FOLIA 321

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 12(2020)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.12.12

Euklides

Elementy, Księga II

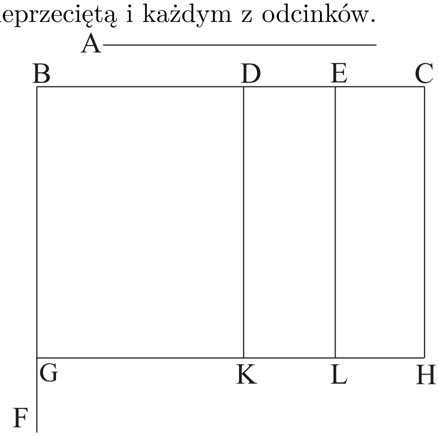
Definicje

1. Mówi się, że każdy równoległobok prostokątny jest zawarty między dwiema prostymi zawierającymi kąt prosty.

2. W każdym zaś obszarze równoległoboczym niech dowolnie jeden z równoległoboków wokół przekątnej z dwoma dopełnieniami nazwany będzie gnomonem.

Twierdzenie 1.

Jeśli są dwie proste, zaś jedna z nich będzie przecięta na pewną liczbę części, to prostokąt zawarty między tymi dwiema prostymi jest równy prostokątom zawartym między tą nieprzeciętą i każdym z odcinków.



Niech będą dwie proste A, BC i niech BC będzie przecięta dowolnie w punktach D, E. Twierdzę, że prostokąt zawarty między A, BC jest równy prostokątowi zawartemu między A, BD i temu między A, DE, i również temu między A, EC.

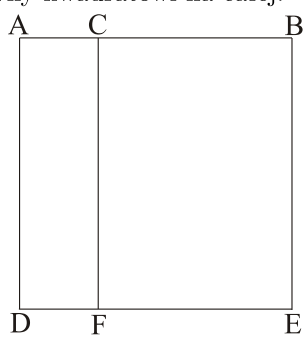
Niech bowiem BF będzie poprowadzona z B pod kątem prostym do BC, i niech BG stanie się równa A, i z jednej strony niech z G będzie poprowadzona GH równoległa do BC, z drugiej zaś z D, E, C będą poprowadzone DK, EL, CH równoległe do BG.

Zatem BH jest równy BK, DL, EH; i BH jest między A, BC, ponieważ zawarty między GB, BC, zaś BG (jest) równa A; zaś BK zawarty między A, BD, ponieważ zawarty między GB, BD, zaś BG (jest) równa A; zaś DL między A, DE, ponieważ DK, to znaczy BG, (jest) równa A; i podobnie również EH (jest) między A, EC; tak więc ten między A, BC jest równy temu między A, BD i temu między A, DE, i również temu między A, EC.

Tym sposobem, jeśli są dwie proste, zaś jedna z nich będzie przecięta na pewną liczbę części, to prostokąt zawarty między tymi dwiema prostymi jest równy prostokątom zawartym między tą nieprzeciętą i każdym z odcinków. Co było do okazania.

Twierdzenie 2.

Jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to prostokąt zawarty przez całą i każdy z odcinków jest równy kwadratowi na całej.



Niech bowiem AB będzie przecięta dowolnie w punkcie C. Twierdzę, że prostokąt zawarty między AB, BC razem z prostokątem zawartym między BA, AC jest równy kwadratowi na AB.

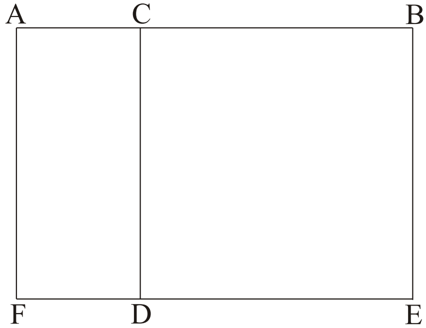
Niech bowiem kwadrat ADEB będzie opisany na AB i niech CF będzie (poprowadzona) przez C, równolegle do AD lub BE.

Zatem AE jest równy AF, CE; i AE (jest) kwadratem na AB; zaś AF prostokątem zawartym między BA, AC; jest bowiem zawarty między DA, AC, zaś AD (jest) równa AB; zaś CE (jest) między AB, BC, bowiem BE (jest) równa AB. Tak więc ten między BA, AC, razem z tym między AB, BC, jest równy kwadratowi na AB.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to prostokąt zawarty przez całą i każdy z odcinków jest równy kwadratowi na całej. Co było do okazania.

Twierdzenie 3.

Jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to prostokąt zawarty przez całą i jeden z odcinków jest równy prostokątowi zawartemu między odcinkami i kwadratowi na wspomnianym odcinku.



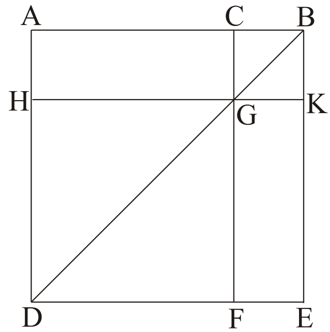
Niech bowiem prosta AB będzie ucięta dowolnie w C. Twierdzę, że prostokąt zawarty między AB, BC jest równy zawartemu między AC, CB, razem z kwadratem na BC.

