

Piotr Błaszczuk, Mirosława Sajka

O liczbach ujemnych z perspektywy historycznej i dydaktycznej*

Abstract. We identify two ways of introducing negative numbers. In the first one, a totally ordered set $(\mathbb{L}, \prec)$ is presupposed, an element 0 in L is arbitrarily taken, and a number a is negative when $a \prec 0$. In the second one, a negative number is defined by the formula $a + (-a) = 0$. From a mathematical perspective, the first method involves the idea of a totally ordered group $(\mathbb{G}, +, 0, <)$, while the second one considers the idea of the algebraic group $(\mathbb{G}, +, 0)$ alone. Through the analysis of source texts, we show that the first model originates in John Wallis' 1685 *Treatise of Algebra*, while the second one comes from the theory of polynomials, as developed by Descartes in his 1637 *La Géométrie*. In mathematical education, the first model is applied in the overwhelming majority. Still, we identify a theory that applies to the second model. We show how to develop it further and simplify the representation of the operation $a + (-a) = 0$ by turning the second model into a tablet game.

1. Wstęp

Matematyka grecka badała liczby i *wielkości*. Liczby były definiowane jako wielość *monad*, co określało raczej ich własności ontologiczne niż matematyczne. Z uwagi na operacje, jakie przeprowadzono na liczbach, ich współczesnym odpowiednikiem są liczby naturalne. Pojęcie *wielkości* odnosiło się do obiektów geometrycznych: *wielkość* oznaczała dosłownie odcinek, a nie długość odcinka, kwadrat – a nie pole kwadratu, sześciąt – a nie objętość sześciąnu. Za współczesny odpowiednik *wielkości* można uznać liczbę rzeczywistą dodatnią, za pomocą liczby rzeczywistej opisujemy bowiem długość, pole czy objętość.

Podział na liczby i *wielkości* został przeniesiony do matematyki nowożytnej i trwał do końca XVII wieku. Z czasem rozróżnienie to stopniowo zacierало się, aż

*On the Negative Numbers from the Historical and Educational Perspective

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97A30; Secondary: 97F40, 97D20

Key words and phrases: Negative numbers, History of mathematics, Mathematics education.

na przełomie XIX i XX wieku wprowadzono – za pomocą aksjomatów lub konstrukcji – różne struktury liczbowe: liczby zespolone, kwaterniony, liczby rzeczywiste, naturalne i wymierne (w takiej właśnie kolejności).

Powszechnie przyjmuje się, że liczby ujemne wprowadzono do matematyki europejskiej w XVII wieku. Istotnie, po raz pierwszy zostały one zastosowane przez Kartezjusza w *La Géométrie* (1637), a później przez Johna Wallisa w *Treatise of Algebra* (1685). Proces ten w pierwszym rzędzie dotyczył *wielkości* ujemnych, a dopiero w drugiej kolejności liczb. Fakt, że *wielkości* i liczby były wiązane z przedmiotami – obiektami geometrycznymi czy monadami – pozwala zrozumieć, dlaczego liczby ujemne pojawiały się w matematyce tak późno. Trudność, jaką musieli pokonać i Kartezjusz, i Wallis, polegała na tym, że pojęcie wielkości odnosiło się do obiektów geometrycznych i nie było przedmiotów, które można było nazwać *ujemnymi obiektami geometrycznymi*, podobnie, nie było przedmiotów, które można było nazwać *ujemnymi monadami*. W obydwu przypadkach liczby ujemne wprowadzono więc na mocy konwencji: u Wallisa było to położenie względem wybranego punktu na osi liczbowej, u Kartezjusza czysto matematyczna reguła $a + (-a) = 0$, gdzie a oznaczało odcinek, zaś znak minus zyskał znaczenie w teorii wielomianów.

Historia pokazuje, że pojęcie liczby ujemnej jest trudne – jest zawile dlatego, że nie ma oczywistej reprezentacji. Podczas, gdy liczby naturalne można wprowadzać za pomocą konkretnych przedmiotów, kamyków, guzików itp., gdy liczby rzeczywiste można wiązać z obiektami geometrycznymi i wskazywać na długość odcinka, pole kwadratu, objętość sześcianu, to wprowadzenie liczb ujemnych wiąże się nie z przedmiotem, a z konwencją. Jest to wprost widoczne w zapisie *Podstawy Programowej*, gdzie czytamy: „[Uczeń] podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych”¹. Te praktyczne przykłady to konwencje życia społecznego: dług, temperatura poniżej zera, winda i piętra budynku poniżej poziomu 0, depresja w znaczeniu geograficznym. W przykładach tych nie sposób wskazać przedmiot czy zjawisko, które będzie konkretyzacją pojęcia liczba ujemna – zmieniając położenia punktu 0, to co było dodatnie, może stać się ujemne lub odwrotnie. Wskazane przykłady ilustrują ideę osi liczbowej – ciągłej, $\mathbb{R}$, lub dyskretnej, $\mathbb{Z}$. Dokładniej, zakładają obraz linii geometrycznej, zbioru liniowo uporządkowanego $(\mathbb{L}, <)$, na który nakładana jest skala liczbową $(\mathbb{R}, +, 0, <)$ czy $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, przy czym 0 może być przypisane dowolnemu elementowi $\mathbb{L}^2$. To, co jest kluczowe dla pojęcia liczby ujemnej, czyli operacja $1 + (-1) = 0$, jest w tych przykładach albo przyjęte jako oczywiste, albo objaśniane za pomocą porządku na linii $(\mathbb{L}, <)$ i to właśnie ten porządek jest opisywany konwencjami: ruch w prawo – ruch w lewo, w górę – w dół, otrzymałem – straciłem, cieplej – zimniej. Operacja $1 + (-1) = 0$ czy to w grupie $(\mathbb{R}, +, 0)$, czy $(\mathbb{Z}, +, 0)$, jest więc objaśniania za pomocą porządku $<$, który nie jest matematycznie opisany.

