym, co było stosowane w polskich podręcznikach. Terminami powszechnie przyjętymi były: *uporządkowanie, zbiór uporządkowany* (Kuratowski, Mostowski, 1952; Opial 1964) oraz *zbiór liniowo uporządkowany* lub *łańcuch* (Kuratowski, 1955; Rasiowa, 1967).

W podręczniku wypisanych zostało stopniowo 10 przyjętych własności podstawowych (Krygowska, Maroszkowa, 1967; Dróbka, 1970, s. 261–262). Omówimy je, pomijając większość definicji pomocniczych[38].

(Własność I) *Prosta jest figurą geometryczną, do której należy nieskończenie wiele punktów. Każdy punkt płaszczyzny należy do nieskończenie wielu prostych.*

Pękiem prostych o wierzchołku A nazywamy rodzinę wszystkich prostych, do których punkt A należy; pęk ten oznaczamy symbolem (A).

(Własność II) *Przez dwa różne punkty A, B przechodzi zawsze prosta i tylko jedna.* Prosta ta jest oznaczona została symbolem „pr.AB". Własność ta została też zapisana symbolicznie:

$A \neq B \Rightarrow (A) \cap (B) = \{\text{pr.}AB\}$,

a waga tego zapisu została podkreślona przez ujęcie go w ramce. Po rozkodowaniu symboli zapis ten znaczy: część wspólna pęków (A) i (B) jest zbiorem jednoelementowym, którego jedynym elementem jest zbiór pr.AB.

Takie uzupełnianie istotnych informacji przez nieintuicyjne, trudne do rozkodowania symboliczne zapisy, nie wyrażone z pomocą ogólnie znanych symboli, lecz wykorzystujące wprowadzony w tym podręczniku specyficzny system oznaczeń, powtarza się wielokrotnie.

(Własność III) *Do każdego pęku prostych należy dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej.*

(Własność IV) *W płaszczyźnie jest określona odległość, przyporządkowująca parze punktów X, Y liczbę, którą oznaczymy XY tak, że:*

a) *punkty A, B, C są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy* $AB = AC + CB$ *lub* $AB = AC - CB$,

b) *punkty A, B, C nie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy* $|AC - CB| < AB < AC + CB$.

(Własność V) *Prostą można dwoma i tylko dwoma sposobami uporządkować tak, że*:

a) *jeżeli A i B są punktami tej prostej i punkt A poprzedza punkt B przy jednym uporządkowaniu, to B poprzedza punkt A przy drugim uporządkowaniu*;

b) *jeżeli należące do tej prostej punkty A, B, C są różne, to B leży między A i C w każdym z tych uporządkowań wtedy i tylko wtedy, gdy* $AC = AB + BC$.

(Własność VI) *Do każdej półprostej należy dokładnie jeden punkt, którego odległość od początku tej półprostej równa się danej liczbie nieujemnej.*

Rodzina wszystkich prostych równoległych do prostej a została oznaczona symbolem (a) i nazwana *kierunkiem* prostej a. Potem następowały długie definicje.

> *Rzutem równoległym w kierunku* (m) *– krótko: rzutem w kierunku* (m) – na prostą a nie należącą do (m) nazywamy przekształcenie płaszczyzny π na prostą a określone w sposób następujący: obrazem danego

[38]Podane tu definicje i aksjomaty pochodzą z pierwszego wydania (Krygowska, Maroszkowa, 1967). W wydaniu IV (1970) większość fragmentów skrytykowanych w (Dróbka, 1970; Grzegorczyk, 1970; Jeśmanowicz, 1970) została usunięta; reszta pozostała bez zmian.

> punktu płaszczyzny π jest punkt przecięcia prostej a przez tę prostą rodziny (m), która przechodzi przez dany punkt. Obraz punktu (figury) w tym przekształceniu nazywamy *rzutem tego punktu* (figury) na prostą a w kierunku (m). Prostą rodziny (m) przechodzącą przez dany punkt i jego obraz nazywamy *prostą rzutującą* ten punkt na prostą a.
>
> *Naturalnym uporządkowaniem* rodziny (m) nazywamy uporządkowanie określone w sposób następujący: wybieramy dowolną prostą x przecinającą m; wybieramy jeden ze zwrotów tej prostej x; przyjmujemy umowę: prosta a rodziny (m) poprzedza prostą b rodziny (m) wtedy i tylko wtedy, gdy punkt przecięcia a z x poprzedza punkt przecięcia b z x w danym zwrocie prostej x. Takie uporządkowanie nazywamy też *zwrotem* rodziny (m).
>
> *Półpłaszczyzną* o krawędzi m nazywamy część płaszczyzny, która jest sumą prostej m i tych wszystkich prostych kierunku (m), które m poprzedza w jednym zwrocie. (Krygowska, Maroszkowa, 1967)

(Własność VII) *Rzut równoległy na prostą zachowuje porządek naturalny dowolnej prostej, której kierunek jest różny od kierunku rzutu.*

W podręczniku tym – po raz pierwszy w Polsce – wprowadzone zostały w szkole średniej podstawowe pojęcia topologiczne: *punkt brzegowy* figury, *brzeg* figury, *punkt wewnętrzny* figury, *punkt zewnętrzny* figury, figura *domknięta*, figura *otwarta*, *obszar*, *obszar domknięty*, *rozcinanie płaszczyzny* przez figurę, figura *ograniczona*, figura *nieograniczona*.

(Własność VIII) a) *Odcinek (łuk okręgu), którego jeden koniec jest punktem wewnętrznym figury, a drugi punktem zewnętrznym tej figury, ma punkty wspólne z brzegiem tej figury.*

b) *Odcinek (łuk okręgu), którego jeden koniec jest punktem wewnętrznym, a drugi punktem zewnętrznym koła, ma z brzegiem koła dokładnie jeden punkt wspólny.*

W podręczniku podane są też (z przykładami) definicje pojęć takich jak: figura *wypukła*, *ciąg* punktów, *łańcuch odcinków* powstały przez połączenie odcinkami punktów danego ciągu, *łamana*, *łamana zwyczajna*, *łamana zwyczajna zamknięta*.

(Własność IX) *Łamana zwyczajna zamknięta rozcina płaszczyznę na dwie figury spójne, z których jedna jest ograniczona, a druga nieograniczona*[39].

(Własność X) *Mając dane dwa różne punkty płaszczyzny, można przekształcić płaszczyznę na tę samą płaszczyznę izometrycznie i nietożsamościowo tak, że te dane punkty są punktami stałymi tego przekształcenia.*

Do miejsc szczególnie trudnych w omawianym podręczniku należało wykorzystywanie pojęcia pęku prostych i pojęcia kierunku. Uczniowie w zasadzie poprawnie rozumieli pojedynczą figurę (okrąg, prostą) jako zbiór punktów. Krygowska wprowadziła jednak od razu coś znacznie bardziej zaawansowanego: zbiory, których elementami są inne zbiory. Takim jest właśnie pęk – to zbiór, którego elementami

[39] Jest to słynne twierdzenie Jordana, którego dowód podaje się w zaawansowanym kursie topologii uniwersyteckiej; tu zostało przyjęte jako aksjomat.

są proste. Pęki użyte były już przy objaśnianiu Własności II, w postaci implikacji: $A \neq B \Rightarrow (A) \cap (B) = \{\mathrm{pr}.AB\}$. Uczniowie jednak podświadomie – w tej nowej dla nich, abstrakcyjnej sytuacji – ujmowali zbiory nie w sensie *dystrybucyjnym*, jak to czynią matematycy, lecz w sensie *kolektywnym*, bardziej zgodnym z myśleniem potocznym i z pojęciami nauk przyrodniczych (Bryll, Sochacki, 1997). Skoro każda prosta składa się z punktów, a pęk składa się z prostych, więc – w sposób mniej lub bardziej uświadomiony – uczniowie wyciągali wniosek, że do pęku należą wszystkie punkty płaszczyzny. Podobnie trudności sprawiały kierunki. Sprawy nie ułatwiała nietypowa symbolika: pęk o wierzchołku A oznaczany był symbolem (A), kierunek prostej a oznaczany symbolem (a), natomiast A^m to symbol rzutu prostokątnego punktu A na prostą m.

