

*Ewa Swoboda***Recenzja: M. Sajka, *Pojęcie funkcji. Wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki*,
Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu
Pedagogicznego, Kraków 2019**

Jest to ważna propozycja, wychodząca naprzeciw zapotrzebowaniu na fachową literaturę z dydaktyki matematyki. Jak pisze autorka we wstępie, jest ona kierowana do „nauczycieli akademickich kształcących nauczycieli matematyki, do badaczy z dziedziny dydaktyki matematyki (...) oraz przyszłych i obecnych nauczycieli tego przedmiotu”.

Po przeczytaniu tej książki, zgadzam się w pełni z tak określoną grupą docelową. Nauczyciele akademicy, prowadzący zajęcia na kierunkach matematycznych, często nie widzą potrzeby rozróżniania między sposobem pracy z przyszłym inżynierem (któremu potrzebne będzie pojęcie funkcji jako narzędzie) a przyszłym nauczycielem, który to pojęcie będzie kształtował u swoich uczniów. Z drugiej strony – sami nauczyciele często nie mają pełnej świadomości braków w swojej wiedzy przedmiotowej.

Praca składa się z 4 obszarów zagadnień, które można analizować niezależnie od siebie. W zaproponowanym układzie te elementy jednak wspierają się wzajemnie i pozwalają na wieloaspektowe potraktowanie problemu wiedzy przedmiotowej nauczyciela matematyki w zakresie rozumienia pojęcia funkcji.

Dotyczy to na przykład dwóch pierwszych – zarysu historyczno-epistemologicznego pojęcia funkcji, czy też drugiego – omawiającego wybrane koncepcje i modele procesów poznawczych związanych z kształtowaniem pojęcia funkcji. Te rozdziały nie mają aspiracji do przedstawienia poruszanego zagadnienia w sposób wyczerpujący, na co zresztą wskazują ich tytuły („zarys” . . . , „wybrane koncepcje”). Są to omówienia ograniczone ze względu na główny cel pracy, którym jest przedstawienie koncepcji badania rozumienia pojęcia funkcji u przyszłych nauczycieli. Niemniej, każdy z nich zawiera sporą dawkę wiedzy na temat poruszanych tam zagadnień. Pierwszy z wymienionych rozdziałów (historyczny) ukazuje długą drogę kształtowania się pojęcia, trudności w jego definiowaniu, a przede wszystkim – trudności w znalezieniu wspólnej płaszczyzny rozumienia czym jest funkcja. Główny nacisk w tym (z konieczności – skrótowym) opisie

autorka położyła na epistemologię pojęcia, podkreślając historyczne trudności w zaakceptowaniu współczesnego poziomu rozumienia. Ale nawet ten współczesny poziom jest niejednoznaczny, co widać choćby w cytowanych różnych definicjach funkcji i różnych sposobach korzystania z definicji w uznanych akademickich podręcznikach. Te uwagi są tłem dla przedstawionych wyników badań dydaktycznych dotyczących rozpoznanych już trudności uczniów w rozumieniu pojęcia. Paralela między historią a szkolną współczesnością jest widoczna. Takie przedstawienie powinno wyczulić na fakt, że problemy z ukształtowaniem pojęcia nie biorą się znikąd, że są one niejako wpisane w historię jego powstawania. A jako takie, powinny być świadomie wyprzedzane w pracy nauczycielskiej – i to na każdym poziomie, na którym uczeń (student) uczy się pojęcia funkcji. Dlatego uważam, że znajomość opisanych tutaj powiązań powinna cechować nauczycieli.