Świat nowych technologii pozwala rozszerzyć zakres przykładów, do których można się odwoływać, wprowadzając liczby ujemne. Doskonałym narzędziem jest gra *Minecraft*. Jest ona przewidziana dla dzieci w wieku 7–16 lat i w sposób zu-

¹Zob. Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła podstawowa. Matematyka: (2017). Dobra Szkoła. MEN i ORE

²Zob. R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*, §2; w niniejszym tomie.

pełnie naturalny, to jest bez żadnego wstępnego przygotowania, bez instrukcji i reguł, wprowadza w świat, którego części są lokalizowane za pomocą współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Po kilku sesjach gracz doskonale wie, gdzie szukać wyspy o współrzędnych $(-10, 100)$, wie, że odległość od -3 do 5 wynosi 8 , a od -3 do -1 wynosi 2 . Jeżeli nauczyciel, który ma wprowadzić pojęcie układu kartezjańskiego, pozna tę grę, to wystarczy, że na pierwszej lekcji powie, że będzie zajmował się *kordami* – taka spolszczona wersja słowa *co-ordinate* funkcjonuje w slangu graczy na oznaczanie współrzędnych kartezjańskich – i może przyjąć, że słuchacze mają już ukształtowane wstępne intuicje dotyczące układu kartezjańskiego i działań w grupie $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Przykład ten świadczy o tym, że to nauczyciel, aby udoskonalić nauczanie, powinien poznać konwencje, którymi operują uczniowie.

W artykule skupiamy się jednak nie na konwencjach związanych z wprowadzeniem liczb ujemnych, ale na reprezentacjach. Czy w przypadku liczb ujemnych jest to możliwe, czy można wskazać jakieś realne odpowiedniki liczb ujemnych? Czy można reprezentować operację $1 + (-1) = 0$ inaczej niż za pomocą porządku opartego na konwencji?

W dobie współczesnych technologii pojęcie konkretności i związanych z tym reprezentacji nabiera nowego sensu: świat wirtualny jest oczywiście różny od realnego, ale z drugiej strony przedmioty wirtualne są czymś więcej niż konwencją społeczną. Gdy konwencja społeczna lub reguła matematyczna, na której są oparte liczby ujemne, zostanie przeniesiona w świat wirtualny i połączona z ekranem dotykowym, wtedy może być powiązana z konkretnym aktem fizycznym, a to z kolei może wytworzyć nową jakość w nauczaniu³.

W artykule omawiamy stosowane we współczesnej dydaktyce sposoby wprowadzania liczb ujemnych. Szczególną uwagę poświęcamy systemowi *guziczkowemu*, który jest uznawany za najbardziej efektywny. Pokazujemy, jak można zmodyfikować go do wersji na ekran dotykowy, tak aby działanie $1 + (-1) = 0$ miało konkretny odpowiednik – konkretny, ale w świecie wirtualnym. Część dydaktyczną poprzedzimy analizą historyczną.

2. Historia liczb ujemnych

W matematyce greckiej pojęcie liczby, ἀριθμός, odnosiło się do tego, co wspólnie nazywamy liczbą naturalną, przy czym 2 było najmniejszą liczbą, 1 utożsamiano z monadą, μονάς, zaś liczbę w ogóle definiowano jako wielość monad. Przedstawienia liczby w postaci koralików, kamyków, guziczków itp. dobrze reprezentują tę ideę⁴. Matematyczne i filozoficzne podstawy greckiej arytmetyki są wyłożone w księgach VII–IX *Elementów* Euklidesa; drugie znaczące dzieło z teorii liczb, rozwijające raczej praktykę matematyczną niż jej podstawy to *Arytmetyka* Diofantosa z Aleksandrii.

³W artykule pomijamy technologie bardziej zaawansowane, wykorzystywane np. w urządzeniach *Oculus* czy *Kinect*, bo w odróżnieniu od ekranów dotykowych, nie są one jeszcze powszechnie dostępne.

⁴Dla jasności należy to odróżnić od kamyków, czy koralików na liczydło, gdyż takie przedstawienie wiąże się już z zapisem pozycyjnym.

Podstawowe pojęcie geometrii greckiej to wielkość, μέγεθος⁵. Wielkości to obiekty geometryczne: odcinki, kąty, trójkąty, wielokąty wypukłe, bryły, przy czym odcinki stanowią jeden rodzaj, kąty inny rodzaj itd. O wielkościach w sposób ogólny i aksjomatyczny traktuje księga V *Elementów*. Wielkości tego samego rodzaju, powiedzmy odcinki⁶, tworzą strukturą $(M, +, <)$, gdzie porządek $<$ jest liniowy, a dodawanie $+$ łączne i przemienne. Związki między dodawaniem i porządkiem zadane są aksjomatami:

- E1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})(nx > y)$,
 E2 $(\forall x, y)(\exists z)(x < y \Rightarrow x + z = y)$,
 E3 $(\forall x, y, z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$,
 E4 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)(ny = x)$,
 E5 $(\forall x, y, z)(\exists v)(x : y :: z : v)$.

E1 to aksjomat Archimedesesa, w *Elementach* występuje on jako definicja V.4.

W aksjomacie E2 odnajdujemy ograniczone odejmowanie, tzn. możemy przyjąć, że $z = y - x$, ale przy założeniu, że $x < y$. Operacja odejmowania, nawet ograniczonego, wprost nie występuje w matematyce greckiej; w tekstach źródłowych zależność E2 jest mniej więcej tak oddawana⁷: *jeżeli x jest mniejszą, zaś y większą, to dla pewnego z jest y = x + z*.

E3 to zależność, którą współcześnie nazywamy zgodnością porządku z dodawaniem.

W związku z aksjomatami E1, E2, E3 zauważmy, że w matematyce greckiej relacja mniejszy większy występuje przede wszystkim na gruncie geometrii; w arytmetyce także jest stosowana, ale pełni dużo mniejszą rolę niż w geometrii⁸.

Aksjomat E4 formalizuje powszechne przekonanie Greków, że to co ciągle, czyli obiekty geometryczne, w szczególności odcinki, *jest podzielne na części, które są dalej podzielne*⁹.

W aksjomacie E5 jest zagwarantowane istnienie tzw. czwartej proporcjonalnej; symbol $x : y :: z : v$ odnosi się do proporcji wielkości.

Teoria proporcji jest rozwijana w księdze V i spełniała w matematyce greckiej taką rolę, jaką we współczesnej geometrii pełni arytmetyka liczb rzeczywistych.

⁵Łacińskie *magnitudo*, francuskie *quantité*, angielskie *magnitude* lub *quantity*, niemieckie *Größe* lub *Quantität*.

⁶Euklides nazywa odcinek *linią, prostą ograniczoną*, εὐθεία πεπερασμένη; w tradycji wywodzącej się od Arystotelesa, która – przypomnijmy – oddziaływała na naukę jeszcze w XVII wieku – odcinek nazywano *długością*, μήκος. Współcześnie – jak wiemy – długość to liczba (rzeczywista) przypisana odcinkowi, a nie sam odcinek

⁷Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Euklides, *Elementy, Księgi V–VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

⁸W książce S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, Oxford 1997, relacja mniejszy-większy jest badana jedynie na gruncie arytmetyki; i chociaż praca ta zawiera odniesienia historyczne (m.in. Rzym, Chiny, Babilonia), to tradycja grecka nie jest w niej w ogóle obecna, mimo że matematyka wyrasta przede wszystkim z tradycji greckiej. Książka Dehaene zyskała dużą sławę w środowiskach *cognitive science* i zaczęła już oddziaływać na dydaktykę matematyki okresu wczesnoszkolnego.