Niech bowiem kwadrat CDEB będzie opisany na CB i niech ED będzie (poprowadzona) przez F, i niech AF będzie przez A, równolegle do CD lub BE. Zatem AE jest równy AD, CE; i AE jest prostokątem zawartym między AB, BC; jest bowiem zawarty między AB, BE, zaś BE (jest) równa BC. Zaś AD (jest) między AC, CB, bowiem DC równa CB. Zaś DB kwadratem na CB. Tak więc prostokąt zawarty między AB, BC jest równy prostokątowi zawartemu między AC, CB, razem z kwadratem na BC.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to prostokąt zawarty przez całą i jeden z odcinków jest równy prostokątowi zawartemu między odcinkami i kwadratowi na wspomnianym odcinku. Co było do okazania.

Twierdzenie 4.

Jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to kwadrat na całej jest równy kwadratom na odcinkach i podwojonym prostokątem zawartym między odcinkami.



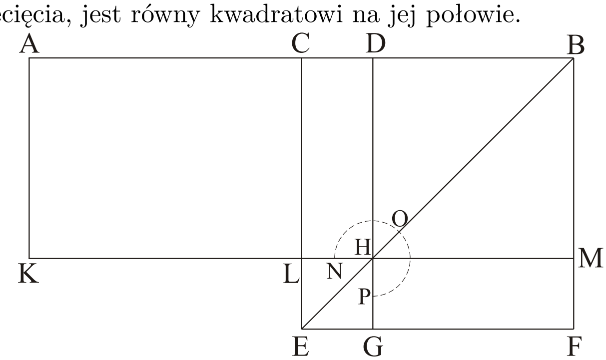
Niech bowiem linia AB będzie ucięta dowolnie w C. Twierdzę, że kwadrat na AB jest równy kwadratom na AC i CB oraz podwojonemu prostokątowi zawartemu między AC, CB.

Niech bowiem kwadrat ADEB będzie opisany na AB i niech B będzie połączony z D; i niech CF będzie poprowadzona przez C równolegle do AD lub BE; i niech HK będzie poprowadzona przez G równolegle do AB lub DE. Skoro zatem CF jest równoległa do AD, i BD padła na nie, to kąt zewnętrzny CGB jest równy wewnętrznemu i przeciwległemu ADB. Ale ADB jest równy ABD, skoro bok BA jest również równy AD. Zatem kąt CGB jest również równy GBC. Tak więc bok BC jest równy bokowi CG. Ale CB jest równy GK, zaś CG (jest równy) KB. Zatem GK jest równy KB; zatem CGKB jest równoboczny. Twierdzę, że również prostokątny. Skoro bowiem CG jest równoległa do BK i CB pada na nie, to kąty KBC, GCB są równe dwóm kątom prostym; zaś KBC (jest) kątem prostym; zatem BCG również (jest) kątem prostym. Tak więc przeciwległe CGK, GKB również (są) kątami prostymi. Zatem CGKB jest prostokątem. Wykazano również, że (jest) równoboczny. Jest zatem kwadratem i jest na CB. Z tego samego powodu HF jest również kwadratem; i jest na HG, to znaczy AC. Zatem kwadraty HF, KC są na AC, CB. A skoro AG jest równy GE, i AG jest między AC, CB, bowiem GC równy CB, to GE jest również równy temu między AC, CB. Zatem AG, GE są równe podwojonemu między AC, CB. HF, CK są również kwadratami na AC, CB. Zatem cztery HF, CK, AG, GE są równe kwadratom na AC, CB i podwojonemu prostokątowi zawartemu między AC, CB. Ale HF, CK, AG, GE są całym ADEB, jaką jest kwadrat na AB. Zatem kwadrat na AB jest równy kwadratom na AC, CB i podwojonemu prostokątowi zawartemu między AC, CB.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta dowolnie, to kwadrat na całej jest równy kwadratom na odcinkach i podwojonym prostokątem zawartym między odcinkami. Co było do okazania.

Twierdzenie 5.

Jeśli linia prosta jest przecięta na równe i nierówne odcinki, to prostokąt zawarty między nierównymi odcinkami całej, razem z kwadratem na niej między punktami przecięcia, jest równy kwadratowi na jej połowie.



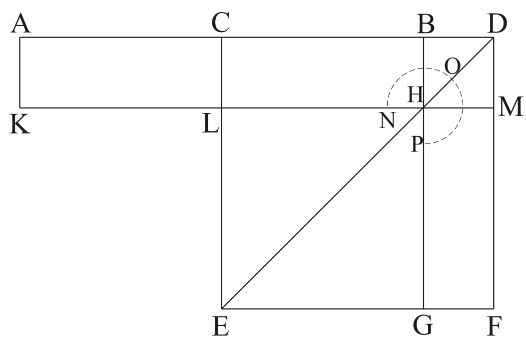
Niech bowiem prosta AB będzie przecięta, z jednej strony na równe odcinki w C, z drugiej zaś na nierówne w D. Twierdzę, że prostokąt zawarty między AD, DB razem z kwadratem na CD jest równy kwadratowi na CB.