Drugi z postulowanych „osobnych” rozdziałów dotyczy procesów poznawczych, ale omawianych z punktu widzenia pojęcia funkcji. Ten rozdział składa się z dość luźno powiązanych ze sobą zagadnień, które jednakowoż (zebrane razem) pokazują złożoność problemów dotyczących rozumienia pojęć matematycznych. Wydaje się, że głównym powodem, dla którego autorka je zestawia, to traktowanie tych zagadnień jako źródła autorskiej teoretycznej koncepcji badania rozumienia pojęcia. Z tego powodu czytelnik może mieć czasami poczucie niespójności (krótkie omówienie zagadnień ogólnych takich jak: pojęcia *proceptu* wg. Graya i Talla, potem *formy powierzchniowe* i *idee głębokie* w ujęciu Semadeniego, szybkie przejście do rozróżnienia *definicja* a *obraz pojęcia* w opisie Vinnera, a potem pojawiają się zagadnienia bardzo specyficzne takie jak poziomy rozumienia pojęcia funkcji wg. Vollratha). Rozumiem problem, z którym starała się uporać autorka: większość tych zagadnień to obszerne problemy dydaktyczne mające status teorii dydaktycznych, a dogłębne ich omówienie przekraczało ramy teoretyczne i cele pracy. Czytelnik, obeznany w problematyce badań dydaktycznych z łatwością te problemy rozpozna. Dla innych – może stanowić skrótowe kompendium zagadnień, które dydaktyk uwzględnia, prowadząc badania. Dla jasności – zaproponowany w rozdziale wybór, to wybór świadomy, ukierunkowany na problemy związane z rozumieniem pojęcia funkcji. Związek tego rozdziału z dalszymi częściami publikacji objawia się coraz wyraźniej w trakcie czytania.

Istotą książki jest bowiem przedstawienie badań dotyczących rozumienia pojęcia funkcji u przyszłych nauczycieli matematyki. Zanim autorka przedstawiła własne narzędzie badawcze oraz uzyskane wyniki, w trzecim rozdziale przedstawia *Współczesne tendencje w badaniach z zakresu merytorycznego kształcenia nauczycieli matematyki*. Kolejny raz uważam, że jest to zabieg celowy, i to z dwóch powodów. Po pierwsze pozwala on na umieszczenie własnych badań na tle badań prowadzonych w świecie, po drugie pozwala na uwypuklenie ważności tego typu badań. Nauczyciele często mają poczucie, że studia dobrze ich przygotowują do pracy, czego niestety nie potwierdzają badania dotyczące wiedzy (zarówno merytorycznej jak i metodycznej) praktykujących nauczycieli. Z drugiej strony – modele kształcenia nauczycieli, obowiązujące w różnych krajach – obrazują, że wciąż trwają poszukiwania tej optymalnej formy kształcenia. Pokazane w tym rozdziale koncepcje kształcenia podkreślają ważność różnych elementów oraz obrazują fakt, że skala prowadzonych badań ostatecznie doprowadziła do

sformułowania założeń teoretycznych będących podstawą badań kształcenia nauczycieli. Jednym z wniosków, szeroko akceptowanych w świecie jest ten, że tzw. wiedza przedmiotowa przyszłych nauczycieli powinna być kształtowana w ścisłym związku z problemami dydaktycznymi, wynikającymi z praktyki szkolnej (inaczej mówiąc – wiedza merytoryczna i wiedza pedagogiczna nie mogą być realizowane osobno). Tak więc, pokazanie tendencji obserwowanych w szeroko prowadzonych badaniach światowych pozwala docenić własny wkład autorki w budowanie autorskiej koncepcji badań i umożliwić zauważenie ważności podjętych działań.