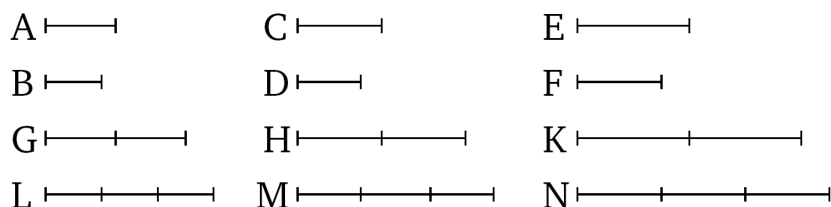
⁹Jest to parafraza zdania „wszystko ciągle jest podzielne na te, które są podzielne na zawsze podzielne”, Arystoteles, *Physica*, 231a 15–16, w: I. Bekker (ed.), *Aristotelis Opera*, Georg Reimer, Berlin 1831, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

Dalej, w księdze VI *Elementów* wyłożona jest teoria figur podobnych. W antycznej teorii proporcji stosunek $a : b$ nie ma znaczenia matematycznego, pełnoprawnym obiektem matematycznym – to znaczy takim, który jest zdefiniowany i przekształcany – jest proporcja; w szczególności w matematyce greckiej nie istnieje pojęcie skali podobieństwa, a wszystkie znane twierdzenia o figurach podobnych są wyrażone za pomocą proporcji. W teorii proporcji występują wprost figury geometryczne, np. odcinki i trójkąty, a nie tak jak współcześnie – długości odcinków czy pola figur. Tak na przykład twierdzenie VI.1 stanowi: *Trójkąty o tej samej wysokości mają się tak do siebie jak ich podstawy*. Oznaczając trójkąty jako T_1, T_2 , ich podstawy jako a, b , dostaniemy $T_1, T_2 :: a : b$.

Współczesnym odpowiednikiem pojęcia *wielkość* jest więc nie liczba w ogóle, ale raczej długość odcinka, pole figury bądź miara kąta. Gdy wielkość jest rozumiana jako obiekt geometryczny, to łatwiej zrozumieć, dlaczego tak długo w matematyce nie było wielkości zerowej i ujemnej. Podobnie współcześnie, nie przyjmujemy ujemnej długości, odległości czy ujemnego pola figury.

Do tego szkicowego opisu dodajmy jeszcze jedną uwagę związaną z pierwszym w historii przedstawieniem osi liczbowej. Otóż w księdze V wielkości są traktowane abstrakcyjnie i wówczas są reprezentowane jako odcinki. Oto dla przykładu teza twierdzenia V.11 wraz z towarzyszącym mu diagramem, które traktuje o przechodniości proporcji:

„Te same w tym samym stosunku są ze sobą także w tych samych.



Niech bowiem będzie, że jak A do B, tak C do D, jak zaś C do D, tak E do F. Twierdzą, że jak A jest do B, tak E do F”¹⁰.

W matematyce greckiej, odcinki są przedstawiane na diagramach z końcami w postaci krótkich pionowych kresek – są to odcinki domknięte (we współczesnym rozumieniu). Dodajmy wreszcie, że w księgach VII–IX liczby naturalne są przedstawiane podobnie, jako odcinki.

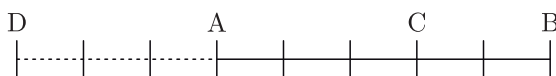
3. John Wallis. Liczby ujemne na osi liczbowej

Treatise of Algebra Johna Wallisa wydano w roku 1685. Praca ta odegrała znaczącą rolę w rozwoju rachunku różniczkowego. Niżej prezentujemy tłumaczenie fragmentu dotyczącego liczb ujemnych. Z perspektywy generalnego planu traktatu, wątek ten ma pomniejsze znaczenie, z czasem stał się jednak sławny, bo zawiera pierwsze w historii matematyki przedstawienie osi liczbowej. Przez odwołanie do osi Wallis wprowadza liczby ujemne.

¹⁰P. Błaszczuk, K. Mrówka, *op. cit.*, s. 31.

„Niemożliwe jest, aby dowolna wielkość (*quantity*) była ujemna. [1] Nie jest bowiem możliwe, aby wielkość (*magnitude*) była mniejsza od niczego (*nothing*), czy aby liczba (*number*) była mniejsza niż nic (*none*). Jednakże założenie o wielkościach ujemnych (*negative quantities*), gdy tylko poprawnie rozumiane, nie jest ani absurdalne, ani nieużyteczne. I chociaż z uwagi na samą tylko notację algebraiczną wprowadza wielkości mniejsze od niczego (*quantities less nothing*), [2] to w zastosowaniach fizycznych oznacza wielkości równie realne, jak w przypadku znaku +, należy im tylko nadać przeciwnie (*contrary*) znaczenie.

Dla przykładu przyjmijmy, że mężczyzna posunął się do przodu (z A do B) o 5 jardów, a następnie cofnął się (z B do C) o 2 jardy. Wówczas na pytanie, o ile się przesunął (w całym tym marszu), gdy znalazł się w C, albo o ile jardów przesunął się w stosunku do A, odpowiem (odejmując 2 od 5), że przesunął się o 3 jardy (bo $+5 - 2 = +3$).



Gdy jednak przesunie się o 5 jardów do B, a następnie cofnie o 8 jardów do D i wtedy zapytamy, o ile się przesunął z A, gdy znalazł się w D, to odpowiem, że o -3 jardy (ponieważ $+5 - 8 = -3$), to znaczy przesunął się w lewo o 3 jardy mniej niż nic (*nothing*). [...] W rezultacie -3 równie dobrze definiuje punkt D, jak $+3$ definiuje punkt C; przy czym nie do przodu, jak się spodziewano, ale do tyłu względem A. Zatem $+3$ oznacza trzy jardy do przodu, a -3 oznacza 3 jardy do tyłu, ciągle jednak na tej samej linii prostej. I każda wyznacza (przynajmniej na tej samej nieskończonej linii) jeden i tylko jeden punkt, i tak jest z wszystkimi równaniami liniowymi (*lateral equations*), że mają dokładnie jeden pierwiastek (*root*). A co jest dopuszczalne z odcinkami, z tego samego powodu musi być też dopuszczalne z figurami”¹¹.