Przy interpretacji kolektywnej częścią wspólną dwóch nierównoległych prostych jest ich punkt przecięcia A i jest to zgodne z potocznym odczuciem sytuacji, natomiast w ujęciu dystrybutywnym częścią wspólną tych prostych jest nie punkt A, lecz zbiór jednoelementowy $\{A\}$. Ogólnie wiadomo, że wielu uczniów nie rozumie różnicy między A a $\{A\}$.

Z drugiej strony kolektywna interpretacja mogła pomagać uczniom przy myśleniu o kącie, który został zdefiniowany następująco:

> *Kątem* nazywamy zbiór trzech figur: dwóch różnych półprostych o wspólnym początku i jednej z figur wyciętych przez sumę tych półprostych z płaszczyzny. Sumę tych trzech figur nazywamy *obszarem* kąta. (Krygowska, Maroszkowa, 1967)

Ta nietypowa definicja, broniona w (Krygowska, 1970, s. 297–298), zwróciła przy okazji uwagę matematyków na dość nieoczekiwany fakt, że każda definicja kąta jako pojedynczego zbioru na płaszczyźnie niezorientowanej ma jakieś istotne wady; np. gdy kąt jest zdefiniowany jako para półprostych o wspólnym początku, to trzeba jakoś dodatkowo określać, czy chodzi nam o powstały tam obszar wklęsły czy o wypukły; gdy kąt zdefiniujemy jako jeden z tych dwóch obszarów, to kąt półpełny nie ma wierzchołka[40]. Andrzej Grzegorczyk, wybitny polski specjalista logiki matematycznej, skomentował tę sytuację następująco:

> Zrobiłem krótką, błyskawiczną ankietę między przypadkowo wybranymi matematykami pytając: co to jest kąt? Okazuje się, że nikt z nich nie pamiętał żadnej konkretnej definicji; każdy próbował na poczekaniu podać swoją definicję i ich definicje nie były równoważne. Mimo to uważam, że każdy z nich wiedział, co to jest kąt. (Grzegorczyk, 1970)

Znaczną i chyba najwartościowszą część omawianego podręcznika geometrii stanowiły przekształcenia izometryczne płaszczyzny: symetrie osiowe, środkowe, przesunięcia, łącznie z twierdzeniem o przedstawieniu dowolnej izometrii jako złożenia symetrii osiowych; jednakże wobec nadmiaru trudnego materiału nie starczało na to czasu. Wprowadzone też było: pojęcie wektora jako uporządkowanej pary punktów, pojęcie translacji, kąta skierowanego i obrotu.

[40] Kąt jako obszar (a nie jako liczba określająca miarę rozwarcia) potrzebny jest np. gdy chcemy podać zbiór rozwiązań (x, y) układu nierówności liniowych.

W klasie II pojawił się iloczyn skalarny wektorów (Krygowska, 1968a), wykorzystany m.in. do podania znanego, eleganckiego dowodu twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie gdy do wektora $AB^{\rightarrow}$ (od A do B) dodamy wektor $BC^{\mapsto}$, to kwadrat skalarny długości ich sumy, tj. wektora $AC^{\mapsto}$ jest sumą kwadratów ich długości i iloczynu tych długości pomnożonego przez $\cos\varphi$; gdy powstały trójkąt jest prostokątny, $\cos\varphi$ jest równy 0 i ów trzeci składnik znika[41].

Efektem dyskusji w środowisku PTM był m.in. cykl wypowiedzi o nowych podręcznikach. O geometrii pisali: (Dróbka, 1970; Jeśmanowicz, 1970; Rachwał, 1970; Grzegorczyk, 1970) i inni, wraz z odpowiedzią (Krygowska, 1970). Stosunkowo nieliczne były uwagi krytyczne do podręcznika nazwanego „algebra".

Wobec powszechnych skarg nauczycieli, że podręczniki Krygowskiej są za trudne, wydano drugi, równoległy, łatwiejszy podręcznik geometrii dla klasy I i potem też dla klasy II, oba napisane przez Witolda Janowskiego. Po raz pierwszy w PRL odstąpiono od zasady tylko jednego podręcznika dla danego przedmiotu i klasy.

4. Zmiany programów matematyki w klasach początkowych w latach 1970–1980

Wprowadzając reformę klas V–VIII, odłożono na później – z ostrożności – kwestię programów dla klas I–IV. Zarazem rozpoczęto dyskusje. Wielu polskich pedagogów głosiło tezę o *akceleracji*, o przyspieszeniu rozwoju dzieci, będącym wynikiem ogólnego rozwoju cywilizacyjnego; uważano, że powinno się dążyć do bardziej ambitnych programów nauczania. Pojawiły się głosy, że dzieci w klasach początkowych są zdolne do większej abstrakcji niż dawniej zakładano. Ponadto odwoływano się do tego, co sugestywnie przedstawił wspomniany już Bruner. Szczególnie często i nieraz bezkrytycznie przytaczany był jego słynny passus:

> Zacznijmy od hipotezy, że każde dziecko, na każdym etapie rozwoju, można uczyć efektywnie każdego przedmiotu, podawanego w określonej formie, rzetelnej pod względem intelektualnym. Jest to hipoteza śmiała i bardzo istotna dla rozważań nad charakterem programu szkolnego. Nie ma żadnych dowodów, które by jej zaprzeczały, wiele natomiast zgromadzono na jej poparcie. [...] Gdy mówię matematykom, gdy uczniowie czwartej klasy mogą zajść daleko w znajomości teorii zbiorów, nieliczni z nich odpowiadają: „oczywiście". (Bruner, 1964, s. 37, 43).

W sformułowaniu tym brakuje podstawowego zastrzeżenia: że owe treści mają być przedstawiane w sposób dostosowany do rozwoju dziecka i że nauczyciel będzie do tego należycie przygotowany i umotywowany (ponadto słowo „przedmiot"

[41] Gdy moja córka szykowała się do egzaminu wstępnego na studia, powiedziała mi, że w liceum nie mieli dowodu twierdzenia Pitagorasa. Wyjaśniłem jej, że mieli dowód w II klasie i pokazałem ów rachunek z iloczynem skalarnym. Odpowiedziała, że owszem, ten rachunek mieli, ale dowodu twierdzenia Pitagorasa nie było. Dostała się na matematykę do tzw. grupy teoretycznej; dziś jest nauczycielką matematyki.

należy oczywiście rozumieć jako: przedmiot szkolny przewidziany dla dzieci w danym wieku, a nie dowolny). Nader często zdarzało się, że twórcy programów – powołując się na tę hipotezę Brunera – nie brali owego kluczowego zastrzeżenia pod uwagę i nie było ono spełnione przy realizacji programu. Ponadto częstym błędem wielu reform było nadinterpretowanie wyników badań eksperymentalnych z dziećmi, które – przy odpowiedniej stymulacji – okazywały się zadziwiająco pojętne, ale tego jednak nie dawało się powtórzyć w skali masowej.

