FOLIA 290

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 11(2019)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.11.9

Emil Artin, Otto Schreier

Algebraiczna Konstrukcja Ciał Rzeczywistych

Hamburg

Swoją „Algebraiczną teorią ciał”[1] E. Steinitz zrekonstruował szerokie obszary algebry, traktując je w sposób abstrakcyjny; jego przełomowemu badaniu współczesna algebra zawdzięcza silny rozwój, którego doznała od tego czasu. Nadal jednak jest w algebrze wiele gałęzi, które dotąd nie poddały się abstrakcyjnym metodom, jak choćby algebra rzeczywista oraz pewne działy algebraicznej teorii liczb. Wspomnijmy np. o twierdzeniu Sturma o liczbie pierwiastków rzeczywistych równania, teoriach jedności w ciałach liczbowych, ciałach klas oraz prawach odwrotności.

Aby móc traktować algebrę rzeczywistą w sposób abstrakcyjny trzeba sobie koniecznie najpierw postawić pytanie, przez jakie własności wyróżniają się ciała rzeczywiste, a w szczególności ciała wszystkich liczb rzeczywistych lub wszystkich algebraicznych liczb rzeczywistych wśród innych ciał. Będzie się próbowało opisać te własności poprzez proste aksjomaty. Taki system aksjomatów musi sprostać różnorodnym wymaganiom. Najpierw musi on pozostawać w zgodzie ze zwykłym znaczeniem pojęcia „rzeczywisty”. Ciało absolutnie algebraiczne będzie przykładowo tylko wtedy mogło być nazwane rzeczywistym, gdy istnieje izomorficzne z nim algebraiczne rzeczywiste ciało liczbowe. Następnie, system aksjomatów musi umożliwiać przeprowadzenie czysto algebraicznego dowodu istnienia dla możliwie najszerszej klasy ciał rzeczywistych, który musi naturalnie obejmować jako szczególne przypadki rzeczywiste algebraiczne ciała liczbowe. O tych ciałach rzeczywistych w sensie abstrakcyjnym trzeba potem dowieść, że zachodzą w nich prawa algebry rzeczywistej.

Takie wyznaczenie ciał rzeczywistych w istocie jest możliwe. Zalecane byłoby wyjść od pojęcia ciała uporządkowanego. Z punktu widzenia algebry abstrakcyjnej, która zajmuje się takimi ciałami, faworyzowana byłaby jednak definicja, która wykorzystuje jedynie operacje dodawania i mnożenia i pociąga za sobą możliwość

[1] *Crelle* **187** (1910), 167–309.

uporządkowania ciała. Można też byłoby oczekiwać od takiej definicji, że łatwiej prowadzi ona do algebraicznego dowodu istnienia ciał rzeczywistych.

Poszukiwaną podstawową własnością ciał rzeczywistych jest taka oto: *Powinno być dozwolone, aby ze znikania sumy kwadratów wnioskować zawsze o znikaniu poszczególnych kwadratów.* Albo, co jest z tym równoznaczne: -1 *nie może zostać przedstawione jako suma kwadratów.* Ten warunek był zalecany szczególnie w badaniach[2] jednego z nas, w których ciało algebraicznych liczb rzeczywistych jest wyznaczone przez własności algebraiczne. To, że odtąd algebra rzeczywista może zostać zbudowana w pełni abstrakcyjnie, zostanie pokazane w dalszym ciągu.

W osobnej pracy[3] podkreślona zostanie owocność tak tworzonych pojęć: za ich pomocą można odpowiedzieć na pytania dotyczące przedstawienia elementu ciała jako sumy kwadratów, a więc problem Hilberta związany z funkcjami określonymi znajduje swoje rozwiązanie.

1. Definicja i główne własności ciał rzeczywistych

Ciało nazywamy „rzeczywistym”, gdy -1 *nie daje się w nim przedstawić jako suma kwadratów.*

Ciało rzeczywiste ma zawsze charakterystykę zero, ponieważ w ciele charakterystyki p element -1 jest sumą $p-1$ składników 1^2.

Ciało K nazywamy „uporządkowanym”, gdy zdefiniowano dla jego elementów własność bycia dodatnim (>0)*, która spełnia następujące warunki:*

1. *Dla każdego elementu a z K zachodzi dokładnie jedna z zależności*
$$a=0, \qquad a>0, \qquad -a>0.$$
2. *Jeśli $a>0$ oraz $b>0$, to $a+b>0$ oraz $ab>0$.*

Jeśli $-a>0$, to mówimy: a jest *ujemny.*

Jeśli zdefiniujemy w ciele uporządkowanym K ogólnie relację większości poprzez ustalenie:
$$a>b \text{ (lub } b<a\text{), gdy } a-b>0,$$
to pokazuje się bez trudności, że spełnione są aksjomaty uporządkowania.

Dalej, jeśli przez wartość bezwzględną $|a|$ elementu rozumieć będziemy ten z elementów a, $-a$, który jest nieujemny, to zachodzą prawa rachowania na wartościach bezwzględnych:
$$|ab|=|a|\cdot|b|; \qquad |a+b|\leqslant|a|+|b|.$$
Podobnie, widoczna jest słuszność $|a|^2=a^2$. Tak więc, kwadrat jest zawsze nieujemny. W szczególności $1=1^2>0$ i w konsekwencji $-1<0$, a stąd -1 nie daje się

[2] E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. *Hamb. Abh.* **3** (1924), 319–323.

[3] E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate.

przedstawić w K jako suma kwadratów. Oznacza to, że każde ciało uporządkowane jest rzeczywiste.

Ciało P nazywa się „rzeczywiście domkniętym”[4]*, gdy P jest rzeczywiste, lecz żadne algebraiczne rozszerzenie P nie jest rzeczywiste.*

Twierdzenie 1. *Każde ciało rzeczywiście domknięte może zostać uporządkowane w jeden i tylko jeden sposób.*

Niech P będzie rzeczywiście domknięte. Chcemy wtedy pokazać, że:

Każdy element a z P różny od 0 jest albo sam kwadratem, albo $-a$ jest kwadratem, przy czym przypadki te nawzajem się wykluczają. Sumy kwadratów elementów z P same są kwadratami.

