FOLIA 321

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 12(2020)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.12.8

Karolina Karpińska, Bogumiła Klemp-Dyczek

Geometria kół Otta Reichela jako przykład pracy z uczniem zdolnym na lekcjach matematyki w II połowie XIX wieku*

Abstract. The paper is devoted to the discussion of the tasks related to finding the geometric locus of points. These tasks were included in the article Beiträage fäar den Unterricht in der Geometrie ("Contribution to the teaching of geometry") by Otto Reichel (Thorn, 1866), a teacher of Toruń gymnasium in the 1860s. The solution of most of these tasks went beyond the curricula determined by the then educational authorities. It is an example of self-extension of the mathematics curriculum by a teacher in a school for gifted students in order to better prepare young people for matriculation examinations, university studies, and later professional careers.

Metody rozpoznawania uczniów zdolnych oraz sposoby kształcenia i rozwijania ich umiejętności począwszy od XIX wieku były przedmiotem badań wielu psychologów. Badania te nasiliły się w XXI wieku. Padają opinie, iż „wiek XXI ma szansę być erą 'Ruchu na rzecz Kształcenia Uczniów Zdolnych'[1] oraz „pedagogika zdolności i twórczości powinna być stałym, ważnym i znaczącym modułem w kształceniu zawodowym nauczycieli"[2]. Kształcenie uczniów zdolnych jest ważnym problemem nie tylko dla polskiej oświaty, ale też dla edukacji w państwach należących do Unii Europejskiej. W 2007 roku, podczas „COST Strategic Workshop" przedstawiciele państw członkowskich ustalili rezolucję związaną z kształceniem uczniów zdolnych. Zwrócono w niej uwagę na to, że aby zwiększyć konkurencyjność europejskiej nauki, ekonomii i gospodarki w porównaniu ze światowym poziomem, należy zadbać o rozwój potencjału drzemiącego w wybitnie uzdolnionych i utalentowanych młodych Europejczykach. W związku z tym, zaczęto

*2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97G40; Secondary: 01A55

Keywords and phrases: *history of mathematics education, mathematics education on the Polish territories in the 19th c., geometry, geometric constructions, gifted education, Otto Reichel*

[1] J. Łukasiewicz-Wieleba, A. Baum, Kompleksowe wspieranie uczniów uzdolnionych. Program WARS i SAWA, Warszawa 2015, s. 7.

[2] W. Limont, „Stań na ramionach gigantów", czyli uczeń zdolny jako problem wychowawczy, *Psychologia wychowawcza* 3(2013), s. 126.

prowadzić badania dotyczące opracowania m.in. skutecznych strategii kształcenia osób zdolnych. Wprowadzano pierwsze zmiany w edukacji uczniów zdolnych oraz zmiany w kształceniu nauczycieli. Prowadzono też badania nad pracą z uczniem uzdolnionym matematycznie, m.in. w ramach projektu „Jak rozwijać zainteresowania matematyczne uczniów gimnazjum?" współfinansowanego przez Unię Europejską (autor projektu: Karolina Rojowska).

„Jeśli stoję dalej (niż ty i Descartes) to dzięki temu, że stoję na ramionach gigantów" – to słynne zdanie Izaaka Newtona (z listu do Roberta Hooke'a) można rozumieć następująco: bazując na wiedzy i doświadczeniu, które zgromadziły wcześniejsze pokolenia można odkrywać nowe horyzonty, idee i koncepcje w nauce i nauczaniu. W myśl tej metafory, warto zbadać środki, dzięki którym uzyskiwano wysokie efekty kształcenia w zakresie matematyki w minionych wiekach, warto zbadać dawne sposoby pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie i wyciągnąć z nich wnioski dla współczesnej praktyki edukacyjnej. Szczególnie wartościowe jest opracowanie dotyczące dwóch rodzajów szkół średnich: gimnazjów (ukierunkowanych na kształcenie przedmiotów humanistycznych) i szkół typu realnego (o profilu matematyczno-przyrodniczym). Pierwsze europejskie gimnazja powstały już w XVI wieku, szkoły realne dopiero w wieku XIX, jako skutek rewolucji przemysłowej. Do tych instytucji przeprowadzano egzaminy wstępne, które w zakresie matematyki obejmowały zazwyczaj cztery podstawowe działania arytmetyczne w liczbach całkowitych w zakresie od 1 do 100.

1. Szkoły dla uczniów zdolnych

Rok 1788 przyniósł wprowadzenie pierwszego na świecie dekretu ustanawiającego egzaminy maturalne. Miało to miejsce w Prusach. W myśl tego zarządzenia matury miały być przeprowadzane na zakończenie nauki w wybranych typach szkół średnich i jedynie osoby posiadające świadectwo maturalne mogły rozpocząć studia uniwersyteckie[3]. Celem tych egzaminów było wyrównanie poziomu wiedzy osób rozpoczynających studia, a konsekwencją wprowadzenia – ujednolicenie programów nauczania we wszystkich szkołach średnich w danym kraju. Zarządzenia z 1788 roku nie wymieniały matematyki wśród przedmiotów maturalnych, uzupełniono to dopiero blisko ćwierć wieku później. Pierwsze zarządzenie ustanawiające matematykę obowiązkowym przedmiotem maturalnym wydano 17 lutego 1812 roku w Księstwie Warszawskim, drugie – 25 czerwca 1812 roku w Prusach, w innych krajach uczyniono to nawet kilkadziesiąt lat później, np. w Austrii miało to miejsce dopiero w 1849 roku. Począwszy od drugiej dekady XIX wieku regu-

[3] Por. K. Karpińska, S. Domoradzki, O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku, *Antiquitates Mathematicae* 11(2017), s. 157–201.

larnie wprowadzano zarządzenia, w których omawiano programy nauczania zalecane do realizacji w poszczególnych klasach szkół elementarnych i szkół średnich. Początkowo zarządzenia te nie zawsze były respektowane przez szkoły, co było konsekwencją np. niestabilnej sytuacji politycznej. Dokonując pewnego uogólnienia można powiedzieć, że proces ujednolicania programów nauczania trwał niemalże do połowy XIX wieku. Podobnie było na ziemiach polskich.

W latach 60. XIX wieku prawo do przeprowadzania matur na ziemiach polskich miały gimnazja i szkoły realne pierwszego stopnia i to one realizowały najszersze programy nauczania. Były to szkoły dla uczniów zdolnych, mających łatwość w przyswajaniu materiału, ale też wykazujących logiczne i twórcze myślenie, bo jedynie te osoby mogły podołać tak rozbudowanym programom nauczania. Do klas najwyższych docierali jedynie wybrani uczniowie i nie wszyscy z nich decydowali się przystąpić do matury. Matury były egzaminami prestiżowymi – charakteryzowały się wysokim poziomem trudności, a uzyskanie świadectwa dojrzałości otwierało drzwi do stanowisk urzędniczych na szczeblu państwowym (nie trzeba było mieć do tego ukończonych studiów uniwersyteckich). Gimnazja i szkoły realne miały więc dwa zadania: 1. przygotować młodzież do sprawnego funkcjonowania w społeczeństwie, oraz 2. przygotować do studiów uniwersyteckich.

Realizacja tych dwóch zadań była możliwa dzięki odpowiednio wykształconej kadrze nauczycielskiej[4]. Nauczyciele szkół przygotowujących do egzaminów maturalnych musieli mieć ukończone studia uniwersyteckie, a od drugiej dekady XIX wieku mieli również obowiązek prowadzenia działalności naukowej – zostało to uregulowane ministerialnie poprzez nałożenie na szkoły obowiązku wydawania corocznych sprawozdań ze swojej działalności, w których oprócz programów nauczania, spisów nauczycieli, informacji o maturach i maturzystach, należało drukować prace naukowe wybranych nauczycieli danej szkoły. Te prace były różnej jakości – mniej lub bardziej twórcze, dotyczyły matematyki wyższej, ale również matematyki szkolnej i dydaktyki. W XIX wieku w szkołach bardzo często pracowali nauczyciele, którzy byli w trakcie przygotowywania doktoratu, byli też tacy, którzy posiadali stopień doktora ale mieli aspiracje akademickie – wszyscy oni w sprawozdaniach szkolnych publikowali wyniki swoich najnowszych badań.