Najważniejszą częścią pracy są jednak własne badania, które są opisane w trzech kolejnych rozdziałach. Rozdział IV to krytyczna analiza często cytowanej koncepcji Ruhamy Even. Argumenty krytyczne są tutaj dobrze uzasadnione, wskazujące na dobre rozeznanie zarówno w teoretycznych aspektach prowadzenia badań, jak i w wynikach innych badań prowadzonych w obszarze rozumienia pojęcia funkcji. Ta krytyka jest jednak twórcza – wnioski służą autorce jako baza dla skonstruowania własnej koncepcji (rozdział V), przeprowadzenia i opracowania wieloetapowych badań (rozdział VI). Są również punktem wyjścia do poszukiwania, testowania i udoskonalania własnego narzędzia badawczego – zestawu 17 zadań, z których niektóre składały się z kilku podpunktów. Narzędzie uwzględniało rozumienie pojęcia funkcji – definicyjnego oraz indywidualnego obrazu, w wielu aspektach: traktowania funkcji jako gotowego obiektu myślowego, rozumienie symboliki funkcyjnej, doboru właściwej reprezentacji, posługiwania się językiem funkcyjnym. Dodatkowo narzędzie to umożliwia badanie umiejętności bardziej ogólnych takich jak czytanie tekstu matematycznego, stosowanie metod matematycznych. Badania są szczegółowo udokumentowane. Wymienione w koncepcji i badane elementy wiedzy pojęciowej są ilustrowane przykładami rozwiązań podawanych przez studentów. Autorka pokazuje również w jaki sposób interpretuje te rozwiązania, i dlaczego przyjmuje taką a nie inną interpretację. Z tego względu na przedstawione wyniki można popatrzeć z dwóch punktów widzenia: pokazują, jaka jest wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki, ale równocześnie prezentują koncepcję, mogą posłużyć jako model dla badania wiedzy przedmiotowej związanej z innym obszarem tej wiedzy.

Cała książka jawi się więc jako głęboko przemyślana monografia dotycząca wiedzy przedmiotowej nauczyciela matematyki w odniesieniu do pojęcia funkcji. Takie wieloaspektowe ujęcie powoduje, że pozycja ta może być traktowana jako wyróżniająca publikacja z obszaru dydaktyki matematyki.

Podczas czytania natknęłam się na kilka elementów, które mogą podlegać dyskusji, i docelowo – mogą skłonić do wprowadzenia pewnych zmian w kolejnych wydaniach publikacji

Uwagi szczegółowe są różnorakiej natury.

Uwagi merytoryczne:

Str. 17. Autorka posługuje się opisem *przeszkody epistemologicznej*, parafrazując opisy podawane przez A. Sierpińską. Moim zdaniem opis *czym jest przeszkoda epistemologiczna* jest podany tak, że nie podkreśla faktu, że jest to bariera, która utrudnia (czasami uniemożliwia) postęp wiedzy. Autorka pisze bowiem:

W skrócie można powiedzieć, że przeszkody epistemologiczne to rozpowszechnione w kulturze danego miejsca i czasu niekwestionowane przekonania na temat natury wiedzy naukowej i przedmiotów jej badań oraz rutynowe sposoby rozwiązywania problemów naukowych (schematy myślowe).

Dalej jest przykład takiego schematu, co u czytelnika może kształtować przekonanie, że powyższy opis jest pełny. Dla porównania, posłużę się opisem pochodzącym z pracy Romana Dudy *Przeszkody Epistemologiczne w Matematyce (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)* / 1995, s. 35–48.

Bachelard nie określa przeszkody epistemologicznej bliżej, jednakże z dalszych jego wywodów i przykładów staje się jasne, że nie chodzi tu o trudność jaką stawia otwarte pytanie w ramach jakiejś teorii czy metodologii, ale o barierę, jaką stwarza sama teoria czy metodologia, przyjęty w niej sposób traktowania problemu czy jego rozumienia. Z reguły bariera ta jest nieuświadomiana: osiągnięty poziom wiedzy, przyswojone metody, przyjęte założenia tak dominują sposób widzenia, że nie dostrzega się nowych wyzwań, problemów, horyzontów, istniejące zaś trudności próbuje się przewycięzać drogą nawarstwiania komplikacji. Jest to zatem także bariera, bez przewyciężenia której niemożliwe jest uzyskanie dobrej odpowiedzi na istotnie nowy problem, a w konsekwencji niemożliwy jest dalszy rozwój. Przełamanie i przewyciężenie takiej przeszkody odbywa się przez jej odrzucenie lub wchłonięcie przez inny, ogólniejszy punkt widzenia.