Niech bowiem kwadrat CEFB będzie opisany na CB i niech BE będzie dołączona; i niech DG będzie poprowadzona przez D równolegle do CE lub BF; i niech KM będzie poprowadzona przez H równolegle do AB lub EF; i jeszcze niech AK będzie poprowadzona równolegle do CL lub BM. A skoro dopełnienie CH jest równe dopełnieniu HF, to niech DM będzie dodany do każdego; zatem cały CM jest równy całemu DF. Ale CM jest równy AL, skoro również AC jest równy CB; zatem również AL jest równy DF. Niech CH będzie dodany do obu. Zatem cały AH jest równy gnomonowi NOP. Ale AH jest pomiędzy AD, DB, bowiem DH (jest) równa DB; zatem również gnomon NOP jest równy temu między AD, DB. Niech LG, który jest równy temu na CD, będzie dodany do obu; zatem gnomon NOP i LG są równe prostokątowi zawartemu między AD, DB i kwadratowi na CD. Ale gnomon NOP i LG są całym kwadratem CEFB, który jest opisany na CB; zatem prostokąt zawarty między AD, DB, razem z kwadratem na CD jest równy kwadratowi na CB.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta na równe i nierówne odcinki, to prostokąt zawarty między nierównymi odcinkami całej, razem z kwadratem na niej między punktami przecięcia, jest równy kwadratowi na jej połowie. Co było do okazania.

Twierdzenie 6.

Jeśli linia prosta jest przecięta na dwie równe części, zaś do tej prostej jest dodana prosta, to prostokąt zawarty między całą razem z tą dodaną i tą dodaną z kwadratem na połowie, jest równy kwadratowi na prostej utworzonej z połowy i tej dodanej.



Niech bowiem prosta AB będzie przecięta na dwie równe części w punkcie C, i niech będzie dodana prosta BD. Twierdzę, że prostokąt zawarty między AD, DB z kwadratem na CB jest równy kwadratowi na CD.

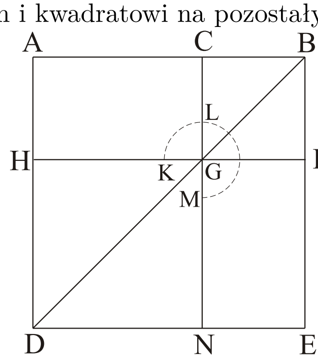
Niech bowiem kwadrat CEFD będzie opisany na CB i niech DE będzie dołączona; i niech, z jednej strony BG będzie poprowadzona przez B równolegle do EC lub DF, z drugiej zaś KM będzie poprowadzona przez punkt H równolegle do AB lub EF; i jeszcze niech AK będzie poprowadzona przez A równolegle do CL lub DM.

Skoro rzeczywiście AC jest równa CB, to również AL jest równy CH. Ale CH jest równy HF. Zatem również AL jest równy HF. Niech CM będzie dodany do obu; zatem cały AM będzie równy gnomonowi NOP. Ale AM jest pomiędzy AD, DB, bowiem DM jest równy DB. Zatem również gnomon NOP jest równy prostokątowi zawartemu między AD, BG. Niech do obu będzie dodany LG, który jest równy kwadratowi na BC; zatem prostokąt zawarty między AD, DB z kwadratem na CB jest równy gnomonowi NOP i LG. Ale gnomon NOP i LG są całym kwadratem CEFD, który jest na CD. Zatem prostokąt zawarty między AD, DB z kwadratem na CB jest równy kwadratowi na CD.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta na dwie równe części, zaś do tej prostej jest dodana prosta, to prostokąt zawarty między całą razem z tą dodaną i tą dodaną z kwadratem na połowie, jest równy kwadratowi na prostej utworzonej z połowy i tej dodanej. Co było do okazania.

Twierdzenie 7.

Jeśli linia prosta będzie przecięta dowolnie, to kwadrat na całej i ten na jednym z odcinków razem są równe podwojonemu prostokątowi zawartemu między całą i wspomnianym odcinkiem i kwadratowi na pozostałym odcinku.



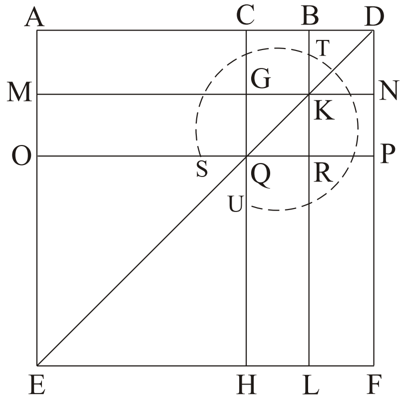
Niech bowiem prosta AB będzie przecięta dowolnie w punkcie C. Twierdzę, że kwadraty na AB, BC są równe podwojonemu prostokątowi zawartemu między AB, BC i kwadratowi na CA.