2. Gimnazjum i szkoła realna pierwszego stopnia w Toruniu

Jedną z największych placówek edukacyjnych na ziemiach polskich w latach 60 XIX wieku była instytucja w Toruniu, w której skład wchodziło gimnazjum i szkoła realna pierwszego stopnia. Instytucja ta miała bogate tradycje sięgające XVI wieku – została założona w 1568 roku jako szkoła protestancka, w czasach swojej działalności przeżywała wzloty i upadki, uwarunkowane głównie przez zmieniającą się sytuację polityczną Torunia, jednakże, z całą pewnością można powiedzieć, że była to jedna z najlepszych placówek edukacyjnych najpierw pol-

[4] Por. K. Karpińska, Mathematics teaching in gymnasia and real schools in Poland in the years 1795–1918: Schools with Polish and German as the language of instruction – comparison, w: É. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)* (Skriftserie 2019, nr 11), Oslo Metropolitan University, Oslo 2019, s. 727–758.

skich Prus Królewskich, później zaboru pruskiego, a od 1920 roku – II Reczypospolitej[5], uczniowie chcąc uczęszczać do tej szkoły pokonywali pieszo nawet 1000 km (szli np. z Siedmiogrodu)[6].

Po II rozbiorze Polski Toruń trafił do zaboru pruskiego, a instytucja toruńska stała się częścią pruskiego systemu edukacji. Językiem wykładowym był tam język niemiecki. Wśród uczniów znajdowali się Polacy, rdzenni i napływowi Niemcy oraz Żydzi[7]. Kadrę pedagogiczną stanowili nauczyciele o możliwie najwyższych kwalifikacjach. Przykładowo, w roku szkolnym 1862/1863 na 22 nauczycieli 13 posiadało stopień naukowy doktora[8]. Nauczyciele często byli wybitnymi dydaktykami i znawcami przedmiotów, które wykładali, np. w latach 1863–1894 nauczycielem matematyki w placówce toruńskiej był Maksymilian Curtze – uznany pruski historyk matematyki[9]. Nauczyciele publikowali też podręczniki, np.: *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen* („Podstawy geometrii wykreślnej, geometrii analitycznej, teorii stożkowych i prostych szeregów") (Essen, 1860) Eduarda Fassbendera – nauczyciela w szkole realnej w Toruniu w latach 1856–1883. W sprawozdaniach szkolnych publikowali też artykuły dotyczące nauczania, np. w Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen („Obliczanie cięciw i rozwiązywanie trójkątów według Kopernika") Eduarda Fassbendera (Thorn, 1872)[10] zostało zaznaczone, że uczniowie instytucji toruńskiej byli zaznajamiani z „systemem świata" Kopernika, a szczególną wagę przykładano tam do trygonometrii płaskiej i sferycznej, ponieważ u astronoma stanowiły one podstawę wszelkich rozważań dotyczących struktury wszechświata.

W dziewiętnastowiecznych gimnazjach i szkołach typu realnego nauczanie matematyki było skoncentrowane wokół zagadnień geometrycznych. Samuel Dickstein w Gieometryi elementarnej uzasadnił, dlaczego właśnie geometrię uznawano wówczas za niezbędną część „systemu wychowania szkolnego i domowego"[11]. Jako pierwszy powód podał jej niezwykle ważne zastosowania: „bez znajomości podstawowych form geometrycznych i ich najprostszych własności nie mogą się obejść nauki fizyczne, rzemiosło i sztuki"[12]. Dalej, upatrywał w geometrii naukę, która

[5] K. Podlaszewska, S. Salmonowicz, Z. Zdrójkowski, *Krótka historia Gimnazjum Toruńskiego* 1568–1968, Toruń 1986, s. 134.

[6] *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn, 1867, s. 8.

[7] *Gymnasium mit Realschule I Ordnung zu Thorn*, Thorn 1869–1875, 1881; *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1861–1868; *Königliches evangelisches Gymnasium zu Thorn*, Thorn 1859, 1860; *Königliches Gymnasium mit Realgymnasium zu Thorn*, Thorn 1885; *Nachricht von dem Gymnasium zu Thorn*, Thorn 1825, 1830–1833, 1836–1842, 1845–1852; *Nachricht von dem Gymnasium zu Thorn*, Thorn 1853; *Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn*, Thorn 1855; *Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn*, Thorn 1856–1858.

[8] K. Karpińska, Troska o naukowy wymiar nauczania matematyki w Szkole Realnej w Toruniu w II połowie XIX wieku, *Antiquitates Mathematicae*, t. 8 (1), 2014, s. 88.

[9] K. Karpińska, B. Klemp-Dyczek, Matura z matematyki w Gimnazjum w Toruniu w II połowie XIX w., w: *Nauka-Etyka-Wiara* 2013, *Nauka – możliwości i ograniczenia*, Konferencja CHFPN 30 maja – 2 czerwca 2013, Warszawa 2013, s. 184–185.

[10] E. Fassbender, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen, w: *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1872.

[11] S. Dickstein, *Gieometryja elementarna*, Warszawa 1889, s. 66.

[12] Ibidem, s. 66–67.

rozwija umysł młodego człowieka, zmusza go do szukania związków pomiędzy różnymi formami geometrycznymi, a „abstrakcyjne, na pozór suche i nie zajmujące twierdzenia, przy umiejętnym wykładzie, stają się żywemi, rozbudzają ciekawość i usposabiają umysł do samodzielnego użytku sił własnych”[13]. W zależności od preferencji nauczycieli, w jednych szkołach większą wagę przykładano np. do geometrii analitycznej (tak było w Gimnazjum w Inowrocławiu), a w innych do konstrukcji geometrycznych. W Toruniu szczególne wartości dydaktyczne przypisywano właśnie zadaniom konstrukcyjnym – były to zadania wieloetapowe, przez co uczyły wiązania ze sobą różnych twierdzeń matematycznych, łączenia nowej wiedzy z wiedzą już zdobytą, ćwiczyły logiczne myślenie.

W II połowie XIX wieku w gimnazjum i szkole realnej w Toruniu wykorzystywano następujące podręczniki: *Die Elementar Mathematik* („Matematyka elementarna”) L. Kambly’ego[14], *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schul- und Selbst-Unterricht* („Podstawy matematyki czystej dla studiów szkolnych i własnych”) K. Koppego[15], *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen* („Podstawy geometrii wykreślnej, geometrii analitycznej, teorii stożkowych i prostych szeregów”) E. Fassbendera [16], *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen* („Twierdzenia matematyki elementarnej do wykorzystania w gimnazjach i szkołach realnych”) F. G. Mehlera [17] oraz *Methodisch geordnete Aufgabensammlung* („Metodycznie uporządkowany zbiór zadań”) F. Bardeya[18]. Zadania konstrukcyjne pojawiały się we wszystkich wymienionych podręcznikach, dodatkowo Kambly i Koppe wprowadzili definicję miejsca geometrycznego punktów, rozwiązali kilka zadań z tym związanych i podali listę zadań do samodzielnego rozwiązania przez uczniów. Okazuje się jednak, że materiał tam zawarty nie spełniał oczekiwań – w zakresie konstrukcji geometrycznych nie przygotowywał młodzieży należycie do studiów uniwersyteckich, o czym informowali sami absolwenci. Taka informacja pojawiła się w artykule Beiträge für den Unterricht in der Geometrie Otta Reichela[19] (Thorn,

---

[13] Ibidem, s. 67.

[14] L. Kambly, *Die Elementar Mathematik*, cz. 1: *Arithmetik und Algebra* (wyd. 21), cz. 2: *Planimetrie* (wyd. 44), cz. 3: *Ebene und Sphärische Trigonometrie* (wyd. 13), cz. 4: *Stereometrie* (wyd. 10), Breslau, od 1876 do 1878.

[15] K. Koppe, *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schul- und Selbst-Unterricht*, cz. 1: *Arithmetik und Algebra* (wyd. 4), cz. 2: *Planimetrie* (wyd. 4), cz. 3: *Stereometrie* (wyd. 7), cz. 4: *Ebene Trigonometrie* (wyd. 5), Essen, od 1852 do 1871.

[16] E. Fassbender, *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen*, Essen 1860.

[17] F. G. Mehler, *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen* (wyd. 4), Berlin 1869.

[18] F. Bardey, *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig 1888.

[19] Otto Johann Emil Reichel urodził się 25 lutego 1836 roku w Eisenspalterei koło Neustadt-Eberswalde, jako syn inspektora hutniczego. W 1854 roku ukończył Gimnazjum zum grauen Kloster w Berlinie i rozpoczął studia na tamtejszym uniwersytecie. Dwa lata później przeniósł się do Królewca, aby studiować matematykę i fizykę. W listopadzie 1861 roku przed komisją egzaminacyjną w Królewcu zdał egzaminy nauczycielskie pro facultate docendi z matematyki, fizyki i mineralogii (Königliches Gymnasium zu Charlottenburg, Jahresbericht womit zu der am Sonnabend den 2 April stattfinden öffentlichen Prüfung kinlandet Dr. F. Schultz, Berlin 1870, s. 2). Swój roczny staż odbył w Szkole Realnej w Królewcu. W 1863 roku otrzymał stanowisko naukowego nauczyciela pomocniczego w Gimnazjum (Kneiphöfische Gymnasium)

1866), nauczyciela w gimnazjum toruńskim w latach 1864–1869. W rezultacie, aby poprawić poziom nauczania w Toruniu Reichel postanowił wykroczyć poza ramy programowe wyznaczone przez pruskie władze oświatowe i przygotował listę zadań dotyczących znajdowania miejsca geometrycznego punktów, których nie było w żadnym z ówczesnych podręczników szkolnych. Zadania te wdrożył do nauczania szkolnego, a w 1866 roku opublikował je w artykule Beiträge für den Unterricht in der Geometrie. Jest to przykład samodzielnego rozszerzenia programu nauczania matematyki przez nauczyciela, w celu lepszego przygotowania młodzieży do egzaminów maturalnych, studiów uniwersyteckich oraz późniejszej pracy zawodowej. Materiał zawarty w artykule Beiträge für den Unterricht in der Geometrie pozwala omówić pewne typy zadań konstrukcyjnych realizowanych w pracy z uczniem zdolnym w instytucji toruńskiej w XIX wieku.