Wtedy to Krygowska wspólnie z Morozem opracowała swój projekt programu matematyki dla nauczania początkowego, tj. dla klas I–IV szkoły podstawowej[42]. Oto materiał przewidziany przez nich dla dwóch pierwszych klas (dzieci w wieku 7–9 lat).

Klasa I (5 godzin tygodniowo)

1. Przygotowanie do nauki arytmetyki na konkretnym materiale z odpowiednią strukturą arytmetyczną.

1.1. Zbiór. Schemat Venna. Element zbioru. Podzbiór. Zbiór jednoelementowy. Zbiór pusty. Rozkład zbioru na zbiory rozłączne, klasyfikacja według różnych własności przedmiotów konkretnego materiału dydaktycznego.

1.2. Operacje na zbiorach: suma, iloczyn (wspólna część), różnica.

1.3. Porządkowanie zbioru.

1.4. Ćwiczenia logiczne w grach i zabawach (zwroty „i”, „lub”, „nie”).

1.5. Przyporządkowanie elementów jednego zbioru elementom drugiego zbioru. Zbiory równoliczne. Grafy strzałkowe.

1.6. Wstępne ćwiczenia do nauki o działaniach arytmetycznych z użyciem materiałów dydaktycznych o określonej strukturze algebraicznej. Przyporządkowywanie parom elementów zbioru trzeciego elementu. Działania wzajemnie odwrotne. Przemienność i łączność działania. Związek działania z porządkiem w zbiorze.

2. Arytmetyka liczb naturalnych z zerem do 20 oraz przygotowanie do nauki arytmetyki w zakresie liczb naturalnych do 1000.

2.1. Liczba naturalna i zero jako własności zbiorów równolicznych.

2.2. Dodawanie i odejmowanie jako działania wzajemnie odwrotne.

2.2.1. Dodawanie i odejmowanie w zakresie 10; wewnątrz drugiej dziesiątki; z przekroczeniem progu dziesiątkowego; pełnymi dziesiątkami do 100; pełnymi setkami do 1000.

2.2.2. Porządek naturalny i jego własności; związek z dodawaniem.

[42] Program ten został opublikowany w (Krygowska, 1968b), a następnie w (Moroz, 1972). W omówieniu eksperymentu (Krygowska 1968b, Krygowska, Moroz, 1970; Moroz 1972) czytamy, że wyniki potwierdziły, że materiał przedstawiony w programie jest dostępny dzieciom. Jedynym tekstem tego programu dostępnym dziś w internecie jest wspomniana wyżej wersja francuska (Krygowska, 1971b), ujęta tam nieco zwięźlej. W aneksie podaje ona też tekst programu dla klas I-IV przyjętego wówczas przez komisję Straszewicza.

2.2.3. Równania typu $a + x = b$, $x - a = b$, $a - x = b$ oraz ich zastosowania przy rozwiązywaniu zadań tekstowych.

2.3. Mnożenie i dzielenie jako działania wzajemnie odwrotne.

2.3.1. Mnożenie i dzielenie liczb naturalnych z zerem do 20.

2.3.2. Równania typu $a{\cdot}x = b$ oraz ich zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań tekstowych.

2.3.3. Składanie dzielenia z mnożeniem, zapis w postaci ułamka (ułamek jako operator na liczbach).

2.4. Działania łączne, nawiasy, kolejność działań.

2.5. Przygotowanie do rozszerzenia numeracji z zastosowaniem konkretnych materiałów o odpowiedniej strukturze arytmetycznej.

2.5.1. Zapis iloczynu równych czynników w postaci potęgi.

2.5.2. Zapis liczby w numeracji o podstawach 2 i 3 w prostych przypadkach.

Klasa II (6 godzin tygodniowo)

1. Powtórzenie, pogłębienie i uzupełnienie wiadomości poznanych w klasie poprzedniej.

1.1. Zbiory, symbole: $\in, \notin, \subset, \not\subset, \cap, \cup, \setminus, \emptyset$.

1.2. Ćwiczenia logiczne w grach i zabawach w związku z poznanymi wiadomościami o zbiorach. Sens zwrotów „i", „lub", „nie", „jeżeli – to", „każdy", „jest taki". Klasyfikacja według różnych własności, zaprzeczenie koniunkcji, zaprzeczenie alternatywy, odwzorowanie zbioru na zbiór, porządkowanie zbioru, konstruowanie konkretnych zbiorów według żądanych warunków, formułowanie warunków do zadanych zbiorów.

1.3. Arytmetyka liczb naturalnych z zerem do 20 ze szczególnym podkreśleniem własności działań i ich wykorzystaniem w rachunku pamięciowym.

2. Arytmetyka liczb naturalnych z zerem do 100.

2.1. Dodawanie i odejmowanie sposobem pisemnym w numeracji o podstawie 10.

2.2. Rozwiązywanie równań typu $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$ oraz nierówności typu $a + x < b$, z zastosowaniem do rozwiązywania zadań tekstowych.

2.3. Mnożenie i dzielenie.

2.4. Rozwiązywanie równań typu $a{\cdot}x = b$, $a{\cdot}x{+}b = c$ oraz nierówności typu $a \cdot x < b$, z zastosowaniem do rozwiązywania zadań tekstowych.

2.5. Numeracja przy podstawie 2, 3 a numeracja przy podstawie 10.

2.5.1. Zapis liczby, przechodzenie od jednej podstawy numeracji do drugiej.

2.5.2. Dodawanie i odejmowanie sposobem pisemnym w numeracjach przy podstawach 2, 3 i 10.

3. Arytmetyka liczb naturalnych z zerem do 1000.

3.1. Dodawanie i odejmowanie sposobem pisemnym do 1000.

3.2. Mnożenie i dzielenie, dzielenie z resztą.

3.3. Miary długości, ciężaru i czasu.

3.4. Numeracja rzymska.

4. Pierwsze przykłady funkcji numerycznych. Funkcje zadane prostymi wzorami lub tabelami, sporządzanie i odczytywanie tabel funkcji empirycznych, zastosowanie w rozwiązywaniu zadań.

5. Elementy kombinatoryki z użyciem konkretnych materiałów. Permutacje zbioru skończonego na prostych przykładach, liczba permutacji; kombinacje, liczba kombinacji w najprostszych przykładach; zadania z siecią kwadratową: liczba wszystkich możliwych dróg łączących dwa punkty sieci; drogi i liczba ich skrzyżowań. (Krygowska, 1968b; Moroz 1972)

Jesienią 1968 r., po dojściu omawianej reformy klas IV–VIII do szkół średnich, Minister Oświaty podjął decyzję o rozpoczęciu prac nad całościową reformą nauczania początkowego i wszczęciu prac nad nowymi programami. Krygowska próbowała przeforsować ten swój program, ale Straszewicz to zablokował. Powołano podkomisję, której zadaniem było przygotowanie projektu programu matematyki dla klas I–IV. W jej skład weszli metodycy klas początkowych, wśród których wiodącą rolę odgrywała Zofia Cydzik z Instytutu Pedagogiki, autorka podręcznika metodyki nauczania matematyki w klasach I–IV szkoły podstawowej (Cydzik, 1962). Na zebraniu komisji do spraw programów matematyki Straszewicz przedstawił problem i stwierdził, że w skład tej podkomisji powinien wejść jakiś matematyk. Spytał, kto z obecnych zgodziłby się wejść w jej skład. Zgłosił się Zbigniew Semadeni.