Ze zdania [1] wynika, że Wallis ma na uwadze przedstawienie wielkości jako obiektu geometrycznego i liczby jako mnogości monad, stąd ma wynikać niemożliwość ujemnych wielkości i liczb. Niemożliwość ta jest raczej ontologiczna niż matematyczna – pochodzi z teorii bytu, a nie jakiejś teorii matematycznej. W zdaniu [2] Wallis stwierdza, że liczby ujemne są tak samo realne jak dodatnie, trzeba jedynie nadać realny sens pojęciu *przeciwny*. Z następnego akapitu wnosimy, że *przeciwny* oznacza poruszający się w przeciwnym kierunku. Oś przedstawiona na diagramie może być interpretowana jako $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$. Z uwagi na zakładane pojęcie ruchu jest to oś uporządkowana liniowo, a z innych fragmentów traktatu wynika, iż porządek ten jest zgodny z dodawaniem, czyli oś liczbową przedstawioną na diagramie to $(\mathbb{R}, +, 0, <)$ lub $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$, gdzie 0 oznacza wyróżniony przez Wallisa punkt A. Wprowadzając liczby ujemne, Wallis zakłada więc w sposób niejawni pojęcie porządku liniowego zgodnego z dodawaniem.

Reasumując. Wallis wprowadza liczby ujemne zakładając, że na linii dany jest porządek liniowy, który nie jest opisany matematycznie, a raczej metaforycznie, przez obraz ruchu, w szczególności oczywistość operacji $1 + (-1) = 0$ opiera się na

¹¹John Wallis, *Treatise of Algebra*, John Playford, London 1685, s. 264–265, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka. Numery zdań zostały dodane.

niejawnych założeniach dotyczących tego porządku: postępując krok do przodu, a później do tyłu, wrócimy do punktu wyjścia.

We współczesnej dydaktyce techniki wprowadzania liczb ujemnych w zdecydowanej większości nawiązują do tego modelu, podobnie w sposób niejawni zakładają porządek liniowy zgodny z dodawaniem, na jakiś przedstawionej linii (ciągłej lub dyskretnej).

4. Kartezjusz. Liczby ujemne jako pierwiastki równań

La Géométrie Kartezjusza wydano w roku 1637. Praca ta odegrała kluczową rolę w zmianie paradygmatu opartego na teorii proporcji na paradygmat nowożytny, w którym odcinki tworzą strukturę ciała uporządkowanego. Kartezjusz mianowicie przyjął odcinek jednostkowy, 1, zdefiniował dodawanie, dzielenie i pierwiastkowanie odcinków tak, że wynik działania był odcinkiem. W rezultacie odcinki utworzyły strukturę $(\mathbb{F}, +, \cdot, \div, \sqrt{}, 1, <)$; uwzględniając zależności między działaniami, tworzyły one strukturę ciała uporządkowanego z tym zastrzeżeniem, że nie było ani odcinków ujemnych, ani odcinka zerowego $(\mathbb{F}_+, +, \cdot, \div, 1, <)$. Jednakże specyficzne rozumienie odcinka ujemnego pojawia się w *La Géométrie* w teorii wielomianów.

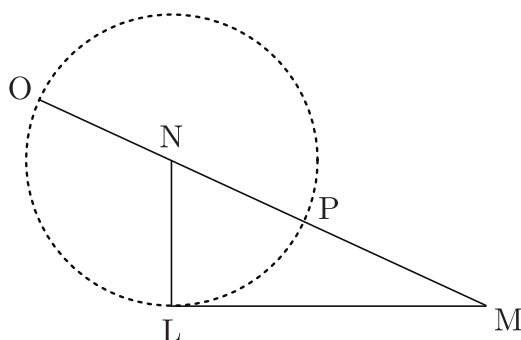
4.1. Pierwiastki wielomianów w *La Géométrie*

La Géométrie składa się z trzech ksiąg, teoria wielomianów jest wyłożona w księdze III. W księdze II poznajemy, jak zadanie geometryczne można zapisać w postaci wielomianu, w III – jak konstruować pierwiastki wielomianów.

Kartezjusz nie podaje wprost definicji pierwiastka, ale z kontekstu wnosimy, że gdy $\psi(x)$ jest wielomianem, to odcinek z spełniający równanie $\psi(z) = 0$ lub równoważne mu jest pierwiastkiem wielomianu $\psi(x)$. Takie rozumienie pierwiastka wystąpi wprost w księdze III, w księdze I jest ono przedstawione w mniej abstrakcyjnej postaci, mianowicie jako równość odcinków. Oto odpowiedni fragment księgi I:

„ten pierwiastek (*racine*), lub nieznana linia, dają się łatwo znaleźć. Jeśli bowiem mamy na przykład $z^2 = az + bb$, to konstruuje trójkąt prostokątny NLM, w którym bok LM jest równy b – pierwiastkowi kwadratowemu znanej wielkości bb , a drugi, LN, jest równy $\frac{1}{2}a$ – połowie drugiej znanej wielkości, pomnożonej przez z , o której zakładam, że jest linią nieznaną. Dalej, przedłużając MN – podstawę trójkąta, aż do O, tak by NO była równa NL, całość OM jest szukaną linią z ”¹².

¹²(Descartes 1637, 302).



Rysunek 1. Kartezjusz, *Geometria*, s. 302.

Odcinek OM jest więc pierwiastkiem równania $z^2 - az - bb = 0$, przy czym a, b oraz z są odcinkami.

Przedstawiona konstrukcja jest interpretacją twierdzenia III.36 z *Elementów* opartą na definicji mnożenia, dlatego w księdze I, na początku traktatu, Kartezjusz zapisuje równanie nie w postaci $z^2 - az - bb = 0$, ale jako równość odcinków z^2 oraz $az + bb$. W kolejnych akapitach pokazuje, jak skonstruować pierwiastki równań $z^2 = -az + b^2$ oraz $z^2 = az - b^2$. W żadnym przypadku nie uwzględnia rozwiązań, które dzisiaj nazywamy ujemnymi. Więcej, nie rozważa też równania $z^2 = -az - b^2$.

Minus występujący w tych równaniach jest interpretowany na gruncie aksjomatu E2: każde równanie może być przekształcone do równości wyrażeń opisujących odcinki, na przykład zamiast $z^2 = -az + b^2$ może przyjąć $z^2 + az = b^2$. Można wnosić, że równanie $z^2 = -az - b^2$ nie jest rozpatrywane, bo w zakładanej w księdze I czysto geometrycznej interpretacji, z^2 byłby *odcinkiem ujemnym*.