Niech bowiem kwadrat ADEB będzie opisany na AB i niech będzie narysowana figura. Skoro rzeczywiście AG jest równy GE, to niech CF będzie dodany do obu. Zatem cały AF jest równy całemu CE. Zatem cały AF, CE są podwojonym AF. Ale AF, CE są gnomonem KLM i kwadratem CF; zatem gnomon KLM i CF są podwojonym AF; zaś podwojony między AB, BC jest również podwojonym tego między AB, BC; bowiem BF równe BC. Zatem gnomon KLM i kwadrat CF są równe temu podwojonemu na AB, BC. Niech DG, który jest kwadratem na AC będzie dodany do obu. Zatem gnomon KLM i kwadraty BG, GD są równe podwojonemu prostokątowi zawartemu między AB, BC i kwadratowi na AC. Ale gnomon KLM i kwadraty BG, GD są całym ADEB i CF, jakimi są kwadraty opisane na AB, BC. Zatem kwadraty na AB, BC są równe podwojonemu prostokątowi zawartemu między AB, BC razem z kwadratem na AC.

Tym sposobem, jeśli linia prosta będzie przecięta dowolnie, to kwadrat na całej i ten na jednym z odcinków razem są równe podwojonemu prostokątowi zawartemu między całą i wspomnianym odcinkiem i kwadratowi na pozostałym odcinku. Co było do okazania.

Twierdzenie 8.

Jeśli linia prosta będzie przecięta dowolnie, to czterokrotność prostokąta zawartego między całą i jednym z odcinków razem z kwadratem na pozostałym odcinku, jest równy kwadratowi opisanemu na całej i wspomnianym odcinku, jak na jednej.



Niech bowiem prosta AB będzie przecięta dowolnie w punkcie C. Twierdzę, że czterokrotność prostokąta zawartego między AB, BC razem z kwadratem na AC jest równa kwadratowi opisanemu na AB, BC jak na jednej.

Niech bowiem prosta BD będzie przedłużona w prostą AB i niech BD stanie się równa CB; niech kwadrat AEFD będzie opisany na AD i niech będzie narysowana podwojona figura.

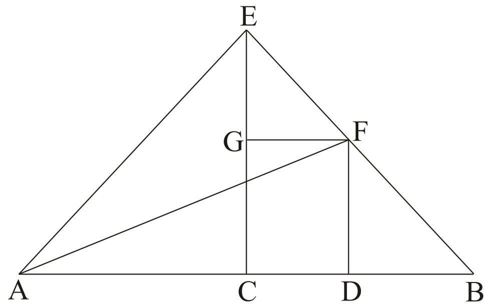
Skoro rzeczywiście CB jest równa BD, podczas gdy z jednej strony CB jest równa GK, z drugiej zaś BD (jest równa) KN, to również GK jest równa KN. Z tego samego powodu QR jest równa RP. Skoro jednak BC jest równy BD i GK (jest równy) KN, to również z jednej strony CK jest równy KD, z drugiej zaś GR (jest równy) RN. Ale CK jest równy RN, bowiem są dopełnieniami równoległoboku CP. Zatem również KD jest równy GR; zatem cztery DK, CK, GR, RN są równe względem siebie. Zatem te cztery są poczwórnym CK. Znowu, skoro CB jest równy BD, ale z jednej strony BD (jest równy) BK, to znaczy CG, z drugiej zaś CB jest równy GK, to znaczy GQ, to CG jest równa GQ. I skoro z jednej strony CG jest równa GQ, z drugiej zaś QR (jest równy) RP, to również z jednej strony AG jest równy MQ, z drugiej zaś QL (jest równy) RF. Ale MQ jest równy QL, bowiem są one dopełnieniami równoległoboku ML. Zatem również AG jest równy RF; zatem cztery AG, MQ, QL, RF są równe względem siebie. Zatem te cztery są poczwórnym AG. Zostało zaś wykazane, że cztery CK, KD, GR, RN są poczwórnym CK; zatem te osiem, które zawierają gnomon STU, jest poczwórnym AK. Skoro zatem AK jest między AB, BD, bowiem BK jest równy BD, to ten poczwórny między AB, BD jest poczwórnym AK. Zostało zaś wykazane, że również gnomon STU jest poczwórnym AK. Zatem ten poczwórny między AB, BD jest równy gnomonowi STU. Niech OH, który jest równy kwadratowi na AC będzie dodany do obu. Zatem poczwórny prostokąt zawarty między AB, DB razem z kwadratem na AC jest równy gnomonowi STU i OH. Ale gnomon STU I OH są całym kwadratem

AEFD, który jest opisany na AD. Zatem ten poczwórny między AB, BD razem z kwadratem na AC jest równy temu na AD; zaś BD jest równa BC. Zatem poczwórny prostokąt zawarty między AB, BC razem z kwadratem na AC, jest równy temu na AD, to znaczy kwadratowi opisanemu na AB i BC jako na jednej.

Tym sposobem, jeśli linia prosta będzie przecięta dowolnie, to poczwórny prostokąt zawarty między całą i jednym z odcinków razem z kwadratem na pozostałym odcinku, jest równy kwadratowi opisanemu na całej i wspomnianym odcinku, jak na jednej. Co było do okazania.

Twierdzenie 9.

Jeśli linia prosta będzie przecięta na równe i nierówne, to kwadraty na nierównych odcinkach całej są podwójnym kwadratem na połowie i tym na prostej między punktami przecięcia.