3. Geometria kół Otta Reichela

W dalszej części niniejszego artykułu zostanie zaprezentowana lista dwudziestu ośmiu zadań i poleceń, która została umieszczona w artykule Otta Reichela. Wybrane z tych zadań zostaną wzbogacone rozwiązaniami – sam Reichel nie przeprowadził rozwiązań tych zadań.

W XIX wieku notacja i terminologia matematyczna często była nieco inna niż ta współczesna. Przykładowo:

- w XIX wieku używano pojęć „linii prostej” oraz „ograniczonej linii prostej”, kryły się pod nimi odpowiednio współczesne: proste oraz odcinki,
- w XIX wieku używano terminu „stycznej do okręgu”, pod którym kryły się zarówno dzisiejsze odcinki styczne, jak i styczne,
- w XIX wieku często pojawiało się sformułowanie typu „linia AB jest równa a”, co symbolicznie zapisywano: „$AB = a$”; w XXI wieku to samo zdanie wypowiada się z użyciem pojęcia miary odcinka, czyli jego długości: „odcinek AB ma długość równą a” i zapisuje się to: „$|AB| = a$”,
- w XIX wieku pisano: „kąt ABC jest równy α” (symbolicznie: „$\sphericalangle ABC = \alpha$” albo „$\angle ABC = \alpha$”, albo „$\measuredangle ABC = \alpha$”, albo „$ABC = \alpha$”); w XXI wieku to samo zdanie zapisuje się z użyciem pojęcia miary: „miara kąta ABC wynosi α” (symbolicznie: „$|\sphericalangle ABC| = \alpha$” albo „$|\measuredangle ABC| = \alpha$”).

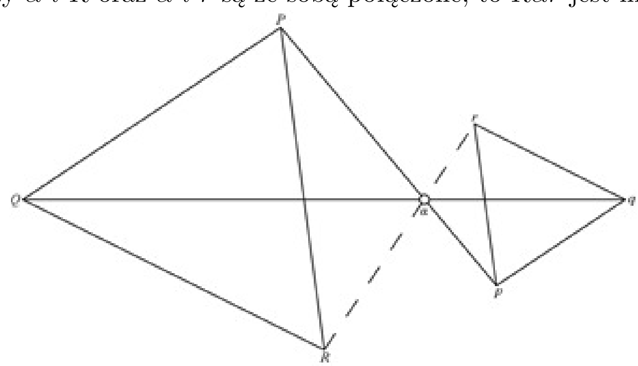
---

w Królewcu, a następnie takie samo stanowisko objął w Szkole św. Piotra (St. Petri-Schule) w Gdańsku. Wielkanocą 1864 roku trafił do Gimnazjum Toruńskiego (W. Hollenberg, R. Jacobs, P. Rühle, *Zeitschrift für das Gymnasialwesen, begründet im Auftrage des Berlinischen Gymnasiallehrer-Vereins* (wyd. 18), Berlin 1864, s. 416). Prowadził tam lekcje matematyki i fizyki. W okresie Wielkanocnym 1869 roku przeniósł się do Gimnazjum w Charlottenburgu i został tam trzecim nauczycielem wyższym. W programach szkolnych Gimnazjum w Charlottenburgu opublikował prace: *Zur theoretischen Herleitung der Gesetze der Doppelbrechung in zweiachsigen Kristallen* („Dla teoretycznego wyprowadzenia zasad podwójnego łamania w kryształach dwuosiowych”) (1871) oraz *Darstellung der Grundbegriffe der Arithmetik* („Przedstawienie podstawowych pojęć arytmetyki”) (1882) (F. Kössler, Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen 1825–1918 mit Veröffentlichungsverzeichnissen, t. Raab-Rzepecki, Universitätsbibliothek Gießen, Giessener Elektronische Bibliothek 2008).

Przytaczając zadania użyjemy notacji dziewiętnastowiecznej. Treści niektórych zadań i poleceń mogą okazać się nieco kłopotliwe dla współczesnych odbiorców, dlatego w wybranych przypadkach zostaną umieszczone również współczesne sformułowania.

Artykuł Beiträge für den Unterricht in der Geometrie Otta Reichela można podzielić na trzy główne części: 1. wskazówki dydaktyczne dotyczące wprowadzenia rodzajów kątów (kąt wypukły, wklęsły, kąt prosty, ostry, rozwarty, kąty wierzchołkowe, przyległe i uzupełniające) do nauczania szkolnego, 2. lista zadań dotyczących miejsca geometrycznego punktów, 3. lista twierdzeń ułatwiających zrozumienie zasad stosowania proporcji w zadaniach geometrycznych – wśród nich pojawiło się następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli $QP||qp$, $QP||qr$, $PR||pr$; $P\alpha p$, $Q\alpha q$ są liniami prostymi, punkty α i R oraz α i r są ze sobą połączone, to $R\alpha r$ jest linią prostą.



Zagadnienia umieszczone w drugiej części zostaną w niniejszym artykule poddane szczegółowej analizie. One, jako jedyne spośród wszystkich zagadnień omówionych przez Reichela, nie widnieją w programach nauczania szkół średnich w XXI wieku, co więcej dzisiejsi uczniowie często nie posiadają nawet zaplecza teoretycznego pozwalającego rozwiązać te zadania.

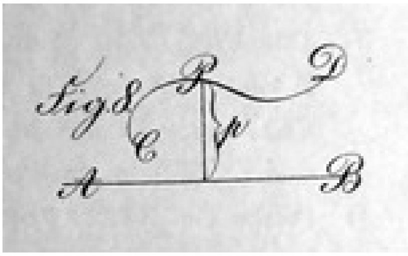
W części poświęconej znajdowaniu miejsca geometrycznego punktów Reichel najpierw wprowadził definicję miejsca geometrycznego punktów i była ona analogiczna do definicji współczesnej[20], następnie podkreślił, że obowiązkiem nauczyciela jest przećwiczenie tej definicji na prostych przykładach (np.: okrąg jest miejscem geometrycznym punktów, które mają taką samą odległość od ustalonego punktu, lub inaczej: jest miejscem geometrycznym wierzchołków wszystkich trójkątów o ustalonej podstawie i jednakowych kątach przy wierzchołku), po czym polecił, aby czternasto- i piętnastoletni uczniowie na lekcjach geometrii w szkołach średnich rozwiązywali następujące zadania[21]:

1. Dana jest linia prosta AB i krzywa CD. Na krzywej CD znajdź punkt P, który od linii AB ma daną odległość p.[22]

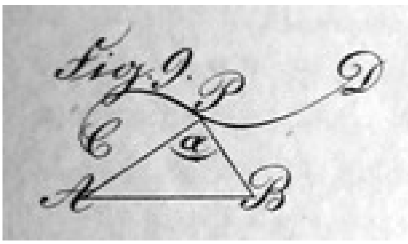
[20] Definicja. Miejsce geometryczne, jest to zbiór punktów spełniających pewną własność (O. Reichel, Beiträge, s. 13).

[21] Reichel, *O Beiträge für den Unterricht in der Geometrie, Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1866, s. 1–18.

[22] (Współcześnie) Dane są: prosta AB, krzywa CD oraz odcinek EF. Na krzywej CD znajdź



2. Dana jest ograniczona linia prosta AB i krzywa CD. Na krzywej CD znajdź punkt P taki, że $\angle APB$ jest równy pewnemu danemu kątowi α.



3. Polecić uczniom, aby narysowali koło, na brzegu tego koła gęsto umieścili punkty w równych odległościach, a następnie między tymi punktami poprowadzili cięciwy o ustalonej długości. Dokładny rysunek spowoduje, że uczniowie zauważą, że cięciwy „otulają" okrąg. Wówczas nauczyciel może skomentować, że środki tych cięciw leżą na okręgu.

4. Udowodnić, że miejscem geometrycznym środków wszystkich cięciw o ustalonej długości jest okrąg, który dotyka tych cięciw.