Bezpośrednio z tego będzie wynikało twierdzenie 1; albowiem poprzez ustalenie $a > 0$, gdy a jest kwadratem i jest różny od zera, zostanie wtedy oczywiście zdefiniowany porządek ciała P i będzie to jedyny możliwy porządek, ponieważ przecież kwadraty muszą w każdym porządku być $\geqslant 0$.

Jeśli γ nie jest kwadratem elementu z P, to $P(\sqrt{\gamma})$ jest algebraicznym rozszerzeniem P, a więc nie jest rzeczywiste. Z tego wynika równanie:

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \sqrt{\gamma} + \beta_\nu)^2$$

albo

$$-1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2 + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu,$$

gdzie α_ν, β_ν należą do P. W tym drugim równaniu ostatni wyraz musi znikać, gdyż w przeciwnym razie $\sqrt{\gamma}$ leżałby w P, wbrew założeniu. W przeciwieństwie do tego pierwszy wyraz nie może znikać, gdyż w przeciwnym przypadku P nie byłoby rzeczywiste. Z tego wnioskujemy najpierw, że γ nie daje się przedstawić w P jako suma kwadratów; albowiem w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy również dla -1 przedstawienie w postaci sumy kwadratów. Oznacza to, że jeśli γ nie jest kwadratem, to nie jest też sumą kwadratów. Albo, w pozytywnym ujęciu: każda suma kwadratów w P jest także kwadratem.

Otrzymujemy teraz:

$$-\gamma = \frac{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2}.$$

Licznik i mianownik tego wyrażenia są sumami kwadratów, a więc same są kwadratami, a stąd $-\gamma = c^2$, gdzie c leży w P. Przeto dla każdego elementu z P zachodzi co najmniej jedna z równości $\gamma = b^2$, $-\gamma = c^2$; jednak $\gamma \neq 0$, a więc nie mogą zachodzić obie, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $-1 = (\frac{b}{c})^2$, co nie ma miejsca.

Na mocy twierdzenia 1, traktujemy w dalszym ciągu ciała rzeczywiście domknięte zawsze jako uporządkowane.

[4]Faworyzujemy krótki termin „rzeczywiście domknięte” zamiast precyzyjnego „rzeczywiście-algebraicznie domknięte”.

Twierdzenie 2. *W ciele rzeczywiście domkniętym każdy wielomian stopnia nieparzystego posiada co najmniej jedno miejsce zerowe.*

Dla stopnia 1 twierdzenie jest trywialne. Zakładamy, że zostało ono udowodnione dla wszystkich stopni nieparzystych $< n$; niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia nieparzystego n (> 1). Jeśli $f(x)$ jest rozkładalny w ciele rzeczywiście domkniętym P, to posiada co najmniej jeden nierozkładalny czynnik stopnia nieparzystego $< n$, a więc także miejsce zerowe w P. Przypuszczenie, że $f(x)$ może być nierozkładalny powinno teraz prowadzić do sprzeczności. Niech mianowicie α będzie symbolicznie dołączonym miejscem zerowym $f(x)$. Wtedy $P(\alpha)$ nie byłoby rzeczywiste, a więc mielibyśmy równanie:

$$(1) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(\alpha))^2,$$

gdzie $\varphi_\nu(\alpha)$ są wielomianami co najwyżej $(n-1)$-stopnia o współczynnikach z P. Z (1) otrzymujemy identyczność:

$$(2) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(x))^2 + f(x)g(x).$$

Suma φ_ν^2 ma stopień parzysty, ponieważ najwyższe współczynniki są kwadratami, a więc nie mogą znikać. Dalej, stopień ten jest dodatni, gdyż w przeciwnym razie już (1) zawierałoby sprzeczność. W konsekwencji $g(x)$ ma stopień nieparzysty $\leqslant n-2$, a więc $g(x)$ ma w każdym razie miejsce zerowe a w P. Jeśli jednak podstawimy a w (2), to mamy:

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(a))^2,$$

a więc dostajemy sprzeczność, gdyż owe $\varphi_\nu(a)$ leżą w P.

Twierdzenie 3. *Ciało rzeczywiście domknięte nie jest algebraicznie domknięte. Jednak ciało powstające z niego poprzez dołączenie i*[5] *jest algebraicznie domknięte.*

Pierwsza połowa jest trywialna. Równanie $x^2+1=0$ jest bowiem nierozwiązalne w każdym ciele rzeczywistym.

Druga połowa wynika bezpośrednio z:

Twierdzenie 3a. *Jeśli w ciele uporządkowanym K każdy element dodatni posiada pierwiastek kwadratowy, a każdy wielomian stopnia nieparzystego co najmniej jedno miejsce zerowe, to ciało powstające poprzez dołączenie i jest algebraicznie domknięte.*

[5] Tu i dalej i oznacza zawsze miejsce zerowe x^2+1.

Zauważmy najpierw, że w $K(i)$ każdy element posiada pierwiastek kwadratowy, a stąd rozwiązywalne jest każde równanie kwadratowe. Niech mianowicie $a + bi$ będzie elementem z $K(i)$ (a oraz b w K). Wtedy również $\sqrt{a^2 + b^2}$ leży w K, a dalej zachodzi $|a^2 + b^2| \geqslant |a|$. Tak więc,

$$c_1 = |\sqrt{\frac{a + |\sqrt{a^2 + b^2}|}{2}}| \quad \text{oraz} \quad c_2 = |\sqrt{\frac{-a + |\sqrt{a^2 + b^2}|}{2}}|$$

należą do K i zachodzi $(c_1 + ic_2 \operatorname{sign} b)^2 = a + bi$.