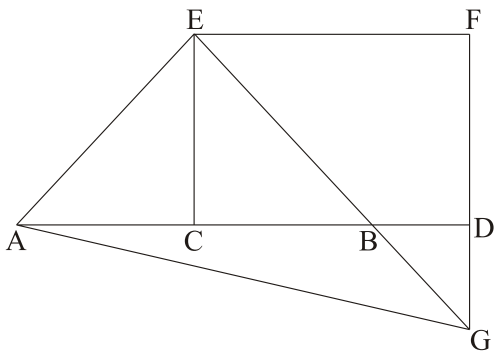
Niech bowiem prosta AB będzie przecięta na równe odcinki w C i nierówne w D. Twierdzę, że kwadraty na AD, DB są podwójnymi kwadratami na AC, CD.

Niech bowiem z C będzie poprowadzona CE pod kątem prostym do AB i niech stanie się równa AC lub CB; i niech EA, EB zostaną połączone; i niech DF będzie poprowadzona przez D równolegle do EC, i FG przez F do AB; i niech AF będzie połączona. A skoro AC jest równa CE, to kąt EAC jest również równy AEC. A skoro w C jest kąt prosty, to pozostałe EAC, AEC są równe jednemu kątowi prostemu; i są równe. Zatem każdy z CEA, CAE jest połową kąta prostego. Z tego samego powodu, również każdy z CEB, EBC jest połową kąta prostego. Zatem cały AEB jest kątem prostym. A skoro GEF jest połową kąta prostego, zaś EGH jest kątem prostym, bowiem jest równy wewnętrznemu i przeciwległemu ECB, to pozostały EFG jest połową kąta prostego. Zatem kąt GEF jest równy EFG, tak iż również bok EG jest równy GF. Skoro jednak w B jest połowa kąta prostego, zaś FDB jest kątem prostym, bowiem znowu jest równy wewnętrznemu i przeciwległemu ECB, to pozostały BFD jest połową kąta prostego. Zatem kąt B jest równy DFB, tak iż również bok FD jest równy bokowi DB. A skoro AC jest równa CE, to również ten na AC jest równy temu na CE. Zatem kwadraty na AC, CE są podwojeniem tego na AC. Kwadrat zaś na EA jest równy tym na AC, CE, bowiem ACE (jest) kątem prostym. Zatem ten na EA jest podwojeniem tego na AC. Znowu, skoro EG jest równy GF, to również ten na EG jest równy temu na GF. Zatem kwadraty na EG, GF są podwojeniem kwadratu na GF. Kwadrat zaś na EF jest podwojeniem kwadratu na GF. Zatem kwadrat na EF jest podwojeniem tego na GF. GF zaś jest równa CD. Zatem ten na EF jest podwojeniem tego na CD. Ten zaś na EA jest również podwojeniem tego na AC. Zatem kwadraty na AE, EF są podwojeniem kwadratów na AC, CD. Kwadrat zaś na AF jest równy tym na AE, EF, bowiem AEF jest kątem prostym. Zatem kwadrat na AF jest podwojeniem tych na AC, CD. Te zaś na AD, DF są równe temu na AF, bowiem w D jest kąt prosty. Zatem kwadraty na AD, DF są podwojeniem tych na AC, CD. DF zaś jest równa DB. Zatem kwadraty na AD, DB są podwojeniem kwadratów na AC, CD.

Tym sposobem, jeśli linia prosta będzie przecięta na równe i nierówne, to kwadraty na nierównych odcinkach całej są podwójnym kwadratem na połowie i tym na prostej między punktami przecięcia. Co było do okazania.

Twierdzenie 10.

Jeśli linia prosta jest przecięta na dwie równe części, zaś do tej prostej jest dodana prosta, to kwadrat na całej razem z tą dodaną i ten na dodanej są razem podwojeniem tego na połowie i kwadratu opisanego na połowie i dodanej, jako na jednej.



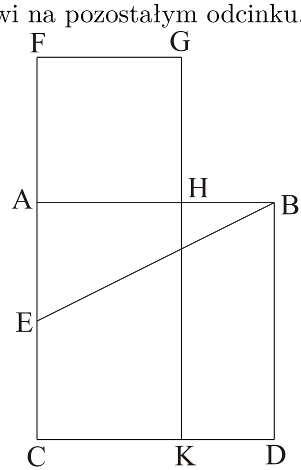
Niech bowiem jakaś prosta AB będzie ucięta w C i niech będzie do niej dodana jakaś prosta BD. Twierdzę, że kwadraty na AD, DB są podwojeniem kwadratów na AC, CD.

