FOLIA 273

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 10(2018)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.10.13

Lew Pontriagin

O ciągłych ciałach algebraicznych*

Moskwa

§ 1.

Celem tej pracy jest podanie topologicznej charakterystyki ciał liczb rzeczywistych oraz zespolonych (Twierdzenie II). Gdy zrezygnujemy z warunku przemienności, który odgrywa istotną rolę w tej charakterystyce, to otrzymamy jeszcze ciało kwaternionów (Twierdzenie I).

Postawienie problemu, które doprowadziło do tej pracy, jak też liczne sugestie dotyczące przeprowadzenia dowodu oraz redakcji niniejszej rozprawy zawdzięczam Panu A. Kołmogorowowi.

§ 2.

Definicja I. Zbiór K elementów $a, b, c, \ldots$ tworzy *ciało ciągłe*, gdy spełnione są następujące warunki:

1. K jest przestrzenią topologiczną,[1]

2. K jest ciałem algebraicznym, w ogólności nieprzemiennym,

---

*On topological, algebraic fields

[1] Zbiór R jakichkolwiek elementów nazywa się przestrzenią topologiczną (por. Alexandroff, *Mathematische Annalen* **96**, S. 555), gdy dla każdego podzbioru M zbioru R zdefiniowane jest jego domknięcie $\overline{M}$, a to w ten sposób, iż spełnione są następujące warunki:

I. Zbiór złożony z jednego jedynego punktu jest identyczny ze swoim domknięciem.

II. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

III. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

Zbiory, które pokrywają się ze swoim domknięciem, nazywają się domknięte, a ich dopełnienia otwarte. Każdy zbiór otwarty, który zawiera dany punkt nazywa się otoczeniem tego punktu.

3. funkcje $f_1(a,b) = a+b$, $f_2(a,b) = ab$, $f_3(a) = -a$, $f_4(a) = a^{-1}$ są ciągłe (wszędzie, gdzie są zdefiniowane, tj. f_1, f_2 oraz f_3 w całej przestrzeni, a f_4 wszędzie z wyjątkiem punktu zerowego).

W dalszym ciągu przez *ciało* będziemy zawsze rozumieli ciało ciągłe.

Definicja II. Dwa ciała ciągłe nazywamy izomorficznymi, gdy mogą być jednoznacznie odwzorowane wzajem na siebie, a mianowicie tak, że odpowiadają sobie nawzajem zarówno relacje algebraiczne, jak i topologiczne w obu ciałach (tj. odwzorowanie to stanowi jednocześnie izomorfizm ciał oraz homeomorfizm przestrzeni).

Twierdzenie I. *Każde ciągłe lokalnie dwuzwarte*[2] *spójne ciało K jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych, z ciałem liczb zespolonych lub z ciałem kwaternionów.*

Twierdzenie II. *Każde ciągłe lokalnie dwuzwarte spójne ciało przemienne K jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub z ciałem liczb zespolonych.*

W sformułowaniach twierdzeń I i II można zastąpić warunek dwuzwartości poprzez warunek, że K jest lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, w której spełniony jest pierwszy warunek przeliczalności:

Twierdzenie Ia. *Każde ciągłe lokalnie zwarte spójne ciało K, w którym spełniony jest pierwszy aksjomat przeliczalności oraz aksjomat oddzielania Hausdorffa jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych, z ciałem liczb zespolonych lub z ciałem kwaternionów.*

Twierdzenie IIa. *Przy założeniach twierdzenia* I*a wraz z dodanym warunkiem przemienności K, K jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub z ciałem liczb zespolonych.*

Udowodnimy, że warunki z twierdzenia Ia wynikają z warunków z twierdzenia I, po czym musimy jeszcze tylko udowodnić twierdzenie Ia: II oraz IIa wynikają przecież bezpośrednio z I oraz Ia, wskutek nieprzemienności ciała kwaternionów.

§ 3.

W każdym ciele ciągłym K zachodzi następujące twierdzenie, które nie potrzebuje dowodu:

Lemat I. *Gdy $a \neq 0$, to odwzorowanie*

$$x' = ax + b$$

z K na siebie jest odwzorowaniem topologicznym (tj jednoznacznym oraz w obie strony ciągłym).

Lemat ten pokazuje, że K jest topologicznie *jednorodne*, tj. że poprzez topologiczne odwzorowanie całego ciała na siebie samo można każdy punkt przeprowadzić w każdy inny: w istocie wystarczy wykorzystać odwzorowanie $x' = x - a + b$.