Aby teraz dowieść, że każdy nierozkładalny wielomian z K ma w $K(i)$ miejsce zerowe, można postępować za Gaussem w sposób następujący. Niech będzie już dowiedzione, że każdy wielomian bez pierwiastków podwójnych o współczynnikach z K, którego stopień jest podzielny przez 2^{m-1}, ale nie przez 2^m, posiada pierwiastek w $K(i)$. (Dla $m = 1$ ma to miejsce na mocy założenia.) Niech $f(x)$ będzie wielomianem bez pierwiastków podwójnych n-tego stopnia, gdzie $n = 2^m q$, a q jest nieparzysta. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będą pierwiastkami $f(x)$ w pewnym rozszerzeniu K. Wybieramy c z K tak, że $\frac{n(n-1)}{2}$ wyrażeń $\alpha_j\alpha_k + c(\alpha_j + \alpha_k)$, dla $1 \leqslant j < k \leqslant n$ są wszystkie różnej wartości.[6] Ponieważ wyrażenia te w sposób widoczny spełniają w K równanie stopnia $\frac{n(n-1)}{2}$, więc na mocy założenia co najmniej jedno z nich leży w $K(i)$, powiedzmy $\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Zgodnie z wymaganiem nałożonym na c zachodzi jednak $K(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = K(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2))$; tak więc, α_1 oraz α_2 znajdujemy poprzez rozwiązanie równania kwadratowego w $K(i)$.

Za pomocą teorii Galois można przeprowadzić dowód także w sposób następujący. Ponieważ w K każdy wielomian stopnia nieparzystego (> 1) jest rozkładalny, K posiada tylko rozszerzenia algebraiczne stopnia parzystego. Niech teraz G będzie rozszerzeniem Galois stopnia $n = 2^m q$ (q nieparzysta) ciała K, a $\mathfrak{G}$ grupą Galois względem K. Niech $\mathfrak{H}$ będzie podgrupą $\mathfrak{G}$ rzędu 2^m (taka podgrupa istnieje na mocy twierdzenia Sylowa), a H ciałem stowarzyszonym z $\mathfrak{H}$; wtedy H ma stopień q względem K, a więc musi być $q = 1$ i H pokrywa się z K. Oznacza to, że G ma stopień 2^m względem K i może zatem zostać wytworzona z K poprzez powtarzane dołączenie pierwiastków kwadratowych. Na mocy wyżej powiedzianego, G leży zatem w K. C.b.d.u.

Twierdzenie 4. *Niech Ω będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero, P podciałem Ω, z którego Ω powstaje poprzez proste rozszerzenie. Wtedy P jest rzeczywiście domknięte.*

Niech $\Omega = P(\xi)$. Wtedy ξ nie może być przestępny względem P, gdyż w przeciwnym przypadku $x^2 - \xi = 0$ byłoby przecież nierozwiązywalne w Ω, a więc Ω nie byłoby algebraicznie domknięte. A zatem Ω jest skończonym rozszerzeniem P. Od tego miejsca dowód przebiega dokładnie tak samo, jak w E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. *Hamb. Abh.* **3** (1924), 319–323, 1–6.

Ciała rzeczywiście domknięte są zatem identyczne z tymi ciałami charakterystyki zero,[7] *które poprzez proste rozszerzenie mogą stać się algebraicznie domknięte.*

[6] Jest to możliwe, ponieważ $f(x)$ ma nie mieć pierwiastków podwójnych.
[7] To założenie jest zbyteczne, do czego jeszcze wrócimy.

Twierdzenie 5. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach z ciała rzeczywiście domkniętego P, a, b elementami P, dla których $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wtedy istnieje co najmniej jeden element c między a oraz b, dla którego $f(c) = 0$.*

Ponieważ $P(i)$ jest algebraicznie domknięte, $f(x)$ rozkłada się w P na czynniki liniowe oraz nierozkładalne kwadratowe. Nierozkładalny wielomian kwadratowy $x^2 + px + q$ jest w P stale dodatni, gdyż może zostać zapisany w takiej formie: $(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})^2$; tutaj pierwszy wyraz jest zawsze $\geqslant 0$, a drugi dodatni, na mocy założonej nierozkładalności. Tak więc, na zmianę znaku $f(x)$ może wpłynąć tylko zmiana znaku czynnika liniowego, czyli miejsca zerowego w przedziale $a < x < b$.

Twierdzenie 6. *W ciele rzeczywiście domkniętym zachodzą prawa algebry rzeczywistej. Dla przykładu: Jednostajna zbieżność wielomianu w każdym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Twierdzenie Rolle'a. Twierdzenie o wartości średniej z rachunku różniczkowego. Twierdzenie Sturma o liczbie miejsc zerowych wielomianu w przedziale.*

Każda funkcja wymierna, której mianownik nie znika dla $a \leqslant x \leqslant b$, przyjmuje w tym przedziale wartość największą i najmniejszą i przy tym te wartości ekstremalne są wśród wartości $x = a, b, \xi_j$, gdzie ξ_j przebiega miejsca zerowe pochodnej naszej funkcji w rozważanym przedziale.

Wszystkie miejsca zerowe wielomianu $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ są co do swoich wartości bezwzględnych mniejsze od $1 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Na mocy twierdzenia 5 dowody można przeprowadzić dosłownie tak, jak zwykle. Porównaj na przykład odpowiednie fragmenty H. Webera *Lehrbuch der Algebra I* (w szczególności §§ 35, 91, 112, 114 z wydania 2).

2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności

Zajmiemy się teraz dowodami istnienia pewnych rzeczywiście domkniętych rozszerzeń ciał rzeczywistych, jak również rzeczywiście domkniętych podciał ciał algebraicznie domkniętych.

Twierdzenie 7. *Niech K będzie ciałem rzeczywistym, a Ω ciałem algebraicznie domkniętym nad K. Istnieje wtedy (co najmniej jedno) ciało rzeczywiście domknięte P pomiędzy K oraz Ω, dla którego $\Omega = P(i)$.*

Dla dowodu przedstawmy sobie elementy Ω jako dobrze uporządkowane: $1 = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\omega, \ldots$ i zdefiniujmy dla każdej użytej w tym dobrym porządku liczby porządkowej ν ciała K_ν, K_ν^* w sposób następujący: $K_0 = K_0^* = K$. Jeśli K_μ, K_μ^* są już zdefiniowane dla $\mu < \nu$, to niech K_ν^* będzie sumą K_μ $(\mu < \nu)$ oraz

$K_\nu = K_\nu^*(a_\nu)$, gdy ciało to jest rzeczywiste,

$K_\nu = K_\nu^*$ w przeciwnym przypadku.