Niech z punktu C będzie poprowadzona CE pod kątem prostym do AB, i niech stanie się równą do AC lub CB; niech EA, EB zostaną połączone; i niech przez E będzie poprowadzona EF równolegle do AD, zaś przez D niech będzie poprowadzona FD równolegle do CE. A skoro jakaś prosta EF pada na równoległe proste EC, FD, to CEF, EFD są równe dwóm kątom prostym. Zatem FEB, EFD są mniejsze od dwóch kątów prostych; te zaś utworzone z tych mniejszych od dwóch kątów prostych przetną się. Zatem EB, FD, utworzone w kierunku B, D, przetną się. Niech będą utworzone i spotkają się w G, i niech AG będzie dołączona. A skoro AC jest równa CE, to kąt EAC jest również równy AEC; i w C jest kąt prosty. Zatem każdy z kątów EAC, AEC (jest) połową kąta prostego. Z tego samego powodu CEB, EBC również są połową kąta prostego. Zatem AEB jest kątem prostym. A skoro EBC jest połową kąta prostego, to również DBG jest połową kąta prostego; zaś BDG również jest kątem prostym, bowiem jest równy DCE; są bowiem naprzemienne. Zatem pozostały DGB jest połową kąta prostego. Zatem DGB jest równy DBG, tak iż bok BD jest również równy bokowi GD. Znowu, skoro EGF jest połową kąta prostego, zaś w F jest kąt prosty, bowiem jest równy przeciwległemu w C, to pozostały FEG jest połową kąta prostego. Zatem kąt EGF (jest) równy FEG; tak iż również bok GF jest równy bokowi EF. A skoro EC jest równa CA, to kwadrat na EC jest równy kwadratowi na CA. Zatem kwadraty na EC, CA są podwojonym kwadratem na CA. Ten zaś na EA jest równy tym na EC, CA. Zatem kwadrat na EA jest podwojonym kwadratem na AC. Znowu, skoro FG jest równa EF, to również ten na FG jest równy temu na EF. Zatem ta na GF, FE są podwojeniem tego na EF. Ten zaś na EG jest równy tym na GF, FE. Zatem ten na EG jest podwojeniem tego na EF; zaś EF równa CD. Zatem kwadrat na EG jest podwojeniem tego na CD. Zostało zaś wykazane, że ten na ED (jest) tym podwojonym na AC. Zatem kwadraty na AE, EG są podwojeniem kwadratów na AC, CD. Kwadrat zaś na AG jest równy kwadratom na AE, EF. Zatem ten na AG jest podwojeniem tych na AC, CD. Te zaś na AD, DG są równe temu na AG. Zatem kwadraty na AD, DG są podwojeniem kwadratów na AC, CD. DG zaś równa DB. Zatem kwadraty na AD, DB są podwojeniem kwadratów na AC, CD.

Tym sposobem, jeśli linia prosta jest przecięta na dwie równe części, zaś do tej prostej jest dodana prosta, to kwadrat na całej razem z tą dodaną i ten na dodanej są razem podwojeniem tego na połowie i kwadratu opisanego na połowie i dodanej, jako na jednej. Co było do okazania.

Twierdzenie 11.

Przeciąć daną prostą tak aby prostokąt zawarty między całą i jednym z odcinków był równy kwadratowi na pozostałym odcinku.



Niech AB będzie daną prostą. Należy przeciąć AB tak, aby prostokąt zawarty między całą i jednym z odcinków stał się równy kwadratowi na pozostałym odcinku.

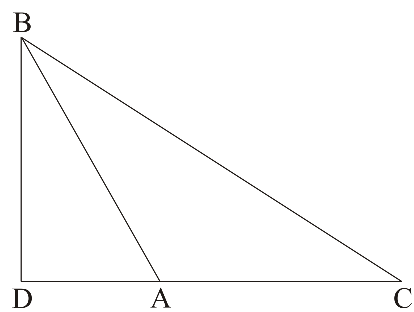
Niech bowiem kwadrat ABDC będzie opisany na AB i niech AC będzie podzielona na dwie równe części w punkcie E, i niech BE będzie dołączona. Niech CA będzie poprowadzona do F i niech EF stanie się równa BE; i niech kwadrat FH będzie opisany na AF, i niech GB będzie poprowadzona przez K. Twierdzę, że AB została przecięta tak, aby prostokąt zawarty między AB, BH stał się równy kwadratowi na AH.

Skoro bowiem prosta AC została przecięta na dwie równe części w E, zaś FA została do niej dodana, to prostokąt zawarty między CF, FA, razem z kwadratem na AE, jest równy kwadratowi na EF; zaś EF równa EB. Zatem ten zawarty między CF, FA, razem z kwadratem na AE, jest równy kwadratowi na EB. Ale ten na BA i AE są równe temu na EB, bowiem w A jest kąt prosty. Zatem ten między CF i FA, razem z tym na AE, jest równy tym na BA, AE. Niech ten na AE będzie odjęty od obu. Zatem pozostały prostokąt zawarty między CF, FA jest równy kwadratowi na AB. A skoro z jednej strony FK jest między CF i FA, bowiem AF jest równa FG, z drugiej zaś AD (jest) na AB, to FK jest równy AD. Niech AK będzie odjęty od obu. Zatem pozostały FH jest równy HD. A skoro z jednej strony HD jest między AB, BH, bowiem AB jest równa BD, z drugiej zaś FH (jest) na H, to prostokąt zawarty między AB, BH jest równy kwadratowi na HA.

Tym samym, dana prosta została przecięta w H tak, aby prostokąt zawarty między AB i BH stał się równy kwadratowi na HA. Co było do okazania.

Twierdzenie 12.

W trójkątach rozwartokątnych kwadrat na boku przeciwległym do kąta rozwartego jest większy od kwadratów na bokach zawierających kąt rozwarty o dwukrotność tego zawartego przez jeden z boków wokół kąta rozwartego, na który pada prostopadła i ta odcięta na zewnątrz przez prostopadłą do kąta rozwartego.