Efektem pracy podkomisji był projekt programu, który komisja Straszewicza przyjęła 17 czerwca 1970. Opublikowany został w piśmie *Matematyka* nr 3/1971.

Program ten uchodził wtedy za umiarkowany, zapewne z powodu kontrastu z poprzednim projektem Krygowskiej i Moroza. Dopiero potem stopniowo okazywało się, że jest tam zdecydowanie zbyt dużo materiału, a niektóre tematy okazały się istotnie trudniejsze, niż przedtem oczekiwano[43].

Wnikliwej, wszechstronnej, krytycznej analizy owej zmiany w nauczaniu początkowym matematyki i jej uwarunkowań dokonała Edyta Gruszczyk-Kolczyńska (2017).

Ów nowy program klasy I zaczynał się od ćwiczeń orientacyjnych dotyczących stosunków przestrzennych (np. *wyżej, niżej, na prawo, na lewo*),

[43] Program ten, z niewielkimi zmianami, dotrwał do reformy z lat 1996-1999 r. Wtedy w ogóle wycofano się z programów każdego przedmiotu do każdej klasy, wprowadzając podstawy programowe dla kolejnych etapów kształcenia. W klasach początkowych zlikwidowano podział na przedmioty.

wyodrębniania cech wielkościowych (*większy, mniejszy, porządkowanie przedmiotów np. od najdłuższego do najkrótszego*) i zaznajamiania z nazwami prostych figur geometrycznych. Potem były przykłady klasyfikacji przedmiotów według koloru, wielkości, kształtu, przeznaczenia.

Były też proste równania z niewiadomą oznaczaną symbolem x. W owym czasie metodycy nauczania początkowego z Warszawy, Krakowa, Lublina byli zgodni, że równania z niewiadomą x mogą i powinny pojawić się bardzo wcześnie[44]. Tę postawę wyraziła m.in. następująca argumentacja:

> W klasie V nowością jest wprowadzenie liter dla oznaczania niewiadomych. Wytłumaczenie uczniom, że zamiast $2\cdot\square = 6$ dogodniej jest pisać $2\cdot x = 6$ nie nastręcza żadnych trudności dydaktycznych; można by śmiało dać je już w klasie IV, a może nawet w III. W kilku początkowych ćwiczeniach dobrze będzie zastosować równolegle oba napisy. [...]
>
> Rozwiązywanie nierówności uzupełnia rozwiązywanie równań; w nauczaniu należy te tematy zbliżać, a nie odgraniczać, jak to czyniono dawniej. (Straszewicz 1966, §23)

Rzuca tu się w oczy to, że to, co tu było nowością w klasie V, w kilka lat poźniej znalazło się w klasie I. Ponadto argumentacja Straszewicza, może trafna w przypadku klasy V, w przypadku dzieci młodszych jest zdecydowanie błędna. Dziecko może pojąć – jako rzecz dlań naturalną – że okienko to miejsce, w które należy wpisać właściwą liczbę. Mając np. równanie $5 + \square = 8$, można spytać, jaką liczbę należy wpisać w okienko, aby było dobrze. Dziecko wpisuje liczbę, czyta: $5+3 = 8$ i stwierdza, że to tak jest. Natomiast zapis $5 + x = 8$ i odpowiedź typu $x = 3$ prowadzą do zupełnie nowej kwestii: co jest x? Dlaczego x to liczba 3, ale po chwili okazuje się, że x jest też inną liczbą? Są tu poważne trudności pojęciowe, ujawniające się też później przy kwestii, czym są symbole literowe, gdy dokonuje się przejścia z arytmetyki do algebry. W rozwoju historycznym matematykom kwestie te zajęły długie lata.

Po wstępnym zatwierdzeniu nowego programu ogłoszono konkurs na podręcznik matematyki do klasy I. Wygrali go: Ewa Puchalska-Ryger i Marek Ryger. Podręcznik wydano w 1972 r., jeszcze przed oficjalnym wprowadzeniem nowego programu. Był ilustrowany ślicznymi, ciekawymi rysunkami. Pojawiły się tam zbiory przedstawiane rysunkowo, bez żadnych słów ani symboli, np. rysunek szuflady podzielonej na cztery części: łyżki, widelce, łyżeczki, noże. Na innym rysunku były elementy dwóch zbiorów: kilka zwierzątek i rzeczy kłujące: kaktus, kasztan w skorupie, a w części wspólnej – wyodrębionej pętlami – kłujące zwierzątko: jeż. Były też równania typu $x+3 = 7$ i $x - 5 = 3$ rozwiązywane z pomocą grafów oraz równania typu $4+x = 7$ i $8 - x = 4$ rozwiązywane przez symulację na konkretach. Zgodnie z programem pojawił się tam kilogram, dekagram, litr (Puchalska-Ryger, Ryger, 1972).

[44] Zastrzeżenia zgłaszał wtedy jedynie Józef Hawlicki, nauczyciel z Przemyśla, autor wielu publikacji dotyczących nauczania początkowego (Hawlicki, 1978).

Wkrótce potem ukazał się też drugi, równoległy podręcznik do klasy I napisany przez Zofię Cydzik, o podobnym zakresie materiału (Cydzik, 1972). Zdołała ona przeforsować też koncepcję zeszytu ćwiczeń, co wtedy uważano za duże osiągnięcie[45].

Dla klasy II wydano podręcznik Henryka Moroza (Moroz, 1973). Widać było od razu, że naśladował on eksperyment belgijski opublikowany w (Frédérique, 1970). Dość rażąco odbiegał od oficjalnego nowego programu ministerialnego, wyraźnie zaś realizował niemal wszystkie tematy klasy II z przedstawionego powyżej programu Krygowskiej i Moroza. W szczególności od samego początku systematycznie używane były symbole teorii zbiorów, m.in. uczeń znajdował tam takie napisy:

W={a, b, d, l, w}, S ⊂ Z, C=A∩B, ∅,

A∪B=B∪A, P\M, c∈F, c∉A, (N∪C)∪Z=N∪(C∪Z).

Później symbole mnogościowe były użyte m.in. w zadaniu na rozwiązanie układu dwóch nierówności liniowych.

Moroz wprowadził mnożenie $3 \cdot 4 = 12$ jako liczebność zbioru par utworzonych ze zbioru trzech dziewczynek i czterech chłopców. Znaku iloczynu kartezjańskiego tam nie było, pary były przedstawione w prostokątnej tabelce.

W podręczniku tym były też początki algebry, np. w ramkach z użyciem symboli literowych zapisane było kolejno:

$ab = c$ znaczy to samo, co $b + b + b + ... + b = c$,

$a \cdot b = b \cdot a$ Mnożenie liczb jest **przemienne**

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Mnożenie liczb jest **łączne**

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Jest to własność **rozdzielności** mnożenia względem dodawania.

Pojawiły się też przykłady obliczeń na minikomputerze Papy'ego (w systemie dwójkowym), potem rozszerzone dziesiątkami do 100.