[2]W sprawie zwartości, lokalnej zwartości, jak również dalszych używanych tu pojęć topologicznych (jak aksjomaty oddzielania, a w szczególności regularność, aksjomaty przeliczalności, itp.) patrz Aleksandroff *Mathematische Annalen* **96**, S. 555, jak też Aleksandroff i Urysohn, *Mathematische Annalen* **92**.

§ 4.

W tym paragrafie zakładamy, że ciało K jest lokalnie dwuzwarte oraz spójne.

Lemat II. *Istnieje przeliczalny zbiór*

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$$

elementów z K, dla którego 0 *jest punktem skupienia.*

Dowód. Z tego, że K jest spójne wynika, że wszystkie jego punkty są punktami skupienia (K zawiera co najmniej dwa elementy: zero oraz jedynkę). Niech G będzie zbiorem otwartym, którego domknięcie $\overline{G}$ jest zwarte. Ponieważ wszystkie elementy z K są punktami skupienia, więc $\overline{G}$ zawiera nieskończenie wiele elementów. Niech

$$(2) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots$$

będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem elementów z $\overline{G}$, a b punktem skupienia tego zbioru. Łatwo widać, że punktem skupienia zbioru $b_1 - b, b_2 - b, \ldots, b_r - b, \ldots$ jest zero.

Lemat III. *Niech F będzie zbiorem dwuzwartym,*[3] *a*

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$$

ciągiem elementów, którego punktem skupienia jest zero. Wtedy istnieje n taka, że $F_n = Fa_n \subset G$.[4]

Dowód. Dla każdego punktu a istnieje zawsze otoczenie $G(a)$ punktu a oraz otoczenie $G'(a)$ zera takie, że jeśli $x \in G(a)$ oraz $y \in G'(a)$, to xy leży w G. Gdy teraz a przebiega cały zbiór F, to obszary $G(a)$ pokrywają cały zbiór F; na mocy dwuzwartości F można wybrać z tego systemu pokryć skończony częściowy podsystem $G(a^{(1)}), G(a^{(2)}), \ldots, G(a^{(k)})$, który także pokrywa F; oznaczmy teraz przez G' przekrój zbiorów $G'(a^{(1)}), G'(a^{(2)}), \ldots, G'(a^{(k)})$. Łatwo widać, że iloczyn dowolnego elementu z F z dowolnym elementem z G' leży w G. Ponieważ jednak G' jest otoczeniem zera, więc między elementami ciągu (1) z pewnością jest element $a_n \in G'$; z tego jednak wynika, że $F_n \subset G$, c.b.d.u.

Lemat IV. *K jest regularną przestrzenią Hausdorffa, spełniającą pierwszy aksjomat przeliczalności.*

Dowód. Niech U będzie otoczeniem punktu zerowego o dwuzwartym domknięciu $\overline{U}$, a b_n ciągiem, który ma zero jako punkt skupienia. Przy dowolnym wybraniu otoczenia V punktu zerowego dla odpowiednio wybranego n zachodzi $\overline{U} \cdot b_n \subset V$, z czego wynika, że zbiory otwarte $U \cdot b_n$ tworzą przeliczalny system otoczeń punktu zerowego, spełniający warunek regularności.

Na mocy jednorodności K (lemat I) istnieje taki system otoczeń również dla każdego punktu x. Z tego wynika też, jak wiadomo, warunek oddzielania Hausdorffa (ponieważ, gdy x oraz y są dwoma punktami, $V(x)$ nie zawiera y oraz $\overline{U}(x)$ jest zawarty w $V(x)$, to $U(x)$ oraz dopełnienie $K - \overline{U}(x)$ tworzą dwa rozłączne otoczenia x oraz y).

W ten sposób widzimy, że w K spełnione są wszystkie założenia twierdzenia Ia. Przechodzimy zatem do dowodu tego twierdzenia.

[3] Tj. F traktowany jako przestrzeń jest dwuzwarty.

[4] Gdy X jest podzbiorem K, a y punktem w K, to Xy oznacza zbiór wszystkich punktów xy, gdzie x należy do X.

§ 5.

Zakładamy, że K jest lokalnie zwarta i spójna oraz że spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności oraz aksjomat oddzielania Hausdorffa. Jeśli x jest punktem skupienia zbioru E, to możemy wybrać z E ciąg, który *zbieżny* jest do x.[5] To umożliwia nam przeprowadzenie całego badania za pomocą pojęcia zbieżności ciągu.

Lemat V. Gdy ciąg b_n jest zbieżny do zera, to ciąg b_n^{-1} jest rozbieżny, tj. nie posiada żadnego punktu skupienia.

Gdyby mianowicie c był punktem skupienia ciągu b_n^{-1}, to ciąg $x_n = b_n \cdot b_n^{-1} = 1$ miałby punkt $0 \cdot c = 0$ za punkt skupienia, co oczywiście jest niemożliwe.