W księdze III ograniczenie wynikające z aksjomatu E2 przestanie obowiązywać. Kolejny cytat pochodzi z księgi III.

„[1] w każdym równaniu, ile nieznana wielkość (*quantité*) ma wymiarów, tyle może być różnych pierwiastków, to znaczy wartości (*valeurs*) tej wielkości; [2] bo na przykład, jeśli założymy, że x jest równe 2, lub $x - 2$ jest równe niczemu (*egal a rien*), i znowu $x = 3$, albo $x - 3 = 0$, to [3] mnożąc te dwa równania $x - 2 = 0$ oraz $x - 3 = 0$, jedno przez drugie, otrzymujemy równanie $xx - 5x + 6 = 0$, albo $xx = 5x - 6$, w którym wielkość x ma wartość 2 i zarazem wartość 3. [4] Jeśli znowu mamy $x - 4 = 0$ i mnożymy tę sumę przez $xx - 5x + 6 = 0$, to otrzymamy inne równanie $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, w którym x , mając trzy wymiary, ma również trzy wartości 2, 3, i 4”¹³.

Ad 1. *Nieznana wielkość* to x , jej *wymiar* to wykładnik potęgi, np x^3 . *Novum La Géométrie* polegało na tym, że gdy we wcześniejszej matematyce jedynie wyrażenia x, x^2, x^3 miały sens matematyczny, bo odpowiadały im obiekty geometryczne – odcinek, kwadrat, sześcián, to w systemie Kartezjusza, wyrażenia x^2, x^3 , ale także x^4, x^5 itd. – dzięki temu, że wynikiem mnożenia odcinków jest odcinek – oznaczały odcinki.

¹³(Descartes 1637, 372). Numery zdań zostały dodane.

Ad 2. Zależności $2 - 2 = 0$, $3 - 3 = 0$, czy po prostu

$$1 + (-1) = 0, \quad (1)$$

są przyjmowane bez uzasadnienia.

Ad 3. W tym zdaniu bez uzasadnienia przyjmowana jest reguła $(-2) \cdot (-3) = 6$, podobnie bez uzasadnienia przyjmowana jest reguła $(+1) \cdot (-1) = -1$. W rezultacie Kartezjusz stosuje reguły

$$(-1) \cdot (-1) = 1, \quad (+1) \cdot (-1) = -1. \quad (2)$$

Reguły (1), (2) są stosowane w wielu miejscach księgi III.

Zauważamy też, jak Kartezjusz prowadzi czytelnika od konwencji geometrycznej, opartej na równości odcinków $xx = 5x - 6$, do czysto algebraicznej postaci $xx - 5x + 6 = 0$ w pierścieniu wielomianów.

Ad 4. Liczby 2, 3, 4 są pierwiastkami wielomianu $\psi(x) = x^3 - 9xx + 26x - 24$, bo $\psi(2) = \psi(3) = \psi(4) = 0$. To jest właśnie drugie, abstrakcyjne rozumienie pierwiastka, o którym wspominaliśmy wyżej.

W następnym akapicie pada pojęcie „fałszywego” pierwiastka:

„Zdarza się jednak często, że niektóre z pierwiastków są fałszywe (*faussent*) lub mniejsze od niczego (*moindres que rien*). Jeśli zakładamy, że x określa również brak (*defaut*) wielkości 5, wtedy otrzymujemy: $x + 5 = 0$, które będąc pomnożone przez $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, daje $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, równanie z czterema pierwiastkami, mianowicie trzema prawdziwymi 2, 3, 4, oraz jednym fałszywym 5”¹⁴.

Od pierwszych stron *La Géométrie* do tego miejsca litera x oznaczała odcinek, wielkość. Występująca w cytowanym fragmencie równość $x + 5 = 0$, nie może być przekształcona do postaci geometrycznej $x = -5$. Stąd wynikają specjalne zabiegi językowe: pierwiastek *fałszywy*, *mniejszy od niczego*. Kartezjusz nie pisze wprost o *fałszywym* odcinku.

Pierwiastek ujemny jest co prawda wiązany z *brakiem*, z porządkiem – jest „mniejszy niż nic” – ale sens matematyczny nadaje mu formuła $x + 5 = 0$, a dalej, fakt, że czynnik $(x + 5)$ występuje w rozkładzie wielomianu, mianowicie

$$(x + 5)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = (x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120).$$

Takie algebraiczne podejście jest zapisane w następującej regule:

„Widać wyraźnie, że suma równania [czyli wielomian $\psi(x)$ – P.B.], które zawiera kilka pierwiastków, może być zawsze podzielona przez dwumian złożony z wielkości nieznanej minus wartość jednego dowolnego prawdziwego pierwiastka [czyli $(x - a)$ – P.B.] lub plus wartość jednego fałszywego, dzięki czemu o tyle samo zmniejszamy jego wymiar”¹⁵.

Czyli,

$$(x - a)|\psi(x) \Rightarrow \psi(a) = 0. \quad (3)$$

¹⁴(Descartes 1637, 372).

¹⁵(Descartes 1637, 372).

„I odwrotnie, jeśli suma równania nie może zostać podzielona przez dwumian złożony z nieznannej wielkości $+$ lub $-$ jakaś inna wielkość, to świadczy to o tym, że ta inna wielkość nie jest wartością żadnego pierwiastka” (s. 373).

Czyli

$$(x - a) \nmid \psi(x) \Rightarrow \psi(a) \neq 0.$$

Ostatecznie

$$(x - a) \mid \psi(x) \Leftrightarrow \psi(a) = 0. \quad (4)$$

Jeżeli więc zachodzi

$$(x + 5) \mid (x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120),$$

to 5 jest *falszywym* pierwiastkiem.

Do pierwiastków ujemnych dochodzi Kartezjusz także na podstawie następującej reguły:

„badając kolejno wszystkie wielkości, które mogą dzielić bez ułamka ostatni wyraz, należy sprawdzić, czy któraś z nich połączona z wielkością nieznaną znakiem $+$ lub $-$ może utworzyć dwumian, który dzieli całą sumę”¹⁶.

W przykładzie ilustrującym tę regułę jako dzielniki 64 Kartezjusz wskazuje liczby 1, 2, 4, 8, 32, 64, ale szukając pierwiastków sprawdza także dzielniki ujemne $-1, -2, -4, -8, -32, -64$.