Było tam mnóstwo grafów, pełniących różne funkcje dydaktyczne, m.in. operatorowo wprowadzone były ułamki[46]. Pokazane było, że operator $\frac{3}{4}$ (przedstawiony strzałką) kawałkowi czekolady składającemu się z 4 kostek przyporządkowuje kawałek składający się z 3 takich kostek, a następny graf ilustrował to, że $\frac{3}{4}$ przyporządkowuje liczbie 20 najpierw iloraz $20 : 4 = 5$, a w następnym kroku liczbie 5 przyporządkowuje liczbę $5 \cdot 3 = 15$.

---

[45] Głównym argumentem przeciwko zeszytom ćwiczeń była oszczędność papieru, bowiem drukowano je do jednorazowego użycia, bez możliwości przekazania ich następnemu rocznikowi. W PRL zawsze dotkliwie brakowało papieru, dodatkowy przydział papieru dla wydawnictwa wymagał zgody premiera. Cydzik powołała się jednak na ówczesną zasadę, że i tak w klasie I uczeń ma dostać nowiutkie podręczniki.

[46] W czasach *Mathématique Moderne* operatorowe ujęcie ułamków było modne wśród francuskich reformatorów. Chodziło im o wprowadzenie ułamków bez wychodzenia poza pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych. W ich ujęciu ułamek $\frac{n}{m}$ był *operatorem* (czyli funkcją) na zbiorze liczb podzielnych przez m przyporządkowującą każdej liczbie k z tego zbioru liczbę całkowitą $k \cdot \frac{n}{m}$. Aby dodać np. $\frac{3}{4}$ do $\frac{2}{3}$ trzeba było zmienić dziedziny obu funkcji, przechodząc od zbioru liczb podzielnych przez 4 i zbioru liczb podzielnych przez 3 do zbioru liczb podzielnych przez 12. Operatorowe podejście do ułamków wynikało z rygorystycznego założenia Krygowskiej, że nauczanie początkowe ma się opierać na strukturze pierścienia $\mathbb{Z}$, bez wychodzenia poza ten zakres.

Chociaż dzielenie w zakresie 100 jest jednym z głównych tematów klasy II, w całym podręczniku (Moroz, 1973) jest tylko jedno zadanie na podział (rozwiązywane algebraicznie) i ani jednego na mieszczenie. Jest natomiast typowe zadanie na mnożenie: „Jurek hoduje króliki. Przygotował na zimę 5 klatek. W każdej z nich umieścił 6 królików. Ile królików hoduje Jurek?", którego rozwiązanie pokazano nie przez zwykłe pomnożenie $5 \cdot 6 = 30$, lecz przez ułożenie równania $y : 6 = 5$ i zastosowanie grafu, by zamienić to na równanie $y = 5 \cdot 6$.

Podręcznik ten miał co najmniej 7 wydań po 100 000 egzemplarzy. Od 1976 r. równolegle ukazywał się też podręcznik Cydzik do II klasy.

Oprócz równań z niewiadomą x pojawiły się w I klasie zadania: „Szukamy x: x<2+3" (Puchalska, Ryger 1972, 70), „Pomyśl, jakimi liczbami można zastąpić x? x+9 >16" (Cydzik, 1972, 94) oraz w klasie II „Rozwiąż nierówności: x+2 >13, 9+x < 11" (Moroz, 1973, 90).

Uruchomiono wtedy ogromne środki na program doszkalania nauczycieli. Utworzono w 1972 r. Instytut Kształcenia Nauczycieli (IKN) w Warszawie z ośrodkami terenowymi (IKNIBO) w każdym województwie. Trzy lata później utworzono Nauczycielski Uniwersytet Radiowo-Telewizyjny (NURT), a w nim 3-letnie Studium Nauczania Początkowego Matematyki. Przez 3 lata TVP regularnie emitowała 30-minutowe wykłady dotyczące nauczania matematyki w klasach I–III, wzbogacane krótkimi filmikami kręconymi na lekcjach w szkołach. Połowę tych wykładów dostał zespół krakowski, a połowę – warszawski. Teksty wykładów były na bieżąco, regularnie drukowane w specjalnych wkładkach do jednej z serii dwutygodnika *Oświata i Wychowanie*. Później zostało to uzupełnione o dalsze teksty i pięknie wydane z kolorowymi ilustracjami w serii (Semadeni, 1981, 1984, 1986, 1988).

Jednym z wykładowców NURT była Alina Szemińska, współpracownica Piageta; ich książka *La genèse du nombre chez l'enfant* (Geneza pojęcia liczby u dziecka, m.in. z problemem stałości liczby naturalnej na przełomie okresów: przedoperacyjnego i operacji konkretnych) należy do klasyki psychologii rozwojowej. Rozszerzyła ona znacząco tekst swych trzech wykładów (do 134 stron), dodając wiele rysunków (Szemińska, 1981). Jest to najobszerniejsze w języku polskim popularne wprowadzenie do matematycznych aspektów piagetowskiej teorii rozwoju dziecka. Nie było jednak czytane, zbyt odległe było od sposobu myślenia ówczesnych dydaktyków i nauczycieli, a także od francusko-belgijskich prądów "modernistycznych".

5. Stopniowe wycofywanie się z reform po roku 1980

Na reformę nauczania matematyki w klasach I–IV nałożyła się zainicjowana w 1973 r., rozciągnięta w czasie, nigdy nieukończona strukturalna reforma polskiego szkolnictwa ogólnokształcącego (Domke, 2015, 243–254). Zmiany programów matematyki w klasach początkowych wyprzedziły o 3 lata zmiany programów języka polskiego i innych przedmiotów w tych klasach.

Rząd ogłosił plany odejścia od 12-letniego systemu 8+4 kształcenia ogólnego i zastąpienie tego przez powszechną 10-letnią szkołę średnią, wzorowaną na szkolnictwie ZSRR (choć tam akurat zaczęto się z tego wycofywać). Opublikowano projekty nowych programów, ścieśniając poprzedni materiał z 12 klas do 10 klas. Rządowa propaganda głosiła, że dzięki upowszechnianiu wykształcenia wyższego wśród nauczycieli, zbiorczym szkołom gminnym i liniowemu układowi materiału w programach (tzn. bez powtarzania przerobionych tematów w następnych klasach) taka redukcja czasu nauczania będzie możliwa. Skrócono edukację początkową z czterech lat do trzech, dodając po raz pierwszy klasę zerową dla 6-latków. Klasę IV ogłoszono pierwszą klasą szkoły średniej[47]. Skutkiem tego było m.in. pojawienie się liczb rzeczywistych (wraz z niewymiernością $\sqrt{2}$) już w podręczniku do klasy V. W klasie IX, masowej (już bez selekcji na egzaminie wstępnym do szkoły średniej) wszyscy mieli uczyć się początków rachunku różniczkowego.

Ukazanie się w prasie tekstu nowego programu dziesięciolatki wywołała falę protestów (bardzo ostrą jak na PRL i cenzurę). W trzech kolejnych numerach czołowego tygodnika *Polityka* ukazały się krytyczne analizy nowych programów, poczynając od *Bez „Wesela" i bez „Dziadów"* Aliny Kowalczykowej o okrojonym programie języka polskiego. Wtedy to cenzura zakazała wszystkim pismom publikowania artykułów o reformie bez specjalnego pozwolenia. Na dwudniowym „sejmiku matematycznym" zwołanym w Puławach w celu dyskusji o projekcie, dominowały uwagi negatywne[48]; z Warszawy przyszedł jednak wieczorem po pierwszym dniu rozkaz: niczego nie uchwalać!