Lemat VI. *Dla każdego punktu a istnieje ciąg różnych elementów zbieżnych do tego punktu.*

Dowód. Wynika to z tego, że a nie jest punktem izolowanym oraz z pierwszego aksjomatu przeliczalności.

Lemat VII. *K nie jest zwarta.*

Na mocy lematu VI istnieje mianowicie ciąg b_n taki, że $b_n \neq 0$, $\lim b_n = 0$. Ciąg b_n^{-1} jest wtedy rozbieżny, na mocy lematu V.

Lemat VII. *Gdy F jest zwarty,*[6] *a V jest otoczeniem punktu zerowego oraz $\lim b_n = 0$, to $F \cdot b_n \subset V$ dla wystarczająco dużej n.*

Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy istniałoby nieskończenie wiele iloczynów $x_n = f_n b_{k_n}$ $(f_n \in F)$, które są poza V. Ale te f_n mają jednak punkt skupienia f, podczas gdy b_{k_n} zbieżne są do 0. Punkty x_n mają zatem punkt skupienia $f \cdot 0 = 0$, co jest niemożliwe, gdyż leżą one poza V.

Lemat IX. *Niech U oraz V będą dwoma otoczeniami punktu zerowego o zwartych domknięciach. Gdy a_n jest ciągiem rozbieżnym, to dla wystarczająco dużego n ograniczenie U' zbioru U koniecznie ma punkty wspólne z $\overline{V} \cdot a_n$.*

Dowód. Rozważamy przekrój $D(\overline{U}, \overline{V} a_n)$. Ten zbiór jest zwarty i zawiera punkt zerowy. Ponieważ K sama nie jest zwarta, więc ten zbiór jest właściwym podzbiorem K. Dalej, ponieważ K jest spójna, więc brzeg zbioru $D(\overline{U}, \overline{V} a_n)$, tj. zbiór $D(U', \overline{V} a_n) + D(\overline{U}, V' a_n)$ z pewnością nie jest pusty. Gdyby pierwszy składnik sumy był pusty dla nieskończenie wielu n, to dla tychże n zbiór $D(\overline{U}, V' a_n)$ byłby różny od 0. Inaczej mówiąc, istniałyby ciągi $u_k \subset \overline{U}$, $v_k \subset V'$ oraz podciąg a_{n_k} ciągu a_n takie, że $u_k = v_k a_{n_k}$. Można oczywiście ponadto założyć, że u_k oraz v_k są zbieżnymi ciągami punktów i że

$$\lim u_k = u \in \overline{U} \qquad \text{oraz} \qquad \lim v_k \in V'.$$

Na mocy ostatniego związku v jest przy tym z pewnością różny od 0 (V' jest przecież granicą V). W konsekwencji, $\lim a_{n_k} = \lim v_k^{-1} u_k = v^{-1} u$, co przeczy rozbieżności ciągu a_n.

Lemat X. *Gdy ciąg a_n jest rozbieżny, to ciąg a_n^{-1} jest zbieżny do* 0.

Wystarczy udowodnić, że w przypadku, gdy a_n jest rozbieżny, ciąg a_n^{-1} ma zero jako punkt skupienia: z tego wynika mianowicie, że również każdy podciąg

[5] Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ jest zbieżny do x, gdy każde otoczenie x zawiera wszystkie oprócz skończenie wielu tych elementów.

[6] „Zwarty” znaczy *w sobie* zwarty (tj. zwarty i domknięty).

ciągu a_n^{-1} ma zero jako punkt skupienia, z czego, na mocy pierwszego aksjomatu przeliczalności, wynika, iż cały ciąg a_n jest zbieżny do zera.

Niech U i V będą dwoma otoczeniami punktu zerowego o zwartych domknięciach (por. lemat poprzedni). Dla wszystkich wystarczająco dużych n zbiór $D(U', \overline{V}a_n)$ jest niepusty, a więc można wybrać punkty v_n w $\overline{V}$ tak, że wszystkie punkty $u_n = v_n a_n$ należą do U'. Można wybrać podciągi u_{n_k}, v_{n_k} tak, iż u_{n_k} są zbieżne do $u \in U$, a v_{n_k} są zbieżne do $v \in \overline{V}$, gdzie $u \neq 0$. Przy tym $a_{n_k}^{-1} = u_{n_k}^{-1} v_{n_k}$ muszą być zbieżne do $u^{-1}v$; ponieważ jednak a_{n_k} jest rozbieżny, więc $u^{-1}v$ musi być punktem zerowym, c.b.d.u.