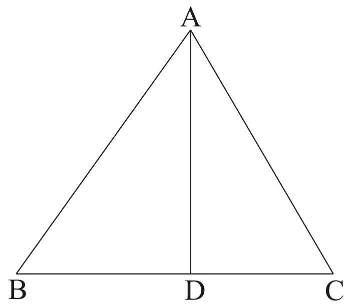
Niech ABC będzie trójkątem rozwartokątnym mającym kąt rozwarty BAC i niech BD będzie poprowadzona z punktu B prostopadle do utworzonej CA. Twierdzę, że kwadrat na BC jest większy od tych na BA, AC o dwukrotność prostokąta zawartego między CA, AD.

Skoro bowiem prosta CD została przecięta dowolnie w punkcie A, to ten na DC jest równy tym na CA, AD o dwukrotność prostokąta zawartego między CA, AD. Niech ten na DB będzie dodany do obu. Zatem te na CD, DB są równe kwadratom na CA, AD, DB i dwukrotnością prostokąta zawartego między CA, AD. Ale ten na CB jest równy tym na CD i DB, bowiem w D jest kąt prosty. Ten zaś na AB równy tym na AD i DB. Zatem kwadrat na CB jest równy kwadratom na CA, AB i dwukrotnością prostokąta zawartego między CA, AD; tak iż kwadrat na CB jest większy od kwadratów na CA, AB o dwukrotność prostokąta zawartego między CA, AD.

Tym sposobem, w trójkątach rozwartokątnych kwadrat na boku przeciwległym do kąta rozwartego jest większy od kwadratów na bokach zawierających kąt rozwarty o dwukrotność tego zawartego przez jeden z boków wokół kąta rozwartego, na który pada prostopadła i ta odcięta na zewnątrz przez prostopadłą do kąta rozwartego. Co było do okazania.

Twierdzenie 13.

W trójkątach ostrokątnych kwadrat na boku przeciwległym do kąta ostrego jest mniejszy od kwadratów na bokach zawierających kąt ostry o dwukrotność tego zawartego przez jeden z boków wokół kąta ostrego, na który pada prostopadła i ta odcięta wewnątrz przez prostopadłą do kąta ostrego.



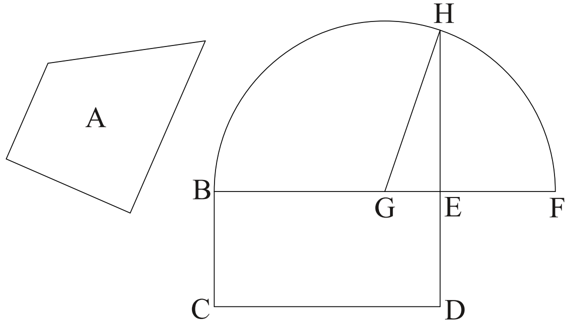
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym mającym kąt ostry w B i niech AD będzie poprowadzona z punktu A prostopadle do BC. Twierdzę, że kwadrat na AC jest mniejszy od kwadratów na CB, BA o dwukrotność prostokąta zawartego między CB, BD.

Skoro bowiem prosta CB została przecięta dowolnie w D, to kwadraty na CB, BD są równe dwukrotności prostokąta zawartego między CB, BD i kwadratowi na DC. Niech kwadrat na DA będzie dodany do obu. Zatem kwadraty na CB, BD, DA są równe dwukrotności prostokąta zawartego między CB, BD i kwadratom na AD, DC. Ale ten na AB (jest) równy tym na BD, DA, bowiem w D jest kąt prosty; ten zaś na AC (jest) równy tym na AD, DC. Zatem te na CB, BA są równe temu na AC i dwukrotności tego między CB, BD; tak iż tylko ten jest mniejszy od kwadratów na CB, BA o dwukrotność prostokąta zawartego między CB, BD.

Tym sposobem, w trójkątach ostrokątnych kwadrat na boku przeciwległym do kąta ostrego jest mniejszy od kwadratów na bokach zawierających kąt ostry o dwukrotność tego zawartego przez jeden z boków wokół kąta ostrego, na który pada prostopadła i ta odcięta wewątrz przez prostopadłą do kąta ostrego. Co było do okazania.

Twierdzenie 14.

Zbudować kwadrat równy danej figurze prostoliniowej.



Niech A będzie daną figurą prostoliniową; należy zbudować kwadrat równy figurze prostoliniowej A.

Niech bowiem będzie zbudowany równoległobok prostokątny BD równy figurze prostolinijnej A. Zatem jeśli rzeczywiście BE jest równy ED, wtedy to, co zostało podjęte, zostało też wykonane; bowiem kwadrat BD, równy figurze prostoliniowej A, został zbudowany. Jeśli zaś nie, to jedna z BE, ED jest większa. Niech BE będzie większy i niech będzie poprowadzony/przedłużony do F; i niech EF stanie się równy ED, i niech BF będzie podzielony na dwie równe części w G; i niech ze środkiem w G i promieniem jednej z GB, GF, będzie opisany półokrąg BHF; i niech DE będzie poprowadzona/przedłużona do H, i niech GH będzie dołączona.