5. Dany jest okrąg M i krzywa CD. Znajdź na krzywej CD punkt P taki, że jest on środkiem cięciwy o danej długości l.

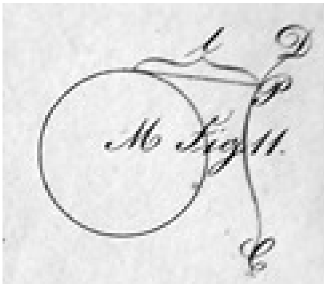
6. Na brzegu danego koła M zaznaczamy punkty, które dzielą ten brzeg na dużą liczbę równych części. W każdym z tych punktów prowadzimy styczną o ustalonej długości i wyraźnie zaznaczamy końce tych stycznych. Uczniowie bez trudu zauważą, że końce stycznych leżą na brzegu koła[23].

punkt P, którego odległość od AB jest równa $p = |EF|$.

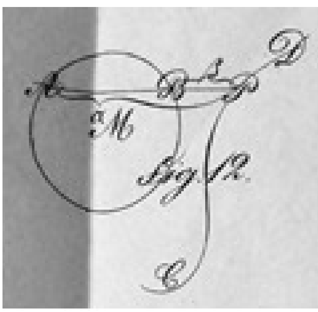
[23] Reichel pisząc „prowadzimy styczną do brzegu koła o ustalonej długości" ma na myśli poprowadzenie (współczesnego) odcinka stycznego o ustalonej długości o punkcie początkowym

7. Udowodnić, że miejscem geometrycznym końców wszystkich stycznych do okręgu o ustalonej długości jest okrąg.[24]

8. Dany jest okrąg M i krzywa CD. Skonstruuj styczną do M o danej długości l, której koniec P leży na krzywej CD.



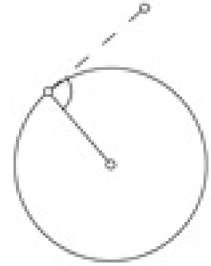
9. Dany jest okrąg M i krzywa CD. Skonstruuj sieczną ABP o danej długości α tak, aby jej zewnętrzna część miała daną długość β oraz, aby jej koniec P leżał na krzywej CD.



10. Przez dany punkt leżący poza daną linią poprowadzić inną linię, która tworzy dany kąt α z daną linią.[25]

---

w punkcie styczności. Na poniższym rysunku, przerywaną linią, został zaznaczony odcinek

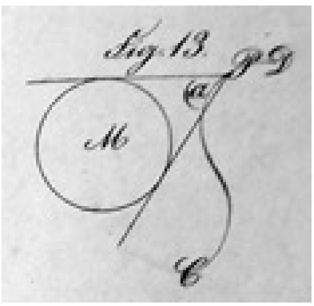


styczny:

[24] (Współcześnie) Udowodnić, że miejscem geometrycznym końców wszystkich odcinków stycznych (do danego okręgu) o ustalonej długości jest okrąg.

[25] (Współcześnie) Dane są: prosta AB, punkt P, który leży poza tą prostą oraz kąt α. Przez punkt P poprowadź prostą, która tworzy z AB kąt o takiej samej mierze, jak miara kąta α .

11. Poprowadź styczną[26] do danego okręgu, która
    a) jest równoległa do danej linii prostej,
    b) z daną linią prostą tworzy dany kąt.
12. Brzeg koła podziel na dużą liczbę równych części. Z każdego z punktów podziału poprowadź styczną, wówczas każde dwie sąsiednie styczne przetną się pod takim samym kątem. Zaznacz punkty przecięcia stycznych.
13. Udowodnij, że miejscem geometrycznym przecięć stycznych do okręgu, z których każde dwie przecinają się pod danym kątem (takim samym), jest okrąg.
14. Dany jest okrąg M i krzywa CD. Znajdź na krzywej CD punkt P taki, że styczne poprowadzone z tego punktu do okręgu M, przecinają się pod danym kątem α.



15. Znajdź punkt, który od danej linii i danego punktu ma daną odległość[27].
16. Dane są dwa okręgi. Znajdź punkt taki, że styczne poprowadzone z tego punktu do obu okręgów mają daną (ustaloną) długość.
17. Dane są dwa okręgi. Znajdź punkt taki, że styczne poprowadzone z tego punktu do pierwszego okręgu przecinają się pod danym kątem oraz styczne poprowadzone z tego punktu do drugiego okręgu również przecinają się pod danym kątem.
18. Dane są dwa okręgi. Znajdź punkt znajdujący się na zewnątrz danych okręgów taki, że styczne poprowadzone z tego punktu do jednego okręgu przecinają się pod danym kątem, natomiast styczne poprowadzone z tego punktu do drugiego okręgu mają daną długość.
19. Dane są dwa okręgi. Znajdź punkt taki, że jest on środkiem cięciwy pierwszego okręgu, której długość jest dana, oraz styczne poprowadzone z tego punktu do drugiego okręgu przecinają się pod danym kątem[28].

[26] W miejscach, w których Reichel rozważa styczną i nie wspomina o jej długości styczna ta jest prostą.

[27] (Współcześnie) Dane są: prosta l, punkt S oraz odcinek EF. Znajdź punkt P, którego odległość od prostej l oraz od punktu S jest równa a=|EF|.

[28] (Współcześnie) Dane są: okręgi M i N, kąt α oraz odcinek EF. Znajdź punkt P taki, że jest on środkiem cięciwy okręgu M, której długość jest równa $s = |EF|$ oraz styczne poprowadzone z tego punktu do okręgu N przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta α.

20. Dany jest okrąg i linia prosta. Znajdź punkt spełniający warunki: dana jest jego odległość od danej linii prostej, dana jest długość siecznej poprowadzonej z tego punktu do okręgu M oraz dana jest długość wewnętrznej części tej siecznej.

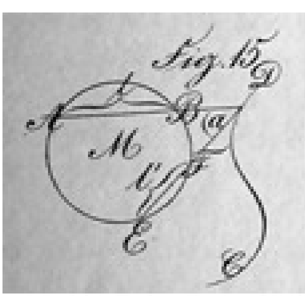
21. Przez dany punkt leżący wewnątrz lub na zewnątrz danego okręgu, poprowadź sieczną, której wewnętrzna część ma daną długość.

22. Dane są dwa okręgi M oraz N. Znajdź punkt P, który leży na zewnątrz obu okręgów, o tej własności, że można z niego poprowadzić sieczną do okręgu M taką, że jej część zewnętrzna ma daną długość a oraz część wewnętrzna ma daną długość b, można też z tego punktu poprowadzić sieczną do okręgu N taką, że jej zewnętrzna część ma daną długość c, a jej część wewnętrzna ma daną długość d.

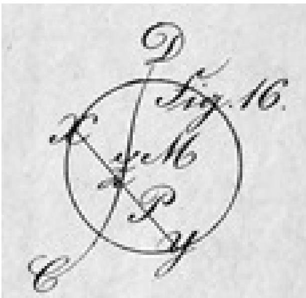
23. Dany jest okrąg M oraz krzywa CD, która przecina okrąg M. Znajdź punkt P leżący na krzywej CD, przez który można przeprowadzić cięciwę, którą ten punkt dzieli na dwie części: AP ma daną długość β, PB ma daną długość α.

24. Dany jest okrąg oraz linia prosta. Umieść w okręgu cięciwę o danej długości taką, że jej przedłużenie tworzy z daną linią prostą dany kąt.

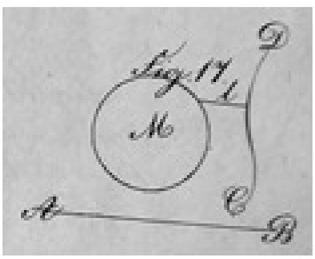
25. Dany jest okrąg M i krzywa CD. Skonstruuj punkt P na krzywej CD taki, że przedłużenia cięciw o danych długościach: $AB = l$, $EF = l'$, przecinają się w P pod danym kątem α.



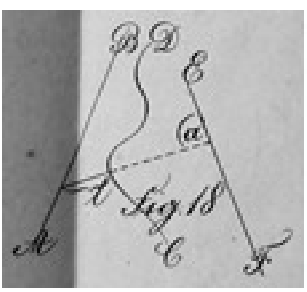
26. Dany jest okrąg M, punkt P leżący wewnątrz tego okręgu oraz krzywa CD, która ten okrąg przecina. Umieść w okręgu M cięciwę XY w taki sposób, że odległość punktu P od punktu Y (leżącego na okręgu) jest taka sama jak odległość punktu X (leżącego na okręgu) od punktu Z, będącego przecięciem cięciwy z krzywą CD.



27. Dany jest okrąg M, krzywa CD oraz linia AB. Skonstruuj linię o danej długości l, której jeden koniec znajduje się na okręgu M, drugi leży na krzywej CD oraz linia ta jest równoległa do linii AB, albo przedłużenie tej linii, tworzy z linią AB dany kąt.