To, że K_ν^* zawsze jest ciałem, wynika bezpośrednio twierdzenia 2, § 2 w E. Steinitz *Crelle* **187** (1910), 167–309 i ten sam sposób rozumowania pokazuje też, że wszystkie ciała K_ν są rzeczywiste; podobnie, ich suma P jest ciałem rzeczywistym. Twierdzimy, że P czyni zadość żądaniom twierdzenia. Jeśli bowiem $a = a_\nu$ jest elementem z Ω, który nie należy do P, to a_ν nie należy też do K_ν, tj. $K_\nu^*(a)$ nie jest rzeczywiste i, *a fortiori*, $P(a)$ nie jest rzeczywiste. P jest przeto rzeczywiście domknięte. Ponieważ jednak proste przestępne rozszerzenie ciała rzeczywistego jest oczywiście rzeczywiste, wynika stąd dalej, że Ω jest algebraiczne względem P.

A ponieważ na mocy twierdzenia 3 również $P(i)$ jest algebraicznie domknięte, więc ze względu na jednoznaczność algebraicznie domkniętego algebraicznego rozszerzenia P ciało Ω musi być identyczne z $P(i)$.

Można teraz sformułować pewne szczególne przypadki i bezpośrednie wnioski z twierdzenia 7.

Twierdzenie 7a. *Dla każdego ciała rzeczywistego K istnieje (co najmniej jedno) jego rzeczywiście domknięte rozszerzenie algebraiczne.*

Dla dowodu potrzebujemy tylko wybrać za Ω algebraicznie domknięte rozszerzenie algebraiczne ciała K.

Twierdzenie 7b. *Każde ciało rzeczywiste można uporządkować (na co najmniej jeden sposób).*

Wynika to bez trudności z twierdzenia 1 oraz 7a.

Dalej, jeśli Ω jest jakimkolwiek ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero i za K podstawimy w twierdzeniu 7 ciało liczb wymiernych, to mamy:

Twierdzenie 7c. *Każde ciało algebraicznie domknięte Ω charakterystyki zero zawiera (co najmniej jedno) rzeczywiście domknięte podciało P, dla którego $\Omega = P(i)$.*

Dla ciał uporządkowanych można istotnie wzmocnić twierdzenie 7a.

Twierdzenie 8. *Jeśli K jest ciałem uporządkowanym, to istnieje jedno i – z dokładnością do równoważnych rozszerzeń – tylko jedno algebraiczne, rzeczywiście domknięte rozszerzenie P ciała K, którego porządek jest rozszerzeniem porządku w K. Oprócz identycznościowego nie ma w P żadnego automorfizmu, dla którego elementy z K są punktami stałymi.*

Udowodnimy najpierw:

Lemat. *Niech K będzie ciałem uporządkowanym, a $\overline{K}$ ciałem, które powstaje z K poprzez dołączenie pierwiastków kwadratowych wszystkich elementów K. Wtedy $\overline{K}$ jest rzeczywiste.*

Wystarczy oczywiście pokazać, że nie zachodzi żadne równanie o postaci:

$$(3) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \xi_\nu^2,$$

gdzie c_ν są dodatnimi elementami z K, lecz ξ_ν są elementami z $\overline{K}$. Przypuśćmy, że zachodzi takie równanie. W ξ_ν może wystąpić naturalnie jedynie skończenie wiele dołączonych do K pierwiastków kwadratowych, powiedzmy $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_r}$. Wyobrażamy sobie jedno spośród wszystkich równań (3), takie, dla którego r jest możliwie najmniejsza. (Z pewnością $r \geqslant 1$, ponieważ w K nie istnieje żadne równanie o postaci (3).) ξ_ν można przedstawić w postaci $\xi_\nu = \eta_\nu + \zeta_\nu \sqrt{a_r}$, gdzie η_ν, ζ_ν leżą w $K(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{r-1}})$. Mielibyśmy zatem:

$$(4) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu a_r \zeta_\nu^2 + 2\sqrt{a_r} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu \zeta_\nu.$$

Jeśli w (4) znika ostatni składnik, to (4) byłoby równaniem tego samego kształtu co (3), lecz zawierałoby mniej niż r pierwiastków kwadratowych. Jeśli jednak nie znika on, to $\sqrt{a_r}$ leżałby w $K(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{r-1}})$ i (3) znów mogłoby zostać zapisane przy użyciu mniej niż r pierwiastków kwadratowych. Nasze przypuszczenie prowadzi zatem do sprzeczności.

Po tym przygotowaniu możemy teraz udowodnić twierdzenie 8. Niech P będzie algebraicznym rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem $\overline{K}$. Takie rozszerzenie istnieje na mocy twierdzenia 7a, ponieważ wiadomo już, że $\overline{K}$ jest rzeczywiste. P jest także algebraiczne względem K oraz porządek w P jest rozszerzeniem porządku w K, bo przecież każdy element dodatni z K jest kwadratem w $\overline{K}$, a więc tym bardziej w P.