Str. 19. Trochę zamieszania wprowadzają również rozważania w rozdziale 1.6 „Główne cechy pojęcia funkcji”

Rozpoczyna się on od podania dwóch głównych cech pojęcia, wyróżnionych przez H. Freudenthala: **arbitratiness** (co autorka tłumaczy – dowolność) i **univalence** (co w Jej tłumaczeniu oznacza jednowartościowość) a nie jednoznaczność.

Dodatkowo, o ile jest podane jak należy rozumieć dowolność (arbitratiness) i ten opis jest wartościowym uzupełnieniem, to nie ma takiego opisu dla *univalence*. Ostatecznie można przyjąć, że znaczenie tego sformułowanie powinno być czytelne dla każdego, kto będzie je odnosił do rozumienia pojęcia funkcji, choćby poprzez pryzmat definicji. Jednak już dalej nie jest to wszystko takie oczywiste, bo takie określenia jak *jednowartościowość*, *jednoznaczność*, *wielowartościowość* pojawiają się równocześnie. Autorka w różny sposób odnosi się do tych sformułowań, na przykład kontrastując je z pewnymi szkolnymi definicjami pierwiastka kwadratowego dopuszczającymi nieujemność wyniku pierwiastkowania (co rozumiem jako odniesienie do jednowartościowości); czy cytując A. Sierpińską która pisze „dla pojęcia relacji jednoznaczność jest mało istotna”. W świetle tych dywagacji nie bardzo wiadomo jak interpretować konkluzję (zakończenie całego rozdziału) w brzmieniu: W dalszych rozważaniach przyjmuję za Freudenthalem, że dowolność i jednowartościowość są głównymi cechami pojęcia funkcji.

Str. 39. W opisie idei głębokich . . . wolałabym pewne przestawienie akapitów. Autorka wyróżnia czcionkami italic oraz bold sformułowania: formy powierzchniowe, modele formalne, idee głębokie (w takiej kolejności). Myślę, że lepszą kolejnością jest: formy powierzchniowe, idee głębokie, modele formalne, – choćby dlatego, że w opisie modeli formalnych autorka powołuje się na określenie idei głębokich.

Książkę kończy lakoniczne *Podsumowanie*, odnoszące się jedynie do ostatniego rozdziału. Myślę, że warto było pokusić się o *Zakończenie*, pomagające całościowo spojrzeć na materiał zawarty w monografii.

Uwagi techniczne:

Str. 37. jest poświęcona prezentacji czterech głównych kategorii definicji, związanych z obrazem pojęcia, wyróżnionych przez Vinnera. Każda z tych kategorii jest wyróżniona czcionką italic i odpowiednim wcięciem akapitu. Każda – oprócz Kategorii III, która została umieszczona pomiędzy przykładami ilustrującymi poszczególne kategorie.

Zastrzeżenia budzi stan techniczny wielu zeskanowanych prac, zamieszczonych w rozdziale VI (np. rysunek 24 str.113; rysunek 26 str.114, rysunek 28 str. 123, rysunek 30 str. 125). Przedstawiają one nie tylko rysunki, ale ręczni pisane komentarze i odpowiedzi. Wprawdzie te odpowiedzi są potem komentowane, ale czytelnik ma prawo poznać nie tylko komentarz sprowadzający się często do analizy podanej odpowiedzi; również samą wypowiedź. A to jest utrudnione z dwóch względów – odpowiedzi są pisane odręcznie (nie zawsze czytelnie), a same kopie tych prac są słabej jakości.

Zauważyłam inne drobne niekonsekwencje interpunkcyjne, które jednak nie wpływają na czytelność tekstu.

Podkreślam jednak jeszcze raz, że zauważone drobne usterki nie mają wpływu na moją wysoką ocenę całej pracy. Gorąco polecam zapoznanie się z tą publikacją wszystkim, do których jest adresowana: nauczycielom akademickim, dydaktykom matematyki, studentom i nauczycielom.

*Państwowa Wyższa Szkoła
Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu
Rzeszów
e-mail: eswoboda@ur.edu.pl*