28. Dana jest linia AB, linia EF oraz krzywa CD. Skonstruuj linię o danej długości l, której jeden koniec leży na linii AB, drugi na krzywej CD oraz jej przedłużenie tworzy z EF dany kąt α.

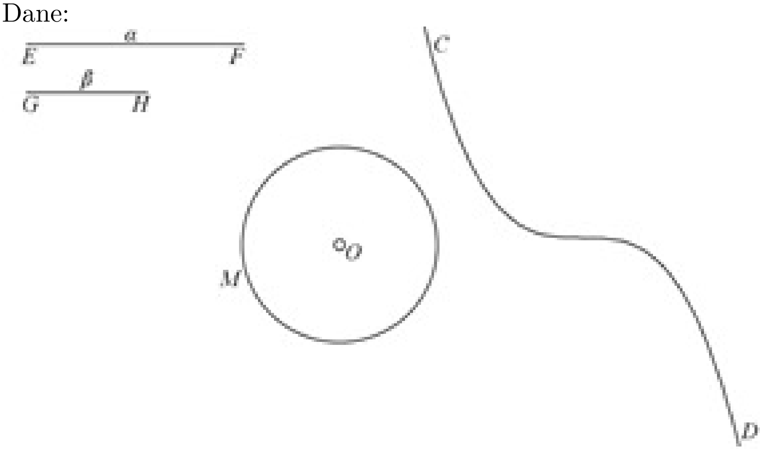


Zadania na liście, zostały ułożone tak, że ich poziom trudności sukcesywnie wzrastał. Trzy polecenia: 4), 7) i 13), to twierdzenia, które stanowiły podstwę rozwiązań dalszych zadań. Rozwiązania często wymagały przeprowadzenia złożonych, wieloetapowych konstrukcji geometrycznych. Aby zobrazować ich poziom trudności zostaną tutaj naszkicowane rozwiązania zadań 9), 17), 20), 22) oraz 28). Uczniowie każde zadanie musieli opatrzyć analizą warunków umożliwiających przeprowadzenie konstrukcji oraz dowodem poprawności konstrukcji, ale to w niniejszym artykule pozostawia się czytelnikom jako samodzielne ćwiczenie.

9) (Współczesne sformułowanie)[29] Dany jest okrąg M, krzywa CD, odcinek EF oraz odcinek GH takie, że $|EF| > |GH|$. Skonstruuj sieczną (czyli odcinek, którego jeden koniec leży na okręgu M, a drugi – na krzywej CD, i odcinek ten ma jeszcze jeden punkt wspólny z okręgiem M) o długości $\alpha = |EF|$ tak, aby jej zewnętrzna część miała długość $\beta = |GH|$ oraz aby jej koniec P leżał na krzywej CD.

Rozwiązanie

Dane:



Opis konstrukcji:

1. Na okręgu M zaznaczamy dowolny punkt A, a następnie konstruujemy cięciwę AB o długości $(\alpha - \beta)$.

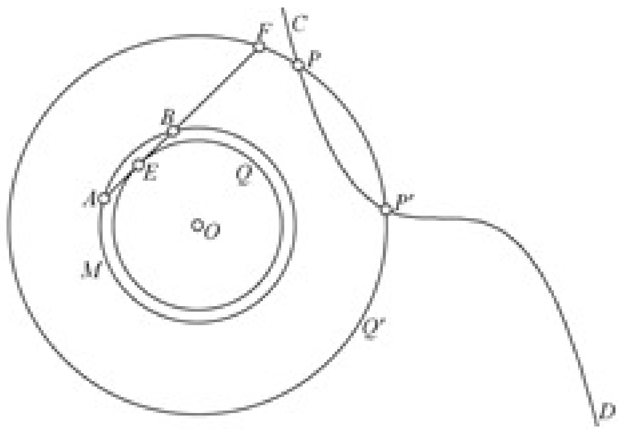
2. Kreślimy symetralną odcinka AB (przechodzi ona przez punkt O), a punkt przecięcia tej symetralnej i odcinka AB oznaczamy E. Następnie kreślimy okrąg Q *o* środku w punkcie O i promieniu OE.

   Wszystkie cięciwy okręgu M, które są styczne do okręgu Q, mają długość równą $(\alpha - \beta)$.

3. Przedłużamy cięciwę AB o odcinek długości β. W ten sposób otrzymujemy odcinek AF.

[29] Rozwiązanie tego zadania (wraz z warunkami możliwości przeprowadzenia konstrukcji) można znaleźć również w: K. Karpińska, Mathematics teaching in gymnasia and real schools in Poland in the years 1795–1918: Schools with Polish and German as the language of instruction – comparison, w: É. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)* (Skriftserie 2019, nr 11), Oslo Metropolitan University, Oslo 2019, s. 727–758. Tutaj konstrukcja jest powtórzona, ponieważ jej znajomość jest konieczna do rozwiązania dalszych zadań z listy Reichela.

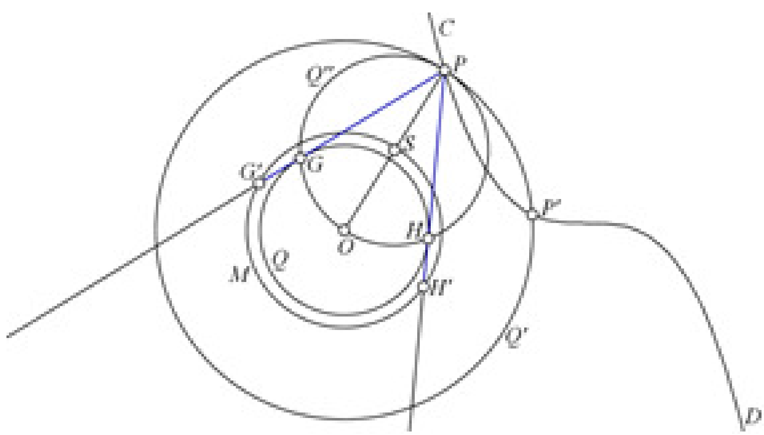
4. Kreślimy okrąg Q' o środku w punkcie O i promieniu $|OF|$. Punkty przecięcia okręgu Q' i krzywej CD oznaczamy P oraz P'.



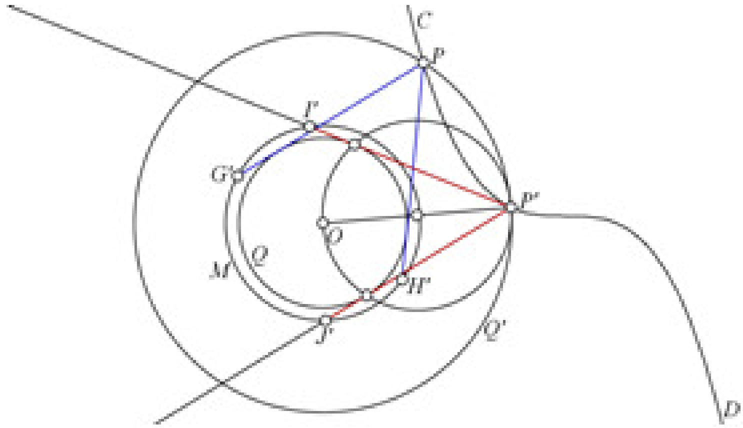
5. Wyznaczamy szukane sieczne:

   a) Znajdujemy konstrukcyjnie punkt S, będący środkiem odcinka OP i kreślimy okrąg Q'' o środku w punkcie S i promieniu $|SP|$. Punkty przecięcia okręgów Q i Q'' (oznaczamy je: G oraz H) są punktami styczności szukanych siecznych i okręgu Q.

   b) Prowadzimy półprostą przechodzącą przez punkty P i G, a punkt przecięcia tej półprostej i okręgu M oznaczamy G'. Odcinek $G'P$ jest pierwszą szukaną sieczną. Następnie prowadzimy półprostą przechodzącą przez punkty P oraz H i punkt przecięcia tej półprostej z okręgiem Q oznaczamy H', wówczas odcinek $H'P$ jest drugą szukaną sieczną.



   c) Analogicznie konstruujemy sieczne $I'P'$ oraz $J'P'$.

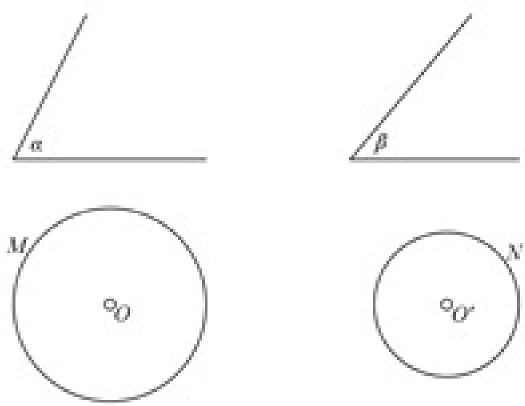


Odcinki: $G'P$, $H'P$, $I'P'$, $J'P'$, to szukane sieczne.