Niech teraz P^* będzie drugim algebraicznym rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem K, którego porządek nie zmienia porządku w K. Niech $f(x)$ będzie wielomianem, niekoniecznie nierozkładalnym, o współczynnikach z K. Twierdzenie Sturma pozwala nam na rozstrzygnięcie już w K, ile pierwiastków w P ma $f(x)$. Musimy tylko zbadać łańcuch Sturma dla $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, powiedzmy na miejscach $\pm(1 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$ (twierdzenie 6). A zatem $f(x)$ ma w P tyle samo pierwiastków, co w P^*. W szczególności, każde równanie w K, które ma w P co najmniej jeden pierwiastek, ma też co najmniej jeden pierwiastek w P^* i na odwrót. Niech teraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ będą pierwiastkami $f(x)$ w P, a $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_r^*$ pierwiastkami $f(x)$ w P^*. Niech dalej ξ będzie wybrany w P tak, że $K(\xi) = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ oraz $F(x) = 0$ jest nierozkładalnym równaniem dla ξ w K. $F(x)$ ma zatem w P pierwiastek ξ, a więc także w P^* co najmniej jeden pierwiastek η^*; $K(\xi)$ oraz $K(\eta^*)$ są równoważnymi rozszerzeniami K. Ponieważ $K(\xi)$ jest wytworzone przez r miejsc zerowych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ wielomianu $f(x)$, więc również $K(\eta^*)$ musi być wytworzone przez r pierwiastków $f(x)$; $K(\eta^*)$ jest podciałem P^*, a więc zachodzi $K(\eta^*) = K(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_r^*)$. A zatem $K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ oraz $K(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_r^*)$ są równoważnymi rozszerzeniami K. Aby teraz pokazać, że P i P^* są równoważnymi rozszerzeniami K zauważmy, że izomorficzne odwzorowanie P na P^* musi koniecznie zachowywać porządek, ponieważ jest on przecież wyznaczony przez własność bycia lub nie bycia kwadratem. Definiujemy więc następujące odwzorowanie σ z P na P^*. Niech α będzie elementem z P, $p(x)$ nierozkładalnym wielomianem w K, którego miejscem zerowym jest α, a $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$ wszystkimi pierwiastkami $p(x)$ w P; w szczególności, niech $\alpha = \alpha_k$. Jeśli $\alpha_1^* < \alpha_2^* < \ldots < \alpha_r^*$ są pierwiastkami $p(x)$ w P^*, to niech $\sigma(\alpha) = \alpha_k^*$. Oczywiście σ jest jednoznaczne i zachowuje elementy K. Trzeba udowodnić, że σ jest odwzorowaniem izomorficznym. W tym celu, niech znów $f(x)$ będzie jakimkolwiek wielomianem w K, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ jego pierwiastkami w P, $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_s^*$ jego pierwiastkami w P^*. Dalej, niech $g(x)$ będzie wielomianem w K, którego miejscami zerowymi są pierwiastki kwadratowe z różnic pierwiastków wielomianu $f(x)$. Niech $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ będą miejscami zerowymi $g(x)$ w P, $\delta_1^*, \delta_2^*, \ldots, \delta_t^*$ miejscami zerowymi $g(x)$ w P^*. Na mocy wyżej udowodnionego $G = K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t)$ oraz $G^* = K(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_s^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \ldots, \delta_t^*)$ są równoważnymi rozszerzeniami K. Istnieje więc odwzorowanie izomorficzne τ z G na G^*, które zachowuje elementy K. Każdemu γ jest przyporządkowany przez τ pewien γ^*, a każdemu δ pewien δ^*. Oznaczenia są tak obrane, aby $\tau(\gamma_k) = \gamma_k^*$, $\tau(\delta_h) = \delta_h^*$. Jeśli teraz $\gamma_k < \gamma_l$ (w P), to $\gamma_l - \gamma_k = \delta_h^2$ dla pewnego indeksu h, a zatem również $\gamma_l^* - \gamma_k^* = (\delta_h^*)^2$, a stąd $\gamma_k^* < \gamma_l^*$ (w P^*). τ przyporządkowuje więc pierwiastki wielomianu $f(x)$ w P oraz w P^* sobie nawzajem wedle wielkości. Ponieważ zachodzi to również dla miejsc zerowych nierozkładalnych w K czynników wielomianu $f(x)$, więc mamy $\tau(\gamma_k) = \sigma(\gamma_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Jeśli przy tym zapewnimy, iż dwa dane dowolne elementy α, β z P, jak również $\alpha + \beta$ oraz $\alpha \cdot \beta$ znajdują się wśród pierwiastków $f(x)$, to widzimy, że σ jest odwzorowaniem izomorficznym z P na P^*, i w dodatku jedynym, które zachowuje elementy K. Jeśli wybierzemy $P^* = P$, to wynika stąd słuszność naszego twierdzenia o automorfizmach P.

Chcemy teraz zbadać ciała uporządkowane, których porządek spełnia aksjomat Archimedesa lub pewne jego uogólnienie.

Niech G będzie ciałem uporządkowanym, K podciałem G. Element α z G nazywa się *„nieskończenie wielkim względem K"*, gdy $|\alpha| > c$ dla każdego elementu c z K, natomiast *„nieskończenie małym względem K"*, gdy $0 < |\alpha| < c$ dla każdego dodatniego elementu c z K.

Jeśli α jest nieskończenie wielki względem K, to $\frac{1}{\alpha}$ jest nieskończenie mały względem K i na odwrót.

Nazwiemy teraz ciało uporządkowane nad K *„archimedesowym względem K"*, gdy nie zawiera ono żadnych elementów nieskończenie wielkich (lub nieskończenie małych) względem K.

W przypadku, gdy K jest ciałem liczb wymiernych, pomijamy określenie „względem K".

Jeśli K_1 jest archimedesowe względem K_2, a K_2 jest archimedesowe względem K_3, to także K_1 jest archimedesowe względem K_3.

Ciało A pomiędzy G oraz K nazywamy w szczególności *„maksymalnie archimedesowym względem K"*, gdy A jest archimedesowe względem K, lecz żadne rozszerzenie ciała A zawarte w G nie jest archimedesowe względem K.

To, że zawsze istnieje (co najmniej jedno) takie ciało A maksymalnie archimedesowe względem K, można bez trudności udowodnić poprzez dobre uporządkowanie. (Por. dowód twierdzenia 7.) Podobnie udowodnić można, że A może zostać tak dobrane, iż dowolne podciało ciała G archimedesowe względem K zawiera się w A.

Dla ciał rzeczywiście domkniętych udowodnimy idące dalej:

Twierdzenie 9. *Niech P będzie rzeczywiście domknięte, a K niech będzie podciałem P. Wtedy wszystkie podciała ciała P maksymalnie archimedesowe względem K są równoważnymi rozszerzeniami K i są rzeczywiście domknięte.*

Niech A będzie podciałem P maksymalnie archimedesowym względem K. Dowodzimy najpierw: każdy element ρ z P algebraiczny względem A należy do A. Każdy element z $A(\rho)$ jest bowiem algebraiczny względem A i jest zatem, na mocy twierdzenia 6, co do swojej wartości bezwzględnej mniejszy od pewnego elementu z A. A więc $A(\rho)$ nie zawiera żadnego elementu nieskończenie wielkiego względem A, jest zatem archimedesowe względem A, a w konsekwencji także względem K, tj. $A(\rho) = A$.

Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach z A posiada teraz w P miejsce zerowe. Na mocy tego, co właśnie udowodniono, to miejsce zerowe należy do A. Pierwiastek kwadratowy dodatniego elementu z A również należy do A. Na mocy twierdzenia 3a $A(i)$ jest więc algebraicznie domknięte, a zatem żadne algebraiczne rozszerzenie A nie jest rzeczywiste, a więc A jest rzeczywiście domknięte.

Niech teraz Γ będzie zbiorem tych elementów z P, które nie są nieskończenie wielkie względem K. Γ jest oczywiście pierścieniem. Dalej, niech $\mathfrak{u}$ będzie zbiorem złożonym z 0 oraz elementów z P nieskończenie małych względem K. $\mathfrak{u}$ jest podzbiorem Γ, a mianowicie $\mathfrak{u}$ jest ideałem pierwszym. Albowiem różnica dwóch elementów nieskończenie małych względem K sama jest nieskończenie mała, a iloczyn dwóch elementów jest zawsze i tylko wtedy nieskończenie mały względem K, gdy taki jest co najmniej jeden z czynników. Niech $\mathfrak{A}$ będzie dziedziną klas reszt mod $\mathfrak{u}$. $\mathfrak{A}$ jest ciałem. Jeśli bowiem $\gamma \not\equiv 0(\mathfrak{u})$, to γ nie jest nieskończenie mały, a więc $\frac{1}{\gamma}$ nie jest nieskończenie wielki względem K; tj. $\frac{1}{\gamma}$ należy do Γ. Klasa reszt mod $\mathfrak{u}$ różna od 0 zawiera jedynie tylko dodatnie lub tylko ujemne elementy; nazywamy więc różną od 0 klasę reszt dodatnią, gdy składa się ona z elementów dodatnich. Przez to ustalenie $\mathfrak{A}$ staje się uporządkowana, gdyż spełnione są wszystkie warunki wymagane od własności „dodatni". W każdej klasie reszt mod $\mathfrak{u}$ leży najwyżej jeden element z K.[8] Klasy reszt reprezentowane przez K tworzą zatem podciało $\mathfrak{K}$ ciała $\mathfrak{A}$ izomorficzne z K. $\mathfrak{A}$ jest archimedesowe względem $\mathfrak{K}$, ponieważ Γ nie zawiera żadnego elementu nieskończenie wielkiego względem K, a zatem $\mathfrak{A}$ nie zawiera żadnej klasy reszt nieskończenie wielkiej względem $\mathfrak{K}$.

Twierdzimy teraz: każde podciało A ciała P maksymalnie archimedesowe względem K składa się z pełnego systemu reprezentantów klas reszt mod $\mathfrak{u}$, daje się zatem w taki sposób powiązać izomorficznie z A, że każdemu elementowi z A odpowiada reprezentowana przezeń klasa reszt mod $\mathfrak{u}$. (Wtedy twierdzenie 9 zostanie w pełni udowodnione.) Klasa reszt mod $\mathfrak{u}$ zawiera, po pierwsze, najwyżej jeden element z A i odwrotnie, każdy element z A należy do Γ, a więc do pewnej klasy reszt mod $\mathfrak{u}$. Jednak każda klasa reszt zawiera też co najmniej jeden element z A. Przypuśćmy bowiem, że klasa reszt R nie zawierałaby żadnego elementu z A! Na mocy właśnie udowodnionego, wszystkie elementy z R byłyby przestępne względem A. Niech t będzie elementem z R. Chcemy pokazać: $A(t)$ jest względem A, a więc również względem K, archimedesowe. (To doprowadzi do sprzeczności.) Ponieważ każdy element z $A(t)$ daje się sprowadzić do postaci $\frac{f(t)}{g(t)}$, gdzie f oraz g są wielomianami o współczynnikach z A, a dalej $f(t)$ należy do Γ i stąd nie jest nieskończenie wielki względem K, wystarczy dowieść: $g(t)$ nie jest nieskończenie mały względem A. Ustalamy w tym celu dwa elementy a, b z A tak, że $a < t < b$ oraz $g(t)$ nie posiada w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ żadnych miejsc zerowych (w P). To zawsze jest możliwe. Jeśli mianowicie $g(x)$ nie posiada w ogóle żadnego miejsca zerowego (w P), które jest większe od t, to niech b będzie jakimkolwiek elementem z A, który przewyższa t. W pozostałym przypadku niech b' będzie najmniejszym miejscem zerowym $g(x)$, które jest większe od t. b' jest algebraiczny względem A, a więc należy do A oraz zachodzi $b' \not\equiv t(\mathfrak{u})$. A zatem $b' - t$ nie jest nieskończenie mały względem K, istnieje więc $c > 0$ w K taki, że $b' - t > c$. Jeśli przyjmiemy teraz $b = b' - c$, to mamy $t < b < b'$, a $g(x)$ nie znika dla $t \leqslant x \leqslant b$. Analogicznie wyznacza się a. $|g(x)|$ ma teraz dodatnie maksimum μ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Jest mianowicie $\mu = |g(\xi)|$, gdzie ξ, na mocy twierdzenia 6, jest albo miejscem zerowym $g'(x)$ w rozważanym przedziale, albo jednym z elementów a, b. We wszystkich przypadkach ξ należy zatem do A, a więc μ też. A zatem $|g(t)|$ jest co najmniej tak wielki jak dodatni element μ z A, a więc $|g(t)|$ nie jest nieskończenie mały względem A.

---

[8] Z $a \equiv b(\mathfrak{u})$ wynika, że $a - b$ jest w $\mathfrak{u}$, tj. jest albo 0, albo nieskończenie mały względem K, a zatem $a = b$, gdy a i b należą do K.

3. Przykłady i zastosowania

W tym ostatnim fragmencie chcemy poczynić pewne zastosowania do algebraicznych ciał liczbowych, jak również podać przykłady ciał rzeczywistych, które w pewnym względzie rzucają nowe światło na osiągnięte wyniki.