Lemat XI. *Gdy a_n jest rozbieżny, F zwarty, a V jest otoczeniem punktu zerowego, to dla wystarczająco dużych n, $F \subset Va_n$.*

Istotnie: a_n^{-1} jest zbieżny do zera na mocy lematu X, a stąd dla wszystkich wystarczająco dużych n $Fa_n^{-1} \subset V$, z czego wynika twierdzenie.

Lemat XII. *Gdy F jest zwarty, a V otwarty, p_n zbieżny do p oraz Fp zawarty w V, to dla wystarczająco dużych n zachodzi: $Fp_n \subset V$.*

W przeciwnym przypadku istniałby ciąg $f_k \subset F$ taki, że dla nieskończenie wielu n, powiedzmy dla n_k, punkty $x_k = f_k p_{n_k}$ leżałyby poza V. Ponieważ p_{n_k} zbieżne są do p, a f_{n_k} posiadają punkt skupienia $f \in F$, więc x_k muszą mieć punkt $fp \in V$ jako punkt skupienia, co przeczy definicji x_k.

Lemat XIII. *Gdy F jest dowolny, U domknięty oraz* $\lim p_n = p$, to z $Fp_n \subset U$ wynika też $Fp \subset U$.

W przeciwnym przypadku istniałby f w F taki, że $fp \notin U$; wtedy jednak prawie wszystkie fp_n leżałyby poza U, co jest niemożliwe.

Lemat XIV. *Niech a będzie jakimkolwiek punktem z K. Gdy ciąg*

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

(„ciąg potęgowy dla a") posiada punkt zerowy jako punkt skupienia, to ciąg ten jest zbieżny do tego punktu i to samo zachodzi także dla ciągu potęgowego każdego punktu b, który należy do stosownie wybranego otoczenia a.

Dowód. Dla każdego otoczenia G punktu zerowego, którego domknięcie $\overline{G}$ jest zwarte istnieje, na mocy lematu VIII, takie m, że

$$\overline{G}a^m \subset G.$$

Ze względu na lemat XII analogiczna inkluzja

$$(1) \qquad \overline{G}b^m \subset G$$

zachodzi dla każdego punktu pewnego otoczenia $U(a)$ punktu a.

Chcemy pokazać, że przy warunku (1) ciąg b^n jest zbieżny do punktu zerowego. Wtedy lemat XIV będzie oczywiście udowodniony.

Powtarzane zastosowanie formuły (1) daje najpierw dla każdej q będącej liczbą całkowitą

$$(2) \qquad \overline{G}b^{qm} \subset \overline{G}b^{(q-1)m} \subset \ldots \subset \overline{G}b^m \subset G.$$

Gdy $c \in \overline{G}$, $c \neq 0$, to zachodzi

$$cb^{qm} \in G \subset \overline{G} \quad \text{a stąd} \quad b^{qm} \in c^{-1}\overline{G}.$$

Wszystkie punkty o postaci b^{qm} leżą więc z zbiorze zwartym $c^{-1}\overline{G}$, a zatem ciąg b^{qm} posiada co najmniej jeden punkt skupienia.

Przypuszczamy teraz, że ciąg posiada punkt skupienia różny od zera. Wtedy istniałby podciąg b^{mq_k} zbieżny do tego punktu, przy czym można oczywiście założyć, że $q_k - q_{k-1} = v_k$ staje się nieskończenie duże wraz ze wzrostem k. Wtedy ciąg $b^{v_k m}$ jest oczywiście zbieżny do punktu jednostkowego 1 zbioru K. W przeciwnym razie mielibyśmy, na mocy (2)

$$\overline{G}b^{v_k m} \subset \overline{G}b^m \subset G.$$

Zastosowanie lematu XIII daje wtedy (zamieniając występujący tam U na zbiór domknięty $\overline{G}b^m$)

$$\overline{G} = \overline{G} \cdot 1 \subset \overline{G}b^m \subset G,$$

co jest niemożliwe, ponieważ K jest przecież spójne.

To samo zachodzi naturalnie także dla każdego ciągu kształtu b^{mq+k}, ze stałą k. Ponieważ jednak cały ciąg b^n składa się z m ciągów powyższego kształtu (które otrzymuje się biorąc dla k wszystkie wartości od 0 do $m-1$), więc również ten ciąg jest zbieżny do 0, c.b.d.u.

Lemat XV. *Gdy ciąg a^n zawiera podciąg rozbieżny, to także cały ciąg a^n jest rozbieżny. To samo zachodzi także dla ciągu potęgowego każdego elementu b z pewnego otoczenia $U(a)$.*

Dowód. Na mocy lematu X, ciąg a_n^{-1} ma punkt zerowy wśród swoich punktów skupienia; w konsekwencji, nie tylko a_n^{-1}, ale także każdy ciąg b^n dla b z pewnego otoczenia a^{-1} jest zbieżny do zera. Na mocy lematu V wynika z tego, że a^n, odpowiednio b_n^{-1}, jest rozbieżny.