17) (Współczesne sformułowanie) Dane są: okręgi M i N, kąt α oraz kąt β. Znajdź punkt P taki, że styczne poprowadzone z tego punktu do pierwszego okręgu przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta α oraz styczne poprowadzone z tego punktu do drugiego okręgu przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta β.

Rozwiązanie

Dane:



Opis konstrukcji:

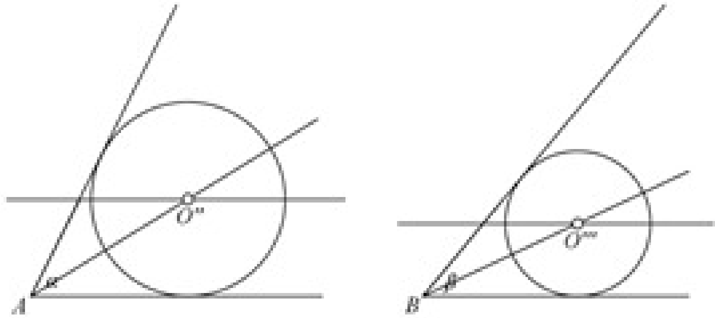
1. Wierzchołek kąta α oznaczamy A. W kąt α wpisujemy okrąg o promieniu równym promieniowi okręgu M. Jego środek oznaczamy O''. W tym celu:

   a) Prowadzimy dwusieczną kąta α.

   b) Kreślimy prostą równoległą do jednego z ramion kata α, oddaloną od niej o długość promienia okręgu M.

   c) Punkt przecięcia dwusiecznej, wyznaczonej w a) i prostej równoległej wyznaczonej w b) oznaczamy O'' (O'' jest środkiem okręgu wpisanego w kąt α, promień tego okręgu jest równy promieniowi okręgu M).

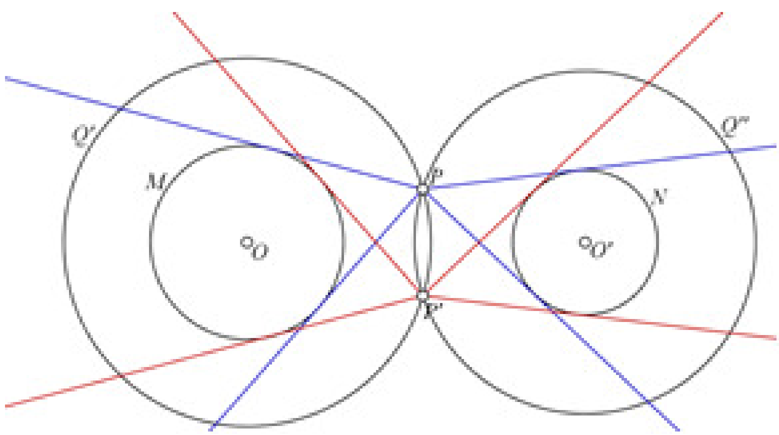
2. Wierzchołek kąta β oznaczamy B. W kąt β wpisujemy okrąg o promieniu równym promieniowi okręgu N. Jego środek oznaczamy O'''.



3. Kreślimy okrąg Q' o środku w punkcie O i promieniu równym $|AO''|$. Styczne poprowadzone z dowolnego punktu tego okręgu do okręgu M, przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta α.

4. Kreślimy okrąg Q'' o środku w punkcie O' i promieniu równym $|BO'''|$. Styczne poprowadzone z dowolnego punktu tego okręgu do okręgu N, przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta β.

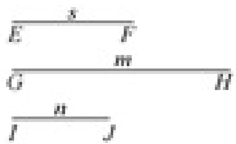
5. Punkty przecięcia okręgów Q' *i* Q'' (punkty P oraz P') są szukanymi punktami. Styczne poprowadzone z punktu P do okręgu M przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta α, a styczne poprowadzone z tego punktu do okręgu N przecinają się pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta β. Taką samą własność ma również punkt P'.

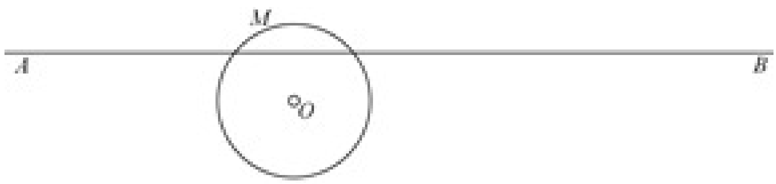


20) (Współczesne sformułowanie) Dany jest okrąg M, prosta AB oraz odcinki: EF, GH, IJ (gdzie $|GH| > |IJ|$). Znajdź punkt P, którego odległość od prostej AB jest równa $s = |EF|$, długość siecznej poprowadzonej z tego punktu do okręgu M jest równa $m = |GH|$ oraz długość wewnętrznej części tej siecznej jest równa $n = |IJ|$.

Rozwiązanie

Dane:





Opis konstrukcji:
Konstrukcja bazuje na rozwiązaniu Zadania 9).

1. Konstruujemy proste równoległe do prostej AB oddalone od niej o s. Oznaczamy je p oraz r.

2. Kreślimy dowolną cięciwę okręgu M o długości n i oznaczamy ją KL.

   Następnie, wyznaczamy środek R cięciwy KL oraz kreślimy okrąg Q o środku w punkcie O i promieniu $|OR|$.

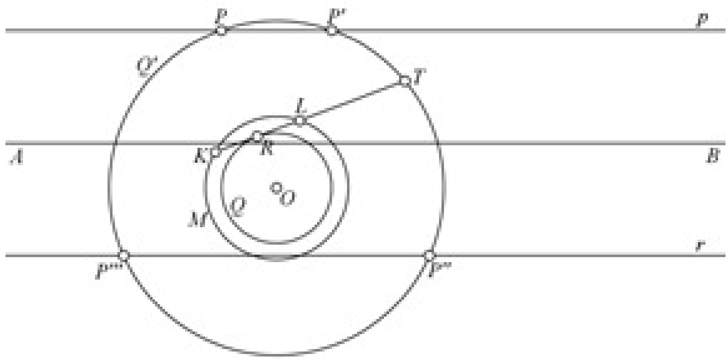
   Okrąg Q jest miejscem geometrycznym środków wszystkich cięciw okręgu M o długości n.

3. Przedłużamy cięciwę KL o odcinek długości $(m-n)$. Skonstruowany odcinek KT ma długość m.

4. Kreślimy okrąg Q' o środku w punkcie O i promieniu równym $|OT|$.

   Okrąg Q' jest miejscem geometrycznym końców wszystkich odcinków stycznych do okręgu Q', których długości są równe $|RT|$.

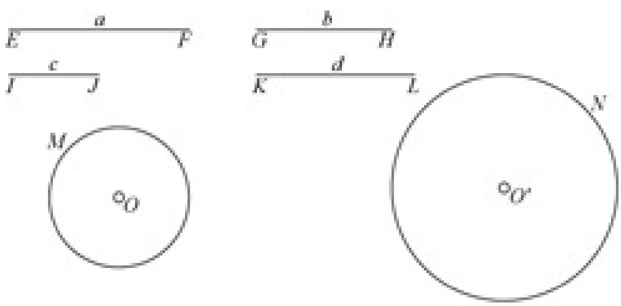
5. Punkty przecięcia okręgu Q' z prostymi p oraz r, to punkty, których odległości od prostej AB są równe s oraz sieczne okręgu M poprowadzone z tych punktów, które są styczne do Q, mają długość m, przy czym ta część każdej siecznej, która leży wewnątrz okręgu M, ma długość n. Oznaczmy te punkty P, P', P'' oraz P''' – wszystkie one spełniają warunki zadania.



22) (Współczesne sformułowanie) Dane są: okręgi M i N oraz odcinki: EF, GH, IJ, KL. Znajdź punkt P, który leży na zewnątrz obu okręgów, o tej własności, że można z niego poprowadzić sieczną okręgu M taką, że jej część zewnętrzna ma długość $a = |EF|$ oraz część wewnętrzna ma długość $b = |GH|$, można też z tego punktu poprowadzić sieczną okręgu N taką, że jej zewnętrzna część ma długość $c = |IJ|$, a jej część wewnętrzna ma długość $d = |KL|$.

Rozwiązanie

Dane:



Opis konstrukcji:
Konstrukcja bazuje na rozwiązaniu zadań 9) oraz 20).

1. Konstruujemy dowolną cięciwę okręgu M, której długość będzie równa a. Oznaczamy ją AB. Następnie, znajdujemy środek cięciwy AB i oznaczamy go E.