Skoro rzeczywiście prosta BF została przecięta równo w G i nierówno w E, to prostokąt zawarty między BE, EF, razem z kwadratem na EF, jest równy kwadratowi na GF, GF zaś (jest) równa GH. Zatem ten między BE, EF, razem z tym na GE jest równy temu na GH. Kwadraty zaś na HE, EG są równe temu na GH. Zatem ten zawarty między BE, EF, razem z tym na GE, jest równy tym na HE, EG. Niech kwadrat GE będzie odjęty od obu. Zatem pozostały prostokąt zawarty między BE, EF jest równy kwadratowi na EH. Ale BD jest tym między BE, EF, bowiem EF (jest) równa ED. Zatem równoległobok BD jest równy kwadratowi na ED; zaś BD (jest) równy figurze prostolinijnej A. Zatem również figura prostolinijna A jest równa kwadratowi, który może być opisany na EH.

Tym sposobem, został zbudowany kwadrat, konkretnie ten, który może być opisany na EH, równy danej figurze prostolinijnej A. Co było do okazania.

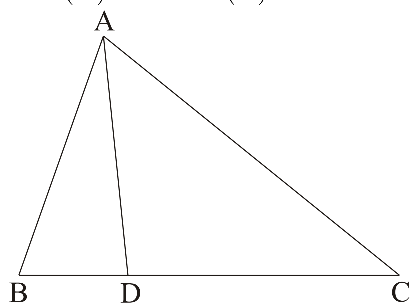
Podstawa przekładu:

Podstawa przekładu: Heiberg, Johan Ludvig, *Euclidis Elementa*, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg. Vol 1–5. Teubner, Lipsiae 1883–1888

Heron

Metrika, I.5

Niech będzie trójkąt ostrokątny ABC mający z jednej strony AB z 13 ($\iota\gamma$) monad, z drugiej zaś BC z 14 ($\iota\delta$) i AC z 15 ($\iota\varepsilon$) monad. Znaleźć jego powierzchnię.



Jest oczywiste, zgodnie z tym, co zostało powiedziane, że kąt w B jest ostry; ponieważ kwadrat między AC jest mniejszy od kwadratów między AB, BC.

Niech AD, prostopadle do BC, będzie poprowadzona. Zatem niech ten między AC będzie mniejszy od tych między AB, BC o dwa razy między CB, BD, jak zostało wykazane; i z jednej strony te między AB, BC są z 365 ($\tau\xi\varepsilon$) monad, z drugiej zaś ten między AC z 225 ($\sigma\kappa\varepsilon$) monad; zatem dwa razy ten między resztą CB, BD jest ze 140 ($\rho\mu$) monad; zatem jeden raz ten między CB, BD jest z 70 (o) monad; i BC jest z 14 ($\iota\delta$) monad; zatem BD będzie z 5 (ε) monad. Skoro ten na AB jest równy tym na AD, DB i z jednej strony ten na AB jest ze 169 ($\rho\xi\theta$) monad, z drugiej zaś ten na BD jest z 25 ($\kappa\varepsilon$) monad, zatem ten na pozostałym AD będzie ze 144 ($\rho\mu\delta$) monad; zatem sama AD będzie z 12 ($\iota\beta$) monad; i również BC jest z 14 ($\iota\delta$) monad; zatem ten między BC, AD będzie ze 168 ($\rho\xi\eta$) monad; i jest podwojeniem trójkąta ABC; zatem trójkąt ΑΒΓ będzie z 84 ($\pi\delta$) monad.

Metoda zaś będzie następująca. 13 ($\iota\gamma$) przez siebie daje 169 ($\rho\xi\theta$); i 14 ($\iota\delta$) przez siebie daje 196 (ρϙς); i 15 ($\iota\varepsilon$) przez siebie daje 225 ($\sigma\kappa\varepsilon$). Połącz 169 ($\rho\xi\theta$) i 196 (ρϙς): co daje 365 ($\tau\xi\varepsilon$); z tych odejmij 225 ($\sigma\kappa\varepsilon$): co daje pozostałe 140 ($\rho\mu$); od tych, połowę: co daje 70 (o); zastosuj do 14 ($\iota\delta$): co daje 5 (ε); i 13 ($\iota\gamma$) przez siebie: co daje 169 ($\rho\xi\theta$); z których odejmij 5 (ε) przez siebie: pozostanie 144 ($\rho\mu\delta$); z tych bok (πλευρά): co daje 12 ($\iota\beta$); tak, iż będzie to prostopadła. Pomnóż te przez 14 ($\iota\delta$): co daje 168 ($\rho\xi\eta$); z tych połowę: 84 ($\pi\delta$). Taka będzie powierzchnia.

Podstawa przekładu:

Schöne, Hermann. Herons von Alexandria, *Vermessungslehre und Dioptra, Opera quae supersunt omnia.* Tuebner, Leipzig 1903

Tłumaczenie: Piotr Błaszczyk[1], Kazimierz Mrówka[2]

[1] *Instytut Matematyki,*
Uniwersytet Pedagogiczny,
ul Podchorążych 2
e-mail: piotr.blaszczyk@up.krakow.pl

[2] *Instytut Filozofii,*
Uniwersytet Pedagogiczny,
ul Podchorążych 2
e-mail: kazimierz.mrowka@up.krakow.pl