Pomimo, że Sejm był ściśle podporządkowany rządzącej partii, Minister Oświaty i Wychowania nie uzyskał zgody Sejmu na dziesięciolatkę. Rozpoczęto reformę w 1976 r. metodą faktów dokonanych, zlecając druk nowych podręczników i wdrażanie nowych programów klasa po klasie.

W 1980 r. reforma objęła klasę IV i doszła do klasy V. Wtedy to ruch „Solidarności" wymusił na władzy rezygnację z dziesięciolatki. W listopadzie 1980 r. w TVP minister ogłosił zawieszenie wdrażania reformy; nigdy już do niej nie wrócono. Jednakże to, co już zostało zmienione, bardzo trudno było cofnąć. Wielokrotnie pod naciskiem nauczycieli, którzy alarmowali o niemożliwości zrealizowania tak wielkiej ilości zbyt trudnego materiału, Instytut Programów Szkolnych wysyłał do WSiP informacje o nowych decyzjach przesunięcia jakiegoś fragmentu materiału do następnej klasy. Czasem zdarzało się to w ostatniej chwili, gdy podręcznik już był wysłany do druku. Takie poprawki trwały niemal aż do końca PRL.

6. Refleksje dotyczące omawianych tu reform

W wielu krajach świata próbowano rozgryźć ów unikalny fenomen ruchu „Nowej Matematyki". Jak to się stało, że w tylu krajach aż tylu kompetentnych matematyków forsowało z zapałem pomysły edukacyjne, z których część była wyraźnie niezgodna ze zdrowym rozsądkiem?

---

[47] Zadziwiający jest fakt, że ta pozornie nieistotna zmiana nazwy wpływała na myślenie niektórych matematyków. Gdy kwestionowano nadmiar abstrakcji w klasie IV, mówili, że tak musi być, bo to przecież pierwsza klasa szkoły średniej, której poziomu nie należy obniżać. Gdy im uświadomiono, że to tylko IV klasa szkoły podstawowej, zmieniali zdanie.

[48] Zauważyłem wtedy i przy innych okazjach pewną prawidłowość. Dyskutantom zaczynającym swe wystąpienie od stwierdzenia, że kiedyś sami uczyli w szkole, program na ogół się podobał. Krytykowali go głównie ci, którzy mieli dzieci w szkole.

Oczywiście przykład autorytetów silnie działa. Skoro wybitni i wpływowi matematycy, tacy jak Dieudonné czy Choquet głosili, że fundamentem nowoczesnej matematyki jest teoria mnogości i pojęcie struktury wyrażone w tym języku, skoro uzasadnienie pewnych zmian programów nauczania można było podeprzeć cytatami z Piageta, musiało to silnie oddziaływać na dydaktyków. Ponadto reforma zawierała wiele pozytywnych elementów, np. opracowanie nowych środków dydaktycznych, jak choćby klocków Cuisenaire'a.

Tłumaczy to częściowo ów fenomen, ale nie wyjaśnia wszystkiego, w szczególności tego, że nie słuchano bardzo krytycznych uwag innych wielkich matematyków, takich jak Leray i Thom. Wyraźną rolę odegrały te grupy, którym reforma pomagała wypłynąć jako autorom i wydawcom podręczników i poradników.

Niedocenianym przez reformatorów czynnikiem była kwestia nie tylko kwalifikacji nauczycieli, ale też ich podatności na pożądane zmiany nauczania. Wybitni dydaktycy nieraz projektowali zmiany, które sami być może potrafiliby zrealizować z uczniami, ale nie brali pod uwagę tego, że zwykły nauczyciel nie da sobie z tym rady. To jednak też nie wyjaśnia skali wprowadzanych zmian.

Spróbujmy poszukać dalszych wyjaśnień, wracając do starej kwestii, czym jest dydaktyka matematyki. Kiedyś odpowiedzią na to pytanie było, że to wiedza, jak prowadzić lekcje w szkole. W tym ujęciu dydaktyka była ujmowana jako *rzemiosło*, rozumiane jako „technika lub umiejętność potrzebna w jakiejś działalności, zwłaszcza artystycznej" (Bańko, 2000). Tak rozumianego rzemiosła wymaga się np. od skrzypka grającego w orkiestrze – umie zagrać wszystko z podstawowego repertuaru. Dydaktyki jako rzemiosła można się nauczyć. Ważna jest także wrodzona *charyzma* nauczyciela, oddziaływanie na uczniów przez swą pasję, charakter – mają to niektórzy, można to rozwijać (lub tłamsić), ale to jest czymś istotnie różnym od rzemiosła.

Dydaktyka matematyki stanowi zarazem dziedzinę *badań naukowych*. Jako symboliczny początek takiego jej ujmowania można uznać rok 1893, kiedy to powstała Katedra Dydaktyki Matematyki na Uniwersytecie w Getyndze, kierowana przez Felixa Kleina. Za koniec „ery Kleina" uważa się wybuch II wojny światowej. Wraz z ponowną aktywizacją ICMI w 1952 r. zaczęła się „era Freudenthala", cechująca się ogromnym ożywieniem współpracy międzynarodowej i rozwijaniem badań z dydaktyki matematyki jako samodzielnej, a zarazem interdyscyplinarnej dziedziny. W jej propagowaniu znaczącą rolę odegrała Krygowska. Ustalenie zakresu i cech charakteryzujących tę dziedzinę było przedmiotem niełatwych analiz, czego wyrazem jest m.in. książka (Sierpińska, Kilpatrick, 1998).

Jednakże dla analiz fenomenu *Mathématique Moderne* kluczowe może być spostrzeżenie Anny Sierpińskiej z jej plenarnego referatu otwierającego kongres ICME-8 w Sewilli (1996). Stwierdziła, że każdy z kolejnych reformatorskich prądów, poczynając od *New Math*, zawierał pewien program badań naukowych oraz program działania, w tym zmian materiału nauczania lub sposobów nauczania. Prądy te ewoluowały w trzech płaszczyznach: płaszczyźnie ideologii, płaszczyźnie teorii i płaszczyźnie działań dydaktycznych (Sierpińska, 1996).

Każdy głośny reformatorski program charakteryzowały pewne idee, połączone z chwytliwymi sloganami (jak np. *Back to Basics*). Każdy wiązał się z kwestionowaniem wcześniejszych ideologii, modyfikowaniem związanych z tym teorii oraz (używając określenia Davida Pimma) *monomaniakalnym entuzjazmem.*

Słowo *ideologia* kojarzy się zazwyczaj z polityką. Przyjmijmy jednak szersze określenie: „ideologia to całokształt idei i poglądów na świat i życie społeczne, charakteryzujący jakąś grupę ludzi lub kierunek polityczny, ekonomiczny, artystyczny itp. [...] ideologia postmodernizmu" (Bańko, 2000). Inne ujęcie to ideologia jako „zbiór idei, przez które my widzimy i konstruujemy rzeczywistość, co czyni świat zrozumiałym" (Noss, 1994, 441).

W tym sensie można mówić o *ideologii New Math.* Cechowały ją: silna wiara w słuszność podstawowych postulatów, dążenie do objęcia tym całości nauczania, niebywały entuzjazm, lekceważenie faktów niezgodnych z przyjętą wizją nauczania matematyki, określanie osób kwestionujących reformy mianem zacofanych, nie idących z postępem nauki. Do zasadniczych, ideologicznych elementów owego prądu należało przekonanie, że matematyka – jedna, niepodzielona, oparta na teorii mnogości, na systemach aksjomatycznych i podstawowych strukturach – jest definitywnym produktem rozwoju historycznego. Takie nastawienie było wyraźne w cytowanych, emocjonalnych wypowiedziach Opiala i w działalności Krygowskiej po 1956 r. Dla niektórych osób był to też ostateczny, nie podlegający już dalszej ewolucji obraz matematyki.