Obok ujemnych Kartezjusz rozważała także zespolone pierwiastki:

„Zresztą, zarówno prawdziwe, jak i fałszywe pierwiastki nie zawsze są rzeczywiste (*reelles*), ale czasem tylko urojone (*imaginaires*), co oznacza, że w każdym równaniu można zawsze wyobrazić sobie ich tyle, ile wymienilem. Zdarza się jednak, że nie ma żadnej wielkości odpowiadającej tym urojonym, w ten sposób znowu możemy wyobrazić sobie trzy w tym $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, ale tylko jeden jest rzeczywisty, 2, zaś dwa pozostałe, powiększane, pomniejszane lub mnożone w przedstawiony przeze mnie sposób, pozostają urojone”¹⁷.

Ten wątek nie jest dalej rozwijany, ale warto się przy nim zatrzymać. Wielomian $x^3 - 6xx + 13x - 10$ przedstawia się w postaci

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = (x - 2)(x - 2 + i)(x - 2 - i).$$

Liczby zespolone nie tworzą – jak wiadomo – ciała uporządkowanego i w tym przypadku metafory oparte na porządku – *brak, mniej niż nic* – nie miałyby matematycznego uzasadnienia. Liczba $2 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6xx + 13x - 10$ jedynie na mocy reguły (4).

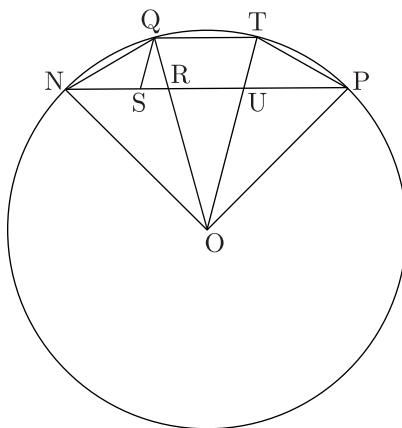
¹⁶(Descartes 1637, 381). W teorii wielomianów znane jest twierdzenie: Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite, to każdy pierwiastek całkowity jest dzielnikiem wyrazu wolnego. Kartezjusz nie pisze o podzielności w pierścieniu liczb całkowitych, ale o „podzielności bez ułamka”.

¹⁷(Descartes 1637, 380).

4.2. Trysekcja kąta

Pokażemy teraz jak Kartezjusz stosuje *falszywe* pierwiastki w zagadnieniu trysekcji kąta. Zadanie składa się z trzech części: (1) ułożenie równania, (2) konstrukcji pierwiastków, (3) sprawdzenie. Czytamy:

„Tak samo, jeśli chcemy podzielić kąt NOP, lub łuk, lub część okręgu NQPT na trzy równe części, przyjmując NO = 1 za promień okręgu, NP = q za cięciwę danego łuku oraz NQ = z za cięciwę jednej trzeciej tego łuku, otrzymujemy równanie $z^3 = 3z - q$. Rysując bowiem linie NQ, OQ, OT oraz prowadząc QS równoległą do TO, widzimy, że jak NO jest do NQ, tak NQ do QR, oraz QR do RS, tak że jeśli NO jest 1 i NQ jest z , to QR jest z^2 i RS jest z^3 ; a ponieważ potrzeba tylko RS lub z^3 , aby linia NP, która jest q , była potrojeniem NQ, która jest z , to mamy $q = 3z - z^3$, lub $z^3 = 3z - q$ ”¹⁸.



Rysunek 2. Kartezjusz, *Geometria*, s. 396. Trysekcja kąta. Analiza

Istotnie, można pokazać¹⁹, że odcinek NP jest równy $3z - z^3$, zatem $q = 3z - z^3$, lub

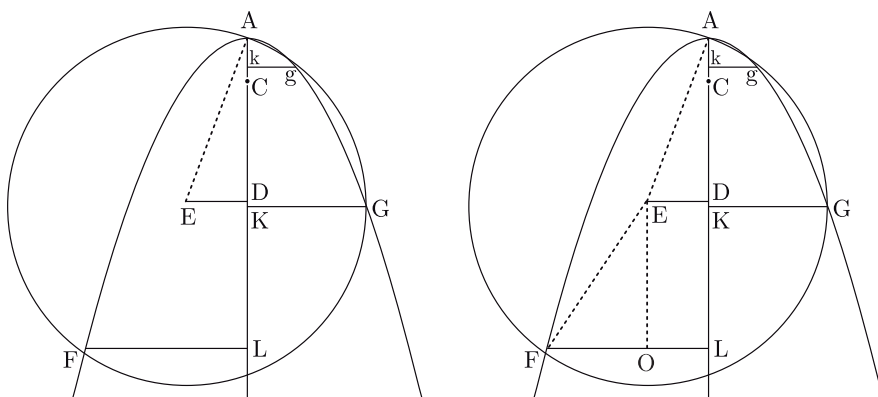
$$z^3 - 3z + q = 0. \quad (5)$$

W ten sposób zagadnienie trysekcji zostało sprowadzone do wielomianu.

Konstruując pierwiastki równania (5), Kartezjusz zakłada, że na płaszczyźnie dana jest parabola $y = x^2$ oraz jej oś. Jest to więc konstrukcja za pomocą cyrkla, linijki i paraboli. Na osi paraboli odkładane są punkty C, D tak, że $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{3}{2}$. Z punktu D prowadzona jest prostopadła do osi, na której odkładany jest punkt E tak, że $ED = \frac{1}{2}q$. Ze środka E zakreślany jest okrąg o promieniu EA. Przetnie on parabolę w punktach g, G, F. Opuszczając z tych punktów prostopadłe do osi paraboli wyznaczone zostaną punkty k, K, L. Odcinki kg, KG są pierwiastkami równania, zaś FL jest „fałszywym” pierwiastkiem.

¹⁸(Descartes 1637, 396–397).

¹⁹Zob. (Błaszczyk, Mrówka 2015, 296–298).



Rysunek 3. Trysekcja kąta. Konstrukcja pierwiastków

Trzeci etap, polega na sprawdzeniu czy wskazane odcinki spełniają równanie (5). Sam Kartezjusz nie zajmuje się takimi szczegółami. Pokażemy, że FL spełnia równanie (5). W tym celu konstruujemy trójkąt prostokątny EFO . Przyjmując $FL = z$, na podstawie równania paraboli dostajemy $AL = z^2$. Skoro $AD = 2$, to $EO = z^2 - 2$. Z konstrukcji wynika, że $ED = \frac{1}{2}q$ oraz $FO = FL - ED$.