Lemat XVI. *Ciało K rozpada się na trzy parami rozłączne zbiory λ, μ oraz ρ, przy czym punkt należy do λ, odpowiednio, do μ, gdy jego ciąg potęgowy jest zbieżny do zera, odpowiednio, rozbieżny. Zbiór ρ składa się ze wszystkich punktów, których ciągi potęgowe nie zawierają żadnych podciągów rozbieżnych, a mimo to nie mają punktu zerowego jako punktu skupienia.*

Dowód. Wynika z lematów XIV oraz XV.

Lemat XVII. *$\lambda + \rho$ jest zwarty.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciąg punktów x_n z $\lambda + \rho$ jest rozbieżny. Wtedy x_n^{-1} jest zbieżny do zera na mocy lematu X, a ponieważ λ jest otoczeniem punktu zerowego, więc wszystkie, oprócz skończenie wielu, x_n^{-1} zawarte są w λ. Niech $x_n^{-1} \in \lambda$. Na mocy lematu V x_n^m jest wtedy rozbieżny, a więc x_n należy do μ, co przeczy naszemu założeniu.

Lemat XVIII. *Gdy $a \in \lambda + \rho$ jest elementem przemiennym z każdym elementem K, to zachodzi: $\overline{\lambda}a \subset \overline{\lambda}$.*

Dowód. Gdy $x \in \lambda$, to ciąg $x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ jest zbieżny do zera; ponieważ jednak $a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ nie zawiera żadnego podciągu rozbieżnego, więc także ciąg $ax, a^2x^2, \ldots, a^nx^n, \ldots$ jest zbieżny do zera. Ponieważ, ze względu na $ax = xa$, ciąg ten jest jednak tożsamy z ciągiem $xa, (xa)^2, \ldots, (xa)^n, \ldots$, więc także $ax \in \lambda$. Wynika więc z tego $\lambda a \subset \lambda$, a gdy utworzymy domknięcia dla obu stron tej inkluzji, to otrzymamy: $\overline{\lambda}a \subset \overline{\lambda}$.

Lemat XIX. *Niech q będzie dowolnym elementem K różnym od zera, a F zwartym podzbiorem K. Istnieje wtedy skończony system elementów $a_1, a_2, \ldots, a_m$ z F taki, że dla każdego elementu x z F istnieje a_i taki, iż $x - a_i \in \lambda q$.*

Dowód. W przeciwnym przypadku istniałby nieskończony ciąg

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

elementów z F taki, że dla $i \neq j$ zawsze $a_i - a_j \notin \lambda q$. To jednak jest niemożliwe: ciąg (1) ma mianowicie punkt skupienia a i gdy podciąg a_{n_i} jest zbieżny do a, to ciąg $a_{n_i} - a_{n_{i+1}}$ jest zbieżny do zera, a stąd dla wystarczająco dużego i

$$a_{n_i} - a_{n_{i+1}} \in \lambda q.$$

Lemat XX. *Gdy F jest zwartym podzbiorem K, a p dowolnym różnym od zera elementem K, to dla każdej liczby całkowitej k istnieje liczba całkowita N taka, że gdy*

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_N$$

są dowolnymi N elementami z F, to istnieje wśród nich k elementów, powiedzmy $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ takich, że dla dowolnych i oraz j $(i, j \leqslant k)$ zachodzi: $x_{n_i} - x_{n_j} \in \ \lambda$.

Dowód. Na mocy lematu VIII, dla dowolnego q, λq tworzą pełny układ otoczeń dla punktu zerowego. Można stąd tak ustalić q, że z $x_1 \in \lambda q$, $x_2 \in \lambda q$ wynika: $x_1 + x_2 \in \lambda q$. Dla ustalonego w ten sposób q określamy system elementów $a_1, a_2, \ldots, a_m$, który spełnia założenia lematu XIX oraz przyjmujemy $N = km$. Wtedy każdemu elementowi systemu (1) odpowiada element a_r taki, że $x_i - a_r \in \lambda q$. Ponieważ jednak $N = km$, więc istnieje taki element a_r, któremu odpowiada co najmniej k elementów systemu (1), powiedzmy $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$. W ten sposób mamy dla $(i, j) \leqslant k$: $x_{n_i} - a_r \in \lambda q$, $a_r - x_{n_j} \in \lambda q$, a stąd $x_{n_i} - x_{n_j} = (x_{n_i} - a_r) + (a_r - x_{n_j}) \in \ \lambda p$.