Konstrukcję przykładów poprzedzimy bardzo wygodnym lematem:

Lemat. *Jeśli K jest ciałem ułamków pierścienia R i R jest uporządkowany, to K może zostać uporządkowane na jeden i tylko jeden sposób tak, aby zachować porządek z R.*

Niech mianowicie K będzie uporządkowane w wymagany sposób. Jeśli teraz $a = \frac{b}{c}$ jest dowolnym elementem z K, gdzie b oraz c są elementami pierścienia i $c \neq 0$, to z $a > 0$, $a = 0$, $-a > 0$ wynikają odpowiednio: $bc > 0$, $bc = 0$, $-bc > 0$. Porządek jest więc wyznaczony jednoznacznie przez porządek w R. Na odwrót, jest natychmiast widoczne, że poprzez przyjęcie $a > 0$, gdy $bc > 0$ rzeczywiście podany jest porządek wymaganego rodzaju.

W szczególności ciało liczb wymiernych daje się uporządkować tylko na jeden sposób, ponieważ pierścień całkowitych liczb wymiernych oczywiście dopuszcza tylko naturalny porządek. Z twierdzenia 8 otrzymujemy zatem:

Twierdzenie 8a. *Istnieje – pomijając ciała izomorficzne – jedno i tylko jedno rzeczywiście domknięte ciało absolutnie algebraiczne, ciało – w zwykłym sensie – „rzeczywistych”[9] liczb algebraicznych.*[10]

Dowodzimy dalej:

Twierdzenie 10. *Rzeczywiste ciało K absolutnie algebraiczne jest zawsze izomorficzne z rzeczywistym ciałem liczbowym. Każdemu uporządkowaniu K odpowiada odwrotnie jednoznacznie izomorficzne odwzorowanie K na rzeczywiste ciało liczbowe, przy którym uporządkowanie K przechodzi w naturalne uporządkowanie rzeczywistego ciała liczbowego. Różne uporządkowania K prowadzą wtedy i tylko wtedy do tego samego rzeczywistego ciała liczbowego, gdy mogą zostać na siebie przeprowadzone poprzez automorfizm K.*

Niech mianowicie K będzie rzeczywiste oraz absolutnie algebraiczne. K zostaje w jakikolwiek sposób uporządkowane (twierdzenie 7); niech P będzie rzeczywiście domkniętym, absolutnie algebraicznym rozszerzeniem K, które nie narusza wybranego porządku K (twierdzenie 8). Wtedy P jest izomorficzne z ciałem P^* wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych, a w konsekwencji K jest izomorficzne z podciałem K^* ciała P^*. Ponieważ izomorficzny związek pomiędzy P oraz P^* zachowuje porządek, więc uporządkowaniu K odpowiada naturalny porządek K^*. Na odwrót, każde izomorficzne odwzorowanie K na rzeczywiste ciało liczbowe K^* wyznacza w K porządek otrzymany poprzez przeniesienie przez podane odwzorowanie naturalnego porządku w K^* na K. Wymagana jednoznaczność wynika teraz z obserwacji, że rzeczywiste ciało liczbowe nie posiada żadnego automorfizmu poza identycznościowym, który zachowuje naturalny porządek oraz że dwa różne rzeczywiste ciała liczbowe nigdy nie mogą zostać na siebie wzajemnie izomorficznie odwzorowane z zachowaniem naturalnego porządku.

---

[9] „Rzeczywiste” w zwykłym sensie jest tutaj i dalej uwydatnione poprzez użycie czcionki gotyckiej.

[10] To twierdzenie zostało udowodnione już w E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. *Hamb. Abh.* **3** (1924), 319–323, chociaż nie w sposób czysto algebraiczny.

Jako szczególny przypadek mamy:

TWIERDZENIE 10a. *Liczba ciał* rzeczywistych *wśród sprzężonych ze skończonym algebraicznym ciałem liczbowym K jest równa liczbie różnych porządków, które możliwe są w K, a więc w szczególności jest równa zero, gdy K nie jest rzeczywiste.*

W przeciwieństwie do twierdzenia 8a dla ciał przestępnych zachodzi:

TWIERDZENIE 11. *Jeśli Ω jest algebraicznie domkniętym, ale nie absolutnie algebraicznym ciałem charakterystyki zero, to istnieją dwa*[11] *rzeczywiście domknięte nieizomorficzne podciała P_1, P_2 ciała Ω takie, że $P_1(i) = P_2(i) = \Omega$. Jeśli stopień rozszerzenia Ω jest $\leqslant \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ = moc kontinuum), to P_1 i P_2 mogą być oba wybrane jako archimedesowe.*

Dla dowodu niech R będzie ciałem liczb wymiernych, a $\mathfrak{R}$ ciałem wszystkich liczb rzeczywistych. Przedstawiamy sobie w $\mathfrak{R}$ wybraną bazę $\mathfrak{B}$ liczb przestępnych, a więc zbiór o własnościach: 1. Każda liczba z $\mathfrak{B}$ jest przestępna względem ciała otrzymanego z R poprzez dołączenie doń pozostałych liczb z $\mathfrak{B}$. 2. $\mathfrak{R}$ jest algebraiczne względem $R(\mathfrak{B})$. (Istnienie takiego zbioru pokazuje się w zwykły sposób.)

Niech teraz Ω będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero o stopniu rozszerzenia $\mathfrak{t}$ (> 0) i rozważmy najpierw przypadek $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{c}$. Wtedy wybieramy z $\mathfrak{B}$ dwa nieidentyczne podzbiory $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ mocy $\mathfrak{t}$, powiedzmy, niech liczba α należy do $\mathfrak{B}_1$ lecz nie do $\mathfrak{B}_2$. Niech Ω_1 i Ω_2 będą, odpowiednio, ciałem liczb algebraicznych (zespolonych) względem $R(\mathfrak{B}_1)$ i $R(\mathfrak{B}_2)$. Ω jest izomorficzne z Ω_1 i Ω_2. Niech P_1 i P_2 będą ciałami liczb rzeczywistych zawartych, odpowiednio, w Ω_1 i Ω_2. P_1 i P_2 są rzeczywiście domknięte, ponieważ oczywiście $P_1(i) = \Omega_1$, $P_2(i) = \Omega_2$, ale z pewnością nie są izomorficzne. Gdyby mianowicie istniało izomorficzne odwzorowanie między P_1 i P_2, to musiałoby ono z jednej strony zachowywać liczby wymierne, a z drugiej strony zachowywać porządek (twierdzenie 1). To jednak jest niemożliwe, ponieważ w P_2 nie ma żadnej liczby, która wytwarza w R taki sam przekrój, jak należąca do P_1 liczba α. Ze względu na izomorfizm Ω, Ω_1 i Ω_2 ciało Ω zawiera zatem dwa podciała, które są izomorficzne, odpowiednio, z P_1 i P_2, i z każdego z nich Ω powstaje poprzez dołączenie i. Tak więc, nasze twierdzenie jest udowodnione dla $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{c}$.