Ponadto, pod wyraźnym wpływem Papy'ego, u Krygowskiej doszedł jeszcze jeden ważny element: przekonanie o konieczności bardzo wczesnego kształtowania umysłów dzieci zgodnie z nowym paradygmatem. Miało to wyraźne odbicie w forsowanym przez nią programie matematyki dla klas początkowych. To jednak nie tłumaczy, dlaczego Krygowska i Moroz umieścili w swym programie niewiarygodną ilość materiału dla klas I–II, a w szczególności dlaczego wprowadzili ułamki, potęgowanie i systemy niedziesiątkowe już do klasy I szkoły podstawowej, a potem Krygowska zabiegała o to, by ten program obowiązywał we wszystkich polskich szkołach.

Jedną z cech polskich reform przygotowywanych w latach 1960–1970, ujawniających się przy ich analizie, było dążenie do uniformizacji podejścia do całości matematyki. Ponieważ matematyka jest jedną całością, opartą na teorii mnogości, więc również założenia dotyczące jej nauczania w szkole powinny być oparte na uniwersalnych zasadach i w miarę możności jednolite. Pewne zasady były wyraźnie wyodrębnione:

> Należy traktować nauczanie początkowe matematyki w perspektywie aktualnej struktury matematyki; rozwijać od początku te kategorie myślenia matematycznego, które będą używane w ciągu dalszym, w taki sposób, aby poziom nauczania matematyki od poziomu poprzedzającego nie był odseparowany przez próg zbyt trudny do przekroczenia przez średniego ucznia.
>
> Na każdym poziomie należy uczyć matematyki w jej własnym języku. Składowa symboliczna ułatwia naukę, ale wystawia ją na pewne niebezpieczeństwa, których trzeba być świadomym.
>
> Uciekanie się do materiałów dydaktycznych jest niezbędne. Tu również rekomenduje się używanie materiałów różnorodnych, aby uniknąć efektu uwarunkowania. (Krygowska, 1971a)

Inne zasady nie były formułowane oficjalnie, ale przywoływano je np. w trakcie dyskusji o programach nauczania. Jedną z nich było: gdy się wprowadza jakieś działanie arytmetyczne, powinno się równocześnie (lub zaraz potem) wprowadzić działanie odwrotne (dotyczyło to głównie klas początkowych). Inna zasada głosiła: gdy się rozpatruje jakieś równania, powinno się też rozpatrywać odpowiadające temu nierówności; ta zasada początkowo pojawiła się w kontekście szkoły średniej, ale później – jak widzieliśmy – przeszła kolejno do klasy V i potem rozwiązywanie nierówności liniowych pojawiło się w nauczaniu początkowym.

Gdy ujawniał się konflikt między ogólną zasadą dydaktyczną a konkretną sytuacją, nieraz pierwszeństwo przyznawano zasadzie; skutkiem tego były rozmaite, trudne do wytłumaczenia paradoksalne działania dydaktyczne.

References

Ahlfors, L.: 1963, O programie nauczania matematyki, *Wiadomości Matematyczne* **6**, 243–248.

Bańko, M. (red.): 2000, *Inny słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Bielak, A., et al.: 1979, Zdzisław Opial, *Wiadomości Matematyczne* **21**, 115–137.

Błaszczyk, P., Domoradzki, S., Fila, M.: 2019, Recenzja książki: Fulvia Furinghetti, Alexander Karp (Eds.). *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*, *Analecta. Studia i Materiały z Dziejów Nauki*, Springer, 250–262.

Bourbaki, N.: 1957, *Théorie des ensembles. Chap. 4, Structures*, Hermann, Paris.

Bruner, J.: 1964, *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa.

Bryll, G., Sochacki, R.: 1997, O dwóch różnych pojęciach zbioru, *Dydaktyka Matematyki* **19**, 129–154.

Cartan, H.: 1963, Nicolas Bourbaki i współczesna matematyka, *Wiadomości Matematyczne* **6**, 187–197.

Castelnuovo, E.: 1981, CIEAEM: Histoire de cette Commision, w: M. Pellerey (red.), *Actes CIEAEM* **33**, 11–14, 15–17, 355–356.

Ciesielska, D., Szczepański, J.: 2017, Szkolny podręcznik do matematyki z perspektywy czterdziestu lat (1975–2015), *Opinie edukacyjne Polskiej Akademii Umiejętności* **25**, 101–121.

Ciosek, M.: 2005, O wpływie Anny Zofii Krygowskiej na dydaktykę matematyki w świecie, *Dydaktyka matematyki* **25**, 129–154.

Corry, L.: 2008, Writing the Ultimate Mathematical Textbook: Nicolas Bourbaki's "Éléments de mathématique", w: E. Robson, et al. (red.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 565–588.

Cydzik, Z.: 1962, *Nauczanie arytmetyki w klasach I–IV*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Cydzik, Z.: 1972, *Matematyka dla klasy I*, WSiP, Warszawa.

Dąbrowski, M.: 1990, Jak przyszli nauczyciele oceniają poprawność rozumowań matematycznych?, *Wiadomości Matematyczne* **28**, 229–238.

De Bock, D., Vanpaemel, G.: 2019, *Rods, Sets and Arrows. The Rise and Fall of Modern Mathematics in Belgium*, Springer.

Domke, R.: 2015, Kształcenie dzieci i młodzieży w Polsce w latach 70. XX wieku, *Studia Zachodnie* **17**, 240–261.

Dróbka, N.: 1970, Uwagi na temat realizacji nowego programu nauczania matematyki w liceum w pierwszym roku reformy. Uwagi na temat realizacji nowego programu w drugim i trzecim roku reformy, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 260–268.

Dubiel, W.: 1997, Dzieje teorii nauczania matematyki w polskiej szkole średniej, *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* **42**(3–4), 85–106.

Duda, R.: 1985, Kształcenie matematyczne przyszłych nauczycieli, *Dydaktyka Matematyki* **5**, 163–192.

Frédérique: 1970, *Les enfants et la mathématique*, Didier, Bruxelles.

Frédérique, et Papy: 1968, *L'enfant et les graphes*, Didier, Bruxelles.

Freudenthal, H.: 1983, Nowa matematyka czy nowe jej nauczanie?, *Wiadomości Matematyczne* **35**, 123–141.

Gellert, U., Rodriguez, J., Hahn, C., Kafoussi, S. (red.): 2015, *Educational Paths to Mathematics: A C.I.E.A.E.M. Sourcebook*, Springer, Cham.

Griesel, H.: 1971, *Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten: Band 1. Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie*, Schroedel Verlag, Hannover.

Gruszczyk-Kolczyńska, E.: 2017, Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei nowej matematyki do edukacji matematycznej dzieci, *Matematyczna Edukacja Dzieci* **2**, 5–48. `http://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr2/Gruszczyk.pdf`

Grzegorczyk, A.: 1970, O definicjach w nauczaniu matematyki, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 286–287.

Hawlicki, J.: 1978, *Do czego służą równania, Wyd. 2*, Instytut Wydawniczy „Nasza Księgarnia", Warszawa.