Lemat XXI. *Jeśli oznaczmy przez λ_n zbiór wszystkich elementów o postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, gdzie $x_i \in \lambda$, to:*

1. *λ_n jest zbiorem otwartym;*
2. *jego domknięcie $\overline{\lambda}_n$ składa się ze wszystkich elementów o postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, gdzie $x_i \in \overline{\lambda}$, a stąd $\overline{\lambda}_n$ jest zwarty;*
3. *$\lambda'_n = \overline{\lambda}_n - \lambda_n$ nie jest pusty.*

Dowód. 1. oraz 2. uznaje się bezpośrednio, 3. wynika z tego, że K jest spójne i nie jest zwarte.

Lemat XXII. *Jeśli $x \in \lambda_r$ oraz $y \in \lambda_s$, to $x + y \in \lambda_{r+s}$; jeśli $x \in \overline{\lambda}_r$ oraz $y \in \overline{\lambda}_s$, to $x + y \in \overline{\lambda}_{r+s}$.*

Lemat XXIII. *Jeśli $x \in \lambda_r$ oraz $y \in \overline{\lambda}_s$, to $x + y \in \lambda_{r+s}$.*

Dowód. Ponieważ $y \in \lambda_s$, więc dla każdego otoczenia G punktu zerowego istnieje $z \in G$ taki, że $y = z \in \lambda_s$. Ponieważ jednak λ_r jest zbiorem otwartym, więc dla wystarczająco małego G: $x + z \in \lambda_r$, a zatem

$$x + y = (x + z) + (y - z), \qquad x + z \in \lambda_r, \qquad y - z \in \lambda_s,$$

a stąd na mocy lematu XXII: $x + y \in \lambda_{r+s}$.

LEMAT XXIV. *Dla każdego całkowitego $k > 1$ istnieje $\omega_k \in \overline{\lambda}$ taki, że $k\omega_k \notin \overline{\lambda}_{k-1}$.*

Dowód. Niech $p \neq 0$ będzie tak określony, że z $y_i \in \lambda p$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ wynika: $y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} \in \lambda$. (Taki p istnieje, ponieważ λp tworzą pełny system otoczeń punktu zerowego.) Niech liczba całkowita N będzie ustalona wedle lematu XX dla p, k oraz $F = \overline{\lambda}$. Dalej, niech $z \in \lambda'_N$. (Na mocy lematu XXI istnieje taki z.) Wtedy

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_N, \qquad x_n \in \overline{\lambda}.$$

Na podstawie lematu XX możemy założyć, dla pierwszych k elementów tej sumy zachodzi $x_i - x_j \in \lambda p$ $(i, j \leqslant k)$. Otrzymujemy:

$$z = (x_1 - x_k) + (x_2 - x_k) + \ldots + (x_{k-1} - x_k) + kx_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_N.$$

Ze względu na $x_i - x_k \in \lambda p$ $(i < k)$ otrzymuje się:

$$x' = (x_1 - x_k) + (x_2 - x_k) + \ldots + (x_{k-1} - x_k) \in \lambda.$$

Z $x_n \in \overline{\lambda}$ wynika dalej:

$$x'' = x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_N \in \overline{\lambda}_{N-k}.$$

W konsekwencji, mamy na mocy lematu XXIII:

$$x' + x'' \in \lambda_{N-k+1}.$$

Z tego oraz z $kx_k \in \overline{\lambda}_{k-1}$ otrzymuje się, na mocy lematu XXIII: $z \in \lambda_N$, co przeczy założeniu. Otrzymujemy zatem $kx_k \notin \overline{\lambda}_{k-1}$ oraz $\omega_k = x_k$.

LEMAT XXV. *Ciało K jest charakterystyki zero.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciało K jest charakterystyki $p \neq 0$. Wtedy dla dowolnego $x \in K$ zachodzi: $px = 0$. To jest jednak niemożliwe, ponieważ na mocy lematu XXIV zachodzi $p\omega_p \notin \overline{\lambda}_{p-1}$; dla $p > 1$ $\overline{\lambda}_{p-1}$ zawiera jednak punkt zerowy.

LEMAT XXVI. *Gdy e jest jednością ciała K, a m oraz n dwiema dodatnimi liczbami całkowitymi $(m \geqslant n)$, to $\overline{\lambda}_m \cdot \frac{e}{n} \supset \overline{\lambda}$.*

Dowód. Każdy element zbioru $\overline{\lambda} \cdot ne$ możemy przedstawić w postaci $x + x + \ldots + x + 0 + 0 + \ldots + 0$ (x wzięte n razy, 0 wzięte m razy), gdzie $x \in \overline{\lambda}$. W konsekwencji, na mocy lematu XXI, $\overline{\lambda} \cdot ne \subset \overline{\lambda}_m$. Mnożąc tę inkluzję przez $\frac{e}{n}$ otrzymujemy: $\overline{\lambda} \subset \overline{\lambda}_m \cdot \frac{e}{n}$.