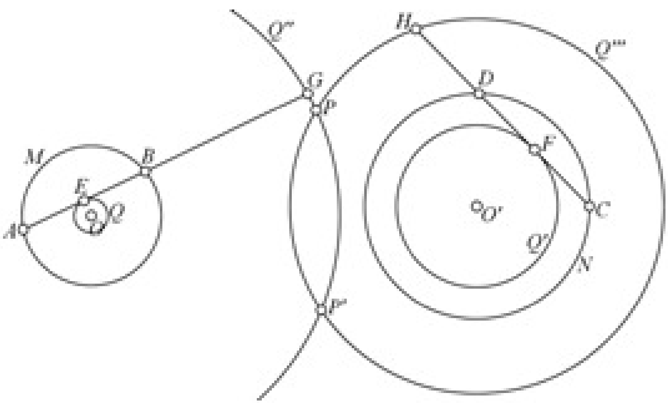
2. Kreślimy okrąg Q o środku w punkcie O i promieniu $|EO|$, na tym okręgu leżą środki wszystkich cięciw okręgu M o długości a.

3. Kreślimy dowolną cięciwę okręgu N o długości c. Oznaczamy ją CD. Wyznaczamy środek cięciwy CD i oznaczamy go F.

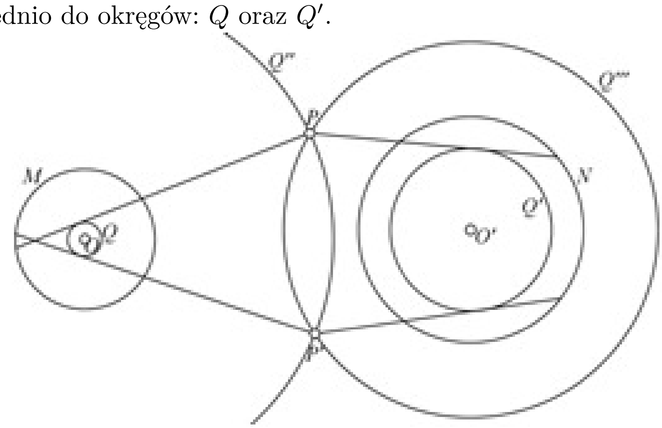
4. Kreślimy okrąg Q' o środku w punkcie O' i promieniu $|FO'|$, który jest miejscem geometrycznym środków wszystkich cięciw okręgu N o długości c.
5. Cięciwę AB przedłużamy o odcinek długości b, tworzymy w ten sposób odcinek AG.
6. Następnie, kreślimy okrąg Q'' o środku w punkcie O i promieniu $|OG|$.

   Okrąg ten jest miejscem geometrycznym końców wszystkich odcinków stycznych do okręgu Q o długości równej $|EG|$.
7. Cięciwę CD przedłużamy o odcinek długości d – przedłużeniem tym jest odcinek CH.
8. Kreślimy okrąg Q''' o środku w punkcie O' i promieniu $|O'H|$.

   Okrąg Q''' jest miejscem geometrycznym końców wszystkich odcinków stycznych do okręgu Q' o długości równej $|FH|$.
9. Punkty przecięcia okręgów Q'' oraz Q''' są szukanymi punktami. Oznaczmy te punkty P oraz P'.



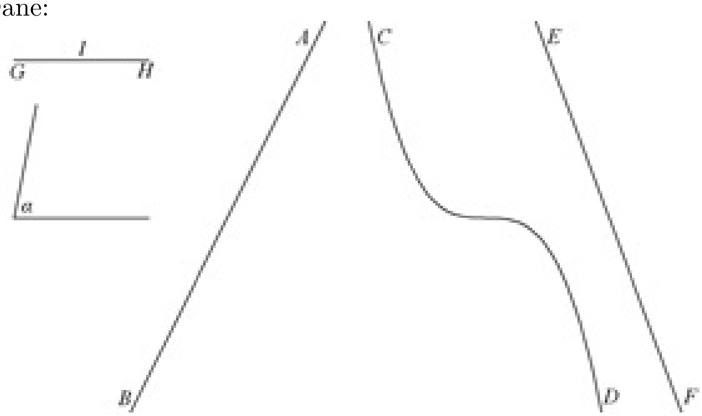
Z każdego z tych punktów można poprowadzić sieczne okręgów M *i* N, które spełniają warunki opisane w treści zadania. Sieczne te muszą być styczne odpowiednio do okręgów: Q oraz Q'.



28) (Współczesne sformułowanie) Dane są: proste AB i EF, krzywa CD, kąt α oraz odcinek GH. Skonstruuj odcinek o długości $l = |GH|$, którego jeden koniec leży na prostej AB, drugi – na krzywej CD oraz przedłużenie tego odcinka tworzy z EF kąt o mierze równej mierze kąta α.

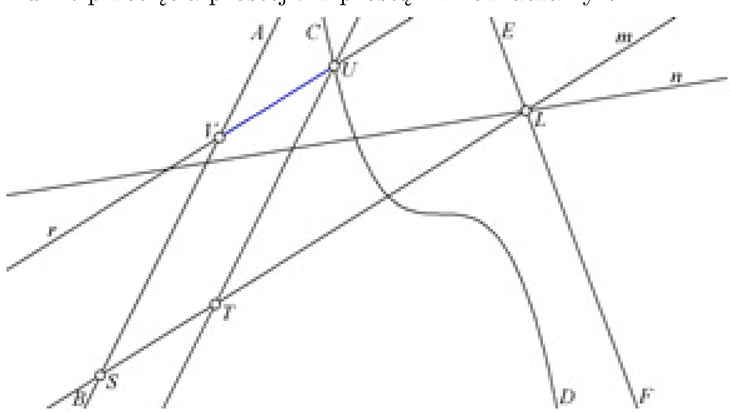
Rozwiązanie

Dane:



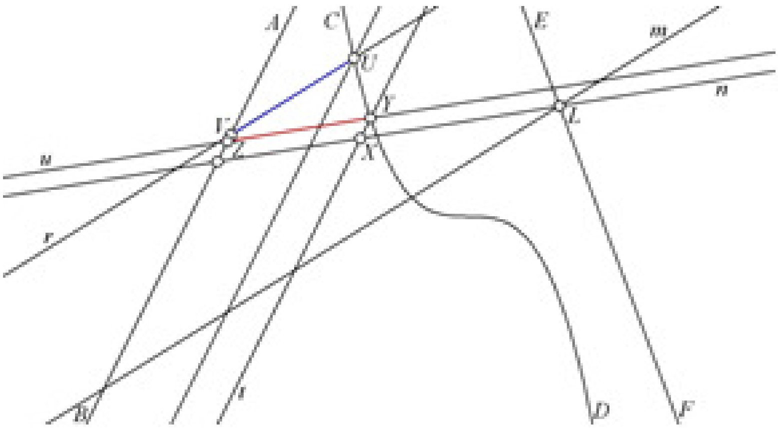
Opis konstrukcji:

1. Kreślimy dowolne proste m oraz n (o różnych kierunkach), które tworzą z prostą EF kąt o mierze równej mierze kąta α.
2. Punkt przecięcia prostej m z prostą AB oznaczamy S oraz zakreślamy okrąg o środku w punkcie S i promieniu równym l. Punkt przecięcia tego okręgu z prostą m oznaczamy T.
3. Prowadzimy prostą p, równoległą do prostej AB i przechodzącą przez punkt T.
4. Punkt przecięcia prostej p z krzywą CD oznaczamy U. Następnie, prowadzimy prostą równoległą do prostej m i przechodzącą przez punkt U, którą oznaczamy r.
5. Punkt przecięcia prostej r z prostą AB oznaczamy V.



Wówczas: $|UV| = l$ (ponieważ p jest równoległa do AB), r jest równoległa do m oraz $|ST| = l$. Ponadto, przedłużenie odcinka UV przecina prostą EF pod kątem, którego miara jest równa mierze kąta α (ponieważ r jest równoległa do m). Tym samym, odcinek UV jest szukanym odcinkiem.

6. Przeprowadzamy teraz analogiczne rozumowanie dla prostej n. Zakreślamy okrąg o środku w punkcie przecięcia prostej n i prostej AB. Okrąg ten ma promień równy l. Punkt przecięcia tego okręgu z prostą n oznaczamy X oraz prowadzimy prostą t, równoległą do prostej AB przechodzącą przez punkt X. Punkt przecięcia prostej t z krzywą CD oznaczamy Y. Następnie, prowadzimy prostą u – równoległą do prostej n i przechodzącą przez punkt Y, a punkt przecięcia tej prostej z prostą AB oznaczamy Z.



Wówczas odcinek YZ również spełnia warunki zadania.