Stosując do trójkąta EFO twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy

$$\begin{aligned} EF^2 &= FO^2 + EO^2 \\ &= \left(z - \frac{1}{2}q\right)^2 + (z^2 - 2)^2 \\ &= z^2 - zq + \frac{1}{4}q^2 + z^4 - 4z^2 + 4. \end{aligned}$$

Odcinek EF jest promieniem okręgu użytego w konstrukcji, zatem $EF^2 = \frac{1}{4}q^2 + 4$. Podstawiając to do ostatniego równania i redukując wyrazy podobne dostajemy:

$$z^4 - 3z^2 + zq = z(z^3 - 3z - q) = 0.$$

Stąd $z^3 - 3z - q = 0$ oraz $-1(z^3 - 3z - q) = 0$. Przyjmując podstawienie $z = -FL$, dostajemy

$$(-FL)^3 - 3(-FL) + q = 0.$$

Reasumując, dla wyводу Kartezjusza kluczowa jest reguła (1). Występujący w (1) znak 0 nie jest związany z osią liczbową. W tym sensie liczby ujemne wprowadzone są w grupie algebraicznej $(\mathbb{G}, +, 0)$.

Reguła (2) dotyczy operacji na znaku – wprowadzonym w (1).

Pierwiastki *falszywe* są tak samo odcinkami jak zwykle (bezzprzymiotnikowe) pierwiastki: z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że są opatrzone znakiem $-$, które podlega prawom (1), (2).

5. Porównanie. Dwa modele liczb ujemnych

Sposoby wprowadzenia liczb ujemnych, jakie znajdujemy u Wallisa i Kartezjusza, można przypisać do różnych modeli matematycznych. U Wallisa liczby ujemne są wprowadzane w grupie uporządkowanej $(\mathbb{G}, +, 0, <)$, przy czym reguły dotyczące porządku nie są wyeksplikowane, 0 jest ustanawiane na osi na mocy konwencji i odpowiednio na mocy tej konwencji wydzielana jest część ujemna i dodatnia, na mocy tej konwencji oparta jest też reguła $1 + (-1) = 0$.

U Kartezjusza minus, $-$, oraz 0 mają sens w grupie algebraicznej $(\mathbb{G}, +, 0)$ na gruncie reguły (1). Reguła (2) wiąże się z tym, że Kartezjusz wprowadził również mnożenie odcinków²⁰.

Czy można pokazać, że jedno podejście jest bardziej podstawowe niż drugie? W tym celu odwołamy się do idei grupy, w której porządek jest wyznaczony przez specjalny podzbiór – pomysł ten pochodzi z pracy Emila Artina i Otto Schreiera, w której był zastosowany do ciała algebraicznego²¹.

Niech $(\mathbb{G}, +, 0)$ będzie grupą algebraiczną (przemienne). Niech $\mathbb{B}$ będzie podzbiorem $\mathbb{G}$ spełniającym warunki:

$$(1) \ 0 \notin \mathbb{B},$$

$$(2) \ (\forall a \in \mathbb{F})(a \in \mathbb{B} \vee a = 0 \vee -a \in \mathbb{B})^{22},$$

$$(3) \ (\forall a, b \in \mathbb{B})(a + b \in \mathbb{B}),$$

gdzie $-a$ to element przeciwny do a , tj. $a + (-a) = 0$.

W zbiorze $\mathbb{G}$ wprowadzamy porządek następującą definicją:

$$a <_B b \Leftrightarrow_{df} b - a \in \mathbb{B}.$$

Pokazuje się, że porządek $<_B$ jest liniowy i zgodny z dodawaniem w grupie $(\mathbb{G}, +, 0)$. W tym sensie porządek jest wtórny w stosunku do struktury czysto algebraicznej.

6. Konsekwencje dydaktyczne

Różnice między wskazanymi modelami mają pewne konsekwencje dydaktyczne.

Nauczanie liczb ujemnych oparte na pierwszym modelu wiąże się z konwencjonalnym wyborem zera na linii (zbiorze liniowo uporządkowanym). Niżej pokażemy, że większość propozycji dydaktycznych odwołuje się do tego właśnie modelu.

Nauczanie według drugiego modelu wiąże się z podziałem przedmiotów – elementów G – na dwie grupy, na przykład różnego koloru, powiedzmy czerwone

²⁰W książce G. Lakoffa i R. Núñeza, *Where mathematics come from*, Basic Books, New York 2000, liczby ujemne i odpowiednie metafory są związane tylko z pierwszym modelem; zob. s. 89–92.

²¹Zob. Artin Emil, Schreier Otto, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5, 1926, s. 85–99.

²²W tym punkcie chodzi o prawo trychotomii: *Jest spełniony dokładnie jeden ze składników alternatywy* $a \in \mathbb{B} \vee a = 0 \vee -a \in \mathbb{B}$.

i niebieskie – przyjmijmy, że elementy niebieskie tworzą zbiór B. Para przedmiotów różniących się kolorem {niebieski, czerwony} jest interpretowana jako 0. Niżej pokażemy, że idea ta jest realizowana w tzw. *modelu guziczkowym*. Zaproponujemy także pewną modyfikację tego modelu, przenosząc go na tablet lub smartfon. Na ekranie dotykowym można bowiem zrealizować ideę, iż para {niebieski, czerwony} po prostu znika – tak właśnie można reprezentować 0. W oryginalnej wersji modelu guziczkowego 0 jest reprezentowane za pomocą sztucznych konwencji, których w grze można uniknąć.

Przedstawiony powyżej przegląd historyczny pozwala na sformułowanie jeszcze jednego wniosku: liczby ujemne nie mają konkretyzacji w bytach materialnych. Są tworem wyłącznie teoretycznym, który nie powstał w celu badania rzeczywistości, ale w celu opisywania i badania fenomenów matematycznych. Co więcej, można było obserwować niemal równoległe z liczbami ujemnymi były wprowadzane w życie liczby urojone, które zostały zaakceptowane niewiele później.

7. Rozwój intelektualny dzieci na etapie wprowadzania liczb ujemnych w szkole

Uczniowie zarówno w Polsce, jak i w większości krajów świata uczą się o liczbach ujemnych na stosunkowo wczesnych etapach kształcenia. W polskich programach zwykle zagadnienia te są po raz pierwszy poruszane na poziomie klasy 5 szkoły podstawowej i powracają, zgodnie z ideą spiralnego układu treści nauczania, ponownie w klasie 6. Czasami nauczyciele świadomie przesuwają wprowadzenie liczb ujemnych do klasy 6 ze względu na trudności związane z jego realizacją.