LEMAT XXVII. *$\frac{m}{n}e$ leży w λ, μ lub ρ, w zależności od tego, czy $m < n$, $m = n$ lub $m > n$.*

Dowód. Rozważamy najpierw przypadek $m > n$. Gdyby było $\frac{m}{n}e \in \lambda + \rho$, to mielibyśmy, na mocy lematu XVIII, $\overline{\lambda} \cdot \frac{m}{n}e \subset \overline{\lambda}$, gdyż $\frac{m}{n}e$ jest przemienny ze wszystkimi elementami K. Ponieważ $\omega_m \in \overline{\lambda}$, więc $\frac{m}{n}\omega_m \in \overline{\lambda}$ i w konsekwencji $m\omega_m \in \overline{\lambda}_n$; na mocy lematu XXIV wiemy jednak, że $m\omega_m$ nie leży w $\overline{\lambda}_{m-1}$. Z tego wynikałoby jednak $n > m - 1$, a więc $n \geqslant m$ (w przeciwnym przypadku mielibyśmy bowiem $m\omega_m \in \overline{\lambda}_n \subset \overline{\lambda}_{m-1}$), co przeczy założeniu. A zatem $\frac{m}{n}e \in \mu$.

Jeśli $m < n$, to $\frac{n}{m}e \in \mu$ i w konsekwencji, na mocy lematu X, $\frac{m}{n}e \in \lambda$.

Jeśli wreszcie $n = m$, to $\frac{m}{n}e = e \in \rho$.

Lemat XXVIII. *Ciąg*

$$(1) \qquad e, 2e, \ldots, ne, \ldots$$

jest rozbieżny, a ciąg

$$e, \frac{e}{2}, \ldots, \frac{e}{n}, \ldots$$

jest zbieżny do zera.

Dowód. W przeciwnym przypadku istniałby podciąg zbieżny ciągu (1)

$$n_1e, n_2e, \ldots, n_ke, \ldots,$$

gdzie liczby całkowite n_k tworzą ciąg rosnący. Ciąg

$$(n_2 - n_1)e, (n_3 - n_2)e, \ldots, (n_k - n_{k-1})e, \ldots$$

byłby wtedy zbieżny do zera, co jest niemożliwe, gdyż na mocy lematu XXVII wszystkie elementy $(n_k - n_{k-1})e$ leżą poza λ, a λ jest otoczeniem punktu zerowego.

Z rozbieżności ciągu $e, 2e, \ldots, ne, \ldots$ wynika, na mocy lematu X, że ciąg

$$e, \frac{e}{2}, \ldots, \frac{e}{n}, \ldots$$

jest zbieżny do zera.

Lemat XXIX. *K zawiera ciało R, które jest izomorficzne ze zwykłym ciałem ciągłym liczb wymiernych.*

Dowód. Na mocy lematu XXV K zawiera ciało R, które w czysto algebraicznym sensie jest izomorficzne z ciałem liczb wymiernych; przy tym każdy element R zapisuje się w postaci re, gdzie r jest dowolną liczbą wymierną. Na mocy lematu XXVIII zbiory otwarte $\lambda \cdot \frac{e}{n}$ tworzą pełny układ otoczeń punktu zerowego w ciele K. Z tego wynika jednak, że przekroje $\lambda \cdot \frac{e}{n}$ z R tworzą pełny układ otoczeń punktu zerowego w R. Przekroje te składają się jednak, na mocy lematu XXVII, z tych elementów re, dla których $|r| < \frac{1}{n}$. A zatem R rzeczywiście jest izomorficzne z ciągłym ciałem liczb wymiernych.

Lemat XXX. *W ciele K spełniony jest warunek zbieżności Cauchy'ego, tj. dla zbieżności ciągu*

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

potrzeba i wystarcza, aby dla każdego otoczenia U punktu zerowego istniała liczba całkowita N taka, że z $r > N$, $s > N$ wynika $a_r - a_s \in U$.

Dowód. Konieczność warunku widoczna jest bezpośrednio; udowodnimy, że jest on wystarczający. Gdy ciąg (1) spełnia warunek zbieżności Cauchy'ego, to istnieje N takie, że $a_{N+r} - a_N \in \lambda$; ponieważ $\overline{\lambda}$ jest zwarty, więc ciąg

$$a_{N+1} - a_N, a_{N+2} - a_N, \ldots, a_{N+k} - a_N, \ldots$$

ma co najmniej jeden punkt skupienia a oraz nie zawiera żadnego podciągu rozbieżnego; wskutek tego ciąg (1) ma punkt skupienia $a_N + a$; z drugiej strony ma on jednak, jak łatwo widać, także *co najwyżej* jeden punkt skupienia i nie zawiera żadnego podciągu rozbieżnego. Jest on zatem zbieżny.