Dla dowolnego $\mathfrak{t}$ (> 0) postępujemy następująco. Niech $\mathfrak{X}$ będzie bazą elementów przestępnych w Ω. Niech $\mathfrak{X}$ będzie w jakikolwiek sposób uporządkowane.[12] Porządkujemy teraz iloczyny potęg elementów $\mathfrak{X}$: jeśli $x_1, \ldots, x_n$ są skończenie wieloma elementami $\mathfrak{X}$, których numeracja niech dobrana będzie wedle ich porządku w $\mathfrak{X}$, to niech iloczyn $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ poprzedza iloczyn $x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$, gdy pierwsza nieznikająca różnica $b_j - a_j$ jest dodatnia. Niech teraz $f(x)$ będzie elementem dziedziny wielomianów $R[\mathfrak{X}]$. Przyjmujemy wtedy: $f(x)$ jest dodatni, gdy współczynnik pierwszego rzeczywiście występującego w $f(x)$ iloczynu potęg x jest dodatni.[13] A zatem pierścień $R[\mathfrak{X}]$ jest uporządkowany, a na mocy naszego lematu uporządkowane jest też ciało $R(\mathfrak{X})$. Niech teraz P_1 będzie rzeczywiście domkniętym

[11] A nawet nieskończenie wiele.

[12] „Uporządkowane” jest tu rozumiane w sensie ogólnej teorii mnogości, a nie w sensie uporządkowania ciała.

[13] To uporządkowanie znaczy: każdy element x z $\mathfrak{X}$ jest dodatni i nieskończenie mały względem wielomianów w elementach $\mathfrak{X}$ następujących po x.

zawartym w Ω rozszerzeniem $R(\mathfrak{X})$, które zawiera zdefiniowany wyżej porządek w $R(\mathfrak{X})$. Oczywiście zachodzi teraz $\Omega = P_1(i)$ i maksymalnie archimedesowe podciało ciała P_1 ma typ ciała wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych.

Porządkujemy teraz $R[\mathfrak{X}]$, a więc także $R(\mathfrak{X})$ w inny sposób: niech y będzie wybranym ustalonym elementem z $\mathfrak{X}$, a zbiorem pozostałych elementów niech będzie $\mathfrak{X}'$. Iloczyny potęg elementów $\mathfrak{X}'$ porządkujemy jak poprzednio. Jeśli $f(y, x')$ znów jest elementem dziedziny wielomianów $R[\mathfrak{X}]$, a $g(y)$ współczynnikiem pierwszego rzeczywiście występującego w $f(y, x')$ iloczynu potęg elementu x', to niech $f(y, x')$ nazywa się przy tym nowym porządku dodatnim, gdy $g(e)$ to dodatnia liczba rzeczywista; przy tym e oznacza podstawę logarytmu naturalnego. Jeśli teraz ustalimy ciało rzeczywiście domknięte P_2 pomiędzy $R(\mathfrak{X})$ a Ω, które nie burzy nowego porządku w $R(\mathfrak{X})$, to znowu zachodzi $P_2(i) = \Omega$. Ale P_2 zawiera podciało archimedesowe o stopniu przestępności 1, a mianowicie $R(y)$. W konsekwencji, P_2 nie może być izomorficzne z P_1 (twierdzenie 9).

W ciele rzeczywiście domkniętym miejsca zerowe wielomianu o współczynnikach z ciała mogą zawsze zostać rozdzielone. Następujący prosty przykład pokazuje, że niekoniecznie zachodzi to w ciele uporządkowanym, ale nie rzeczywiście domkniętym. Niech $R(x)$ będzie ciałem funkcji wymiernych zmiennej x o współczynnikach wymiernych. Porządkujemy $R(x)$ instrukcją: x ma być dodatni i nieskończenie mały, tj. w wielomianie decydująca jest najniższa występująca potęga. W stowarzyszonym rzeczywiście domkniętym, względnie algebraicznym ciele równanie $(y^2-x)^2-x^3 = 0$ posiada dwa dodatnie miejsca zerowe $\sqrt{x(1 \pm \sqrt{x})}$. Oba te miejsca zerowe nie mogą zostać rozdzielone w $R(x)$. Przykład ten czyni widocznym, że dowód jednoznaczności w twierdzeniu 8 musi być prowadzony bez rozdzielenia pierwiastków.

Na koniec powinniśmy jeszcze pokazać, że ciało uporządkowane, które nie jest rzeczywiście domknięte, może posiadać nieizomorficzne maksymalnie archimedesowe podciała. W tym celu niech A będzie ciałem wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych, uporządkowanych w naturalny sposób; $A(e)$ powstaje z A poprzez dołączenie podstawy logarytmów naturalnych; P niech będzie (rzeczywiście domkniętym) ciałem liczb rzeczywistych, algebraicznych względem $A(e)$. Rozważamy teraz ciało uporządkowane $G = P(x)$, które powstaje z P poprzez dodanie nieskończenie małej zmiennej x. P oraz $A(e + x)$ są wtedy dwoma archimedesowymi podciałami G. O obu można pokazać, że są nawet maksymalnie archimedesowe. Mimo to, są one w sposób widoczny nieizomorficzne, ponieważ P jest rzeczywiście domknięte, a $A(e + x)$ nie jest.

Hamburg, Mathematisches Seminar, w czerwcu 1926 roku.

* * *

Podstawa przekładu: Emil Artin, Otto Schreier. 1926. Algebraische Konstruktion reeller Körper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **5**, 85–99.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
8 lipca 2011

Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail: pogon@amu.edu.pl