4. Geometria Reichela jako przygotowanie do egzaminów maturalnych

Zadania z powyższej listy, jak zaznaczył Reichel, bez trudu rozwiązywali przeciętni, a nawet słabi uczniowie wyższych klas instytucji toruńskiej[30]. Miały one przygotować młodzież do egzaminu maturalnego. Na każdej maturze przeprowadzonej w Toruniu w II połowie XIX wieku pojawiało się zadanie konstrukcyjne. Przykładowy zestaw maturalny (w oryginalnej pisowni)[31]:

Zestaw zadań maturalnych

Gimnazjum Klasyczne w Toruniu, 1865 rok

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

$$x^2 + y^2 + 3x + 3y - \frac{7}{2}xy = 7,$$

[30] O. Reichel, Beiträge, s. 16.

[31] *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1865, s. 43.

$$x + y - \frac{1}{2}xy = 2.$$

Zadanie 2. W trójkącie ABC dana jest wysokość $CE = h$, transwersalna[32] poprowadzona z wierzchołka C: $CD = t$ oraz kąt ACB równy C. Znajdź podstawę AB.

Zadanie 3. Niech dany będzie czworościan foremny $ABCD$ o krawędziach $= 1$. Rozważmy kulę, która jest styczna do trzech ścian czworościanu, a punkty styczności leżą na trzech krawędziach podstawy. Jaki jest promień kuli i jaka jest odległość jej środka od wierzchołka D?

Zadanie 4. W trójkącie ABC dane są: wysokość $CG = h$ oraz kąt, pod którym przecinają się dwusieczne AF oraz BE, $= \alpha$. Skonstruuj trójkąt ABC.

Rozwiązanie Zadania 4:

Niech dana będzie podstawa AB: $|AB| = a$, wysokość CG: $|CG| = h$ oraz kąt α – kąt przecięcia dwusiecznych AF oraz BE ma taką samą miarę, jak kąt α.

Opis konstrukcji:

1. Konstruujemy dowolny trójkąt o podstawie AB i ramionach przecinających się pod kątem α – trójkąt AOB.

2. Na trójkącie AOB opisujemy okrąg O'.

   Na łuku AOB okręgu O' będzie znajdował się punkt przecięcia dwusiecznych szukanego trójkąta ABC (kąty wpisane oparte na tym samym łuku są sobie równe).

3. Oznaczmy kąt OAB tego trójkąta przez β i kąt OBA przez γ. W kolejnym kroku odkładamy kąt o mierze 2β, którego wierzchołkiem będzie punkt A i ramieniem początkowym AB, oraz kąt o mierze 2γ, którego wierzchołkiem będzie B oraz ramieniem początkowym BA. Punkt przecięcia końcowych ramion tych kątów oznaczmy C'.

4. Na trójkącie ABC' opisujemy okrąg O'' oraz prowadzimy prostą m równoległą do AB i odległą od AB o h.

5. Punkt przecięcia m i okręgu O'', to wierzchołek C szukanego trójkąta.

5. Konkluzje

Geometria w XIX wieku stanowiła ważną część programów nauczania matematyki, o czym świadczy ministerialny nakaz umieszczania poleceń geometrycznych w zestawach maturalnych[33]. Nauczyciele szkół dla uczniów zdolnych cenili zadania konstrukcyjne, jako te, które wymagały i jednocześnie uczyły

[32] W XIX wieku transwersalną definiowano, jako „linię poprowadzoną z wierzchołka trójkąta do boku przeciwległego” (L. Kambly, *Die Elementar Mathematik*, cz. 2: *Planimetrie* (wyd. 44), Breslau 1877, s. 27), ale również, jako „linię łączącą wierzchołek trójkąta ze środkiem boku przeciwległego” (L. Kambly, *Die Elementar Mathematik*, cz. 2: *Planimetrie* (wyd. 44), Breslau 1877, s. 27).

[33] Por. K. Karpińska, S. Domoradzki, *O egzaminie maturalnym. . .* , s. 157–201.

logicznego i twórczego myślenia. Zadania Reichela byli w stanie rozwiązać przeciętni, a nawet słabi, uczniowie dziewiętnastowiecznych gimnazjów. Czy z tymi zadaniami poradziliby sobie uczniowie w XXI wieku? Okazuje się, że uczniowie współczesnych szkół średnich przygotowujących do egzaminów maturalnych, nie poznają na lekcjach matematyki trzech twierdzeń, na których bazował Reichel, nie ma ich w podręcznikach szkolnych ani w programach nauczania:

Twierdzenie 1. Miejscem geometrycznym środków wszystkich cięciw (danego okręgu) o ustalonej długości, jest okrąg, który dotyka tych cięciw.

Twierdzenie 2. Miejscem geometrycznym końców wszystkich odcinków stycznych (do danego okręgu) o ustalonej długości, jest okrąg.

Twierdzenie 3. Miejscem geometrycznym przecięć wszystkich stycznych do okręgu, z których każde dwie przecinają się pod danym kątem, jest okrąg.

References

Bardey, F.: 1888, *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig.

Dickstein, S.: 1889, *Gieometryja elementarna*, Warszawa.

Fassbender, E.: 1860, *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen*, Essen.

Fassbender, E.: 1872, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen, *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn, 1–12.

Gymnasium mit Realschule I Ordnung zu Thorn: 1869–1875, 1881, Thorn.

Hollenberg, W., Jacobs, R., Rühle, P.: 1864, *Zeitschrift für das Gymnasialwesen, begründet im Auftrage des Berlinischen Gymnasiallehrer-Vereins (wyd. 18)*, Berlin.

Kambly, L.: od 1876 do 1878, *Die Elementar Mathematik cz. 1: Arithmetik und Algebra (wyd. 21), cz. 2: Planimetrie (wyd. 44), cz. 3: Ebene und Sphärische Trigonometrie (wyd. 13), cz. 4: Stereometrie (wyd. 10)*, Breslau.

Karpińska, K.: 2014, Troska o naukowy wymiar nauczania matematyki w Szkole Realnej w Toruniu w II połowie XIX wieku, *Antiquitates Mathematicae* **8**(1), 75–140.

Karpińska, K.: 2019, Mathematics teaching in gymnasia and real schools in poland in the years 1795–1918: Schools with Polish and German as the language of instruction – comparison, w: E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8) (Skriftserie 2019, nr 11)*, Oslo Metropolitan University, Oslo, 727–758.

Karpińska, K., Domoradzki, S.: 2017, O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku, *Antiquitates Mathematicae* **11**, 157–201.

Karpińska, K., Klemp-Dyczek, B.: 2013, Matura z matematyki w Gimnazjum w Toruniu w II połowie XIX w., *Nauka-Etyka-Wiara 2013, Nauka – możliwości i ograniczenia, Konferencja CHFPN 30 maja – 2 czerwca 2013*, Warszawa, 184–185.

Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn: 1861–1868, Thorn.

Königliches evangelisches Gymnasium zu Thorn: 1859, 1860, Thorn.

Königliches Gymnasium mit Realgymnasium zu Thorn: 1885, Thorn.

Königliches Gymnasium zu Charlottenburg, Jahresbericht womit zu der am Sonnabend den 2 April stattfinden öffentlichen Prüfung kinlandet Dr. F. Schultz: 1870, Berlin.

Koppe, K.: 1852–1871, *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schul- und Selbst-Unterricht, cz. 1: Arithmetik und Algebra (wyd. 4), cz. 2: Planimetrie (wyd. 4), cz. 3: Stereometrie (wyd. 7), cz. 4: Ebene Trigonometrie (wyd. 5)*, Essen.

Kössler, F.: 2008, *Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen 1825–1918 mit Veröffentlichungsverzeichnissen, t. Raab-Rzepecki*, Universitätsbibliothek Gießen, Giessener Elektronische Bibliothek.

Limont, W.: 2013, "Stań na ramionach gigantów", czyli uczeń zdolny jako problem wychowawczy, *Psychologia wychowawcza* **3**, 125–138.

Łukasiewicz-Wieleba, J., Baum, A.: 2015, *Kompleksowe wspieranie uczniów uzdolnionych. Program WARS i SAWA*, Warszawa.

Mehler, F. G.: 1869, *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen (wyd. 4)*, Berlin.

Nachricht von dem Gymnasium zu Thorn: 1853, Thorn.

Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn: 1855, Thorn.

Nachricht von dem Königlichen Gymnasium zu Thorn: 1856–1858, Thorn.

Podlaszewska, K., Salmonowicz, S., Zdrójkowski, Z.: 1869, *Krótka historia Gimnazjum Toruńskiego 1568–1968*, Toruń.

Reichel, O.: 1866, Beiträge für den Unterricht in der Geometrie, *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn* 1–18.

Instytut Historii Nauki
im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk
ul. Nowy świat 72, p. A02
00-330 Warszawa
e-mail: karolinakarpinska@ihnpan.pl

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń
e-mail: klemp@mat.umk.pl