Lemat XXXI. *Ciało K zawiera ciało D, które jest izomorficzne ze zwykłym ciałem ciągłym liczb rzeczywistych; przy tym każdy element D jest przemienny z każdym elementem K.*

Dowód. Na podstawie lematów XXIX oraz XXX łatwo się przekonać, że domknięcie $\overline{R} = D$ jest izomorficzne z ciałem ciągłym liczb rzeczywistych. Ponieważ każdy element R jest przemienny z każdym elementem K, więc to samo zachodzi dla domknięcia $D = \overline{R}$.

Lemat XXXII. *Niech A_n będzie zbiorem elementów K kształtu*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są danymi elementami K, a zmienne współczynniki α_i leżą w D. Gdy A_n nie pokrywa się z K, to istnieje element $z \in \rho$, który nie *może zostać przedstawiony w następującej postaci:*

$$z = x + z', \quad x \in A_n, \quad z' \in \lambda.$$

Dowód. Zbiór A_n jest domknięty w K. Gdy więc $a \notin A_n$, to istnieje wśród otoczeń a kształtu $a + \lambda\alpha$ $(\alpha \in D)$ takie, które rozłączne jest z A_n. Przyjmujemy wtedy $a' = a\alpha^{-1}$, z czego wynika, że $a' + \lambda = (a + \lambda\alpha)\alpha^{-1}$ jest rozłączny z $A_n = A_n\alpha^{-1}$. Niech teraz B_n będzie zbiorem elementów kształtu $x + z$, $x \in A_n$, $z \in \lambda$. Oczywiście B_n jest zbiorem otwartym oraz a' nie należy do B_n. Ponieważ K jest spójne, istnieje więc co najmniej jeden punkt brzegowy dla B_n. Niech b będzie takim punktem i niech ciąg $x_k + z_k$ $(x_k \in A_n,\ z_k \in \lambda)$ będzie zbieżny do b. Punkty z_k mają co najmniej jeden punkt skupienia z, a stąd x_k mają punkt skupienia $x = b - z$. Ze względu na $x \in A_n$, $b = x + z$ punkt z nie może należeć do λ, jako punkt skupienia punktów $z_k \in \lambda$ należy on jednak do λ; w konsekwencji, $z \in \rho$. Gdyby teraz z dał się przedstawić w następujący sposób: $z = x' + z'$, $x \in A_n$, $z' \in \lambda$, to dawałoby to: $b = x + x' + z' = x'' + z'$, $x'' \in A_n$. Wtedy b musiałby jednak należeć do B_n, co jest niemożliwe. W konsekwencji, z spełnia wszystkie założenia lematu.

Lemat XXXIII. *Istnieje liniowo niezależna baza skończona*

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_m$$

ciała K względem D, tj. każdy element K może zostać przedstawiony w jeden i tylko jeden sposób w postaci

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \qquad (\alpha_i \in D).$$

Dowód. Niech $x_1 = e$. Załóżmy, że mamy już w K system

$$(3) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

liniowo niezależnych względem D elementów tego rodzaju, że $x_i \in \rho$ oraz $x_i - x_j \notin \lambda$ dla $i \neq j$. Albo zbiór wszystkich elementów o postaci

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (\alpha_i \in D)$$

pokrywa się z K, albo można ten system rozszerzyć, na mocy lematu XXXII do systemu $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, który spełnia te same warunki. Na podstawie zwartości ρ i ze względu na lemat XX widać, że to rozszerzenie systemu (3) nie może być bez końca przedłużane i w konsekwencji dochodzimy wreszcie do systemu (1), który tworzy liniowo niezależną względem D bazę dla K.

Lemat XXXIII oznacza, że K jest izomorficzne z algebrą z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych w sensie Dicksona. W tym przypadku K musi być izomorficzne z jednym z trzech ciał podanych w twierdzeniu I, co pierwszy udowodnił Frobenius.[7] Dowód tego twierdzenia, który nie korzysta ze skomplikowanego aparatu pomocniczego Frobeniusa znajduje się w książce Dicksona „Algebren und ihre Zahlentheorien" (wydanie niemieckie s. 46, twierdzenie V).

Otrzymano 17 maja 1931.

* * *

Podstawa tłumaczenia: Lew Pontriagin, Über stetige algebraische Körper. *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. **33**, No. **1**, 1932, 163–174.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail: pogon@amu.edu.pl

[7] *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. **84**.