Hilton, P.: 1982, Fałszywe dychotomie w aktualnych poglądach na nauczanie matematyki i nauk przyrodniczych, *Dydaktyka Matematyki* **1**, 139–162.

Howson, A.: 1985, 75 lat International Commission on Mathematical Instruction, *Wiadomości Matematyczne* **26**, 205–224.

Jackson, A.: 1997, The Math Wars, California battles it out over mathematics education reform (Part I, Part II), *Notices of the American Mathematical Society* **44**(6–7), 695–702, 817–823.

Jeśmanowicz, L.: 1970, O geometrii i o podręcznikach w szkole średniej, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 268–278.

Jeśmanowicz, L., Hartman, S., Rasiowa, H.: 1967, O wykładzie "Wstęp do matematyki", *Wiadomości Matematyczne* **9**, 233–243.

Kilpatrick, J.: 2001, Understanding mathematical literacy: The contribution of research, *Educational Studies in Mathematics* **47**, 101–116.

Korczowski, H.: 1961, W poszukiwaniu matematyki podstaw, *Matematyka* **1961/1**, 20–27.

Krygowska, Z.: 1957, Zagadnienie nauczania matematyki (w szkołach średnich) na Międzynarodowej Konferencji UNESCO w Genewie w lipcu 1956, *Matematyka* **1957/2**, 32–44.

Krygowska, Z.: 1959, Analiza zasad i konstrukcji obecnego programu nauczania matematyki z punktu widzenia ich zgodności z zasadami współczesnej metodologii matematyki, *Matematyka* **55**, 11–24.

Krygowska, Z.: 1961, Międzynarodowa konferencja w sprawach nauczania matematyki w Krakowie, 3–11 sierpnia 1960, *Wiadomości Matematyczne* **4**, 289–293.

Krygowska, Z.: 1962, Dyskusja o nauczaniu geometrii na dorocznym kongresie nauczycieli matematyki szkół średnich w Belgii, *Wiadomości Matematyczne* **6**, 289–293.

Krygowska, Z.: 1968a, *Geometria dla klasy II liceum ogólnokształcącego*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1968b, Krakowski eksperyment programowy w zakresie nauczania początkowego matematyki, *Życie Szkoły* **6**, 7–13.

Krygowska, Z.: 1969, Le texte mathématique dans l'enseignement, *Educational Studies in Mathematics* **2**(2/3), 360–370.

Krygowska, Z.: 1970, Odpowiedź na zarzuty pod adresem podręcznika geometrii, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 288–300.

Krygowska, Z.: 1971a, La réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires en Pologne, *Chantiers de pédagogie mathématique* **19**, 99–107. `https://www.apmep-iledefrance.fr/IMG/pdf/pologne.pdf`

Krygowska, Z.: 1971b, Problèmes de la formation moderne des professeurs de mathématiques, *Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970* 347–352.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, tom 1*, WSIP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, tom 2*, WSIP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960–1980*, Wyd. Naukowe WSP, Kraków.

Krygowska, Z.: 1985, Wywiad dla Polskiego Radia, *Matematyka* **6** (1988), 324–327, przedruk: *Dydaktyka Matematyki* **12**, 25–29.

Krygowska, Z., Maroszkowa, J.: 1967, *Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Krygowska, Z., Moroz, H.: 1970, Une expérience concernant l'enseignement primaire de la mathématique, *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques*, Vol. 2, Paris: UNESCO, 58–81.

Kuratowski, K.: 1955, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa.

Kuratowski, K.: 1967, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego, wyd. III*, PWN, Warszawa.

Kuratowski, K., Mostowski, A.: 1952, *Teoria mnogości*, PTM, Warszawa.

Leray, J.: 1974, Matematyka nowoczesna. O reformie nauczania matematyki w szkołach średnich we Francji, *Wiadomości Matematyczne* **18**, 103–129.

Molęda, A., Piesyk, Z.: 1993, Przegląd zmian programów nauczania matematyki w szkole podstawowej w latach 1963–1990 w Polsce, *Folia mathematica* **6**, 25–56. `http://yadda.icm.edu.pl/yadda/element/bwmeta1.element.hdl_11089_14495`

Moroz, H.: 1972, *Problemy modernizacji początkowego nauczania matematyki*, Nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Moroz, H.: 1973, *Nasza matematyka 2*, WSiP, Warszawa.

Moroz, H.: 1986, Liczby w kolorach, w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, WSiP, Warszawa, t. 3, 32–37.

Nikodym, O.: 1930, *Dydaktyka matematyki czystej w zakresie gimnazium wyższego, t. 1. Liczby naturalne t. 2. Ułamki oraz ich algebra*, Książnica-Atlas, Lwów.

Noss, R.: 1994, Mathematics and ideology, w: R. Biehler, et al. (red.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, Kluwer Acad. Publ., New York, 431–441.

Nowecki, B.: 1984, *Krakowska szkoła dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Nowecki, B.: 1990a, Anna Zofia Krygowska, *Dydaktyka Matematyki* **12**, 7–23.

Nowecki, B.: 1990b, Bibliografia prac prof. dr A. Z. Krygowskiej, *Dydaktyka Matematyki* **12**, 31–43.

Opial, Z.: 1964, *Algebra wyższa*, Wydawnictwo UJ, Kraków (wyd. IX, 1976, PWN).

Opial, Z.: 1966, Nie chować głowy w piasek, *Matematyka* **1**(90), 5–10.

Papy, G.: 1971, A first introduction to the notion of topological space, *Educational Studies in Mathematics* **4**, 18–29.

Piaget, J.: 1970, *Strukturalizm*, PWN, Warszawa.

Piaget, J., Garcia, R.: 1989, *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

Puchalska-Ryger, E., Ryger, M.: 1972, *Matematyka dla klasy 1 szkoły podstawowej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Rachwał, G.: 1970, Uwagi o nowym programie planimetrii w liceum i jego realizacji, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 278–286.

Rasiowa, H.: 1967, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

Semadeni, Z. (red.): 1981, 1984, 1986, 1988, *Nauczanie początkowe matematyki, tomy 1, 2, 3, 4*, WSiP, Warszawa.

Servais, W., Varga, T. (red.): 1971, *Teaching school mathematics*, UNESCO, Penguin Books, Middlesex.

Sierpińska, A.: 1996, Whither mathematics education?, w: C. Alsina, et al. (red.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education, S.A.E.M.Thales*, Thales, Sevilla, 21–46.

Sierpińska, A., Kilpatrick, J.: 1998, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publ., Dordecht.

Siwek, H.: 1986, Równania i nierówności, w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 3, WSiP, Warszawa, 93–109.

Siwek, H.: 2004, Anna Zofia Krygowska w stulecie urodzin, *Matematyka* **6/2004**, 324–331.

Straszewicz, S.: 1966, *Arytmetyka i algebra w klasach V–VIII szkoły podstawowej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Szemińska, A.: 1981, Rozwój pojęć matematycznych u dziecka, w Z. Semadeni (red.), w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, WSiP, Warszawa, t. 1, 112–251.

Thom, R.: 1974a, Czy istnieje matematyka nowoczesna?, *Wiadomości Matematyczne* **18**, 130–142.

Thom, R.: 1974b, Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiadomości Matematyczne* **18**, 113–129.

Turnau, S.: 1983, Dissertations in mathematics education at the Higher School of Education in Cracow, 1968 to 1981: An Annotated Bibliography, *Journal for Research in Mathematics Education* **14**(4), 354–360.

e-mail: semadeni@mimuw.edu.pl