Jeśli przyjmiemy powszechnie uznaną teorię Jeana Piageta (1966, 1970), na której bazuje m.in. Podstawa Programowa (2017), to w okresie nauki w ośmioletniej szkole podstawowej²³ występują dwa etapy intelektualnego rozwoju uczniów. Pierwszy z nich nazywa się etapem operacyjnym konkretnym, drugi to etap operacyjny formalny. Etap konkretny przypada od 7 do 11 roku życia, a więc jest właściwy również dla ucznia klas 5–6. Na tym etapie dziecko uczy się i odkrywa matematykę za pomocą konkretnych odniesień do rzeczywistości. Wszelkie wprowadzane w tym okresie pojęcia i terminy, zgodnie z psychologią uczenia się, powinny być powiązane ze zjawiskami występującymi w otaczającym świecie. Na podstawie rozważania konkretnych obiektów i sytuacji dziecko uczy się matematyki, uczy się wnioskowania.

Rozwój myślenia abstrakcyjnego przypada od około 11 do 15 lat, a więc zwykle dopiero rozpoczyna się w klasie 6. Jednak jest to cecha indywidualna i może się on rozpocząć wcześniej lub później. Ten etap rozwoju nazywany jest etapem *operacyjnym formalnym*. Dopiero wtedy stopniowo zaczyna rozwijać się umiejętność prowadzenia rozumowań w oparciu o abstrakcyjne pojęcia matematyczne.

Sfard (1991) pisze z kolei o pewnym paradoksie, który sformułowała analizując procesy kształtowania pojęć i biorąc pod uwagę konstruktywistyczne podejście

²³Reforma szkolnictwa została wprowadzona 1 września 2017 r. w której powrócono do obowiązującego przed 2009 rokiem podziału na ośmioletnią szkołę podstawową i szkołę ponadpodstawową (4–5 letnią) poprzez likwidację gimnazjum i dołączenie do sześciu klas szkoły podstawowej klasy 7 i 8.

do nauczania, reprezentowane również przez Piageta. Twierdzi ona, że najpierw należy używać pojęcia matematycznego i operować nim, aby mogły nastąpić trzy fazy związane z jego pełnym ukonstytuowaniem w umyśle człowieka. Podając przykłady kształtowania pojęcia liczby i funkcji, twierdzi, że pojęcia nabywamy najpierw *operacyjnie* (*operationally*), a potem *strukturalnie* (*structurally*). Przejście do formy strukturalnej pojęcia – jako obiektu matematycznego – odbywa się w trzech krokach: *interioryzacji* (*interiorization*), *kondensacji* (*condensation*) i *uprzedmiotowienia* (*reification*).

Na etapie interioryzacji uczeń zapoznaje się z procesami, które w końcu zaowocują powstaniem nowego pojęcia. Te procesy są operacjami dokonywanymi na obiektach matematycznych niższego poziomu. Dla realizacji operacji nie zawsze są potrzebne obiekty materialne – możliwe jest myślenie w kategoriach operacji przy wykonywaniu samego ruchu, zmiany położenia. Interioryzacja zachodzi, gdy proces „może być przeprowadzony za pomocą reprezentacji mentalnych” (Piaget, 1970, s. 14) i aby go rozważyć, przeanalizować lub porównać nie ma potrzeby realizowania go w rzeczywistości.

Zgodnie więc z powyższymi wytycznymi związanymi z intelektualnym rozwojem ucznia klasy 5, pojęcie liczby ujemnej należy kształtować w oparciu o modele funkcjonujące w świecie rzeczywistym i czynności na materiale konkretnym, z wykorzystaniem tzw. reprezentacji enaktywnych, a nie tylko ikonicznych czy symbolicznych (Bruner, 1978).

Postulat ten jest dodatkowo wzmocniony obserwacją narastających specyficznych trudności uczniów w uczeniu się matematyki, wśród których coraz powszechniej diagnozowane są dysfunkcje takie, jak dysleksja, dysgrafia czy dyskalculia.

Zalecenia psychologów są wyzwaniem dla nauczycieli matematyki, pojawia się wymóg konstruktywistycznego podejścia do nauczania, w tym do nauczania o liczbach ujemnych, z uwzględnieniem operacji na materiale konkretnym i w nawiązaniu do modeli funkcjonujących w środowisku dziecka.

8. „Uczeń podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych”

Zgodnie z zarysowanymi powyżej wytycznymi psychologii rozwojowej i psychologii uczenia się, twórcy kolejnych podstaw programowych podkreślają wagę konkretyzacji liczb ujemnych i ich praktycznego zastosowania. Czytamy zapisy:

„III. Liczby całkowite. Uczeń:

- 1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;
- 2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;
- 3) oblicza wartość bezwzględną;
- 4) porównuje liczby całkowite;

5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych”²⁴.

(Podstawa programowa, 2017, s. 21)

Punkt III.1 skłania do refleksji, gdyż, jak wspomnieliśmy wcześniej, liczby ujemne są tworem teoretycznym i nie mają naturalnej konkretyzacji w świecie rzeczywistym.

W życiu codziennym wszystkie konkretyzacje liczb ujemnych, które proponuje się jako przykłady dla uczniów, są sztucznie wytworzone na podstawie konwencji życia społecznego. Wszystkie z nich oparte są na modelu matematycznym Wallisa – wprowadzane w grupie uporządkowanej ($G, +, 0, <$). Są to dla przykładu:

- a) temperatura poniżej zera – konkretyzacja mająca wiele zalet, o których piszemy więcej poniżej, ale posiadająca swoje ograniczenia w postaci odniesienia do rzeczywistości – jest ona bliska codziennemu doświadczeniu ucznia tylko w wybranych skalach i warunkach klimatycznych. Z tych powodów nie będzie naturalną konkretyzacją dla dzieci żyjących w klimacie tropikalnym lub w krajach, gdzie operuje się na co dzień skalą Fahrenheita (np. USA),
- b) poziomy budynków czy parkingów w niektórych centrach handlowych, dworcach; przemieszczanie się (windą lub po schodach) na odpowiedni poziom -1 , -2 (piwnicy) itd. oraz kolejne analogiczne umowy związane z poruszaniem się: w przód – w tył; w prawo – w lewo względem obranego położenia początkowego, co jest wykorzystywane w zabawach – grach ruchowych służących wprowadzaniu umowy $(-1) + 1 = 0$,
- c) depresje w sensie geograficznym – położenie terenu poniżej poziomu morza, również pojęcie abstrakcyjne dla ucznia,
- d) dług (debet, strata, punkty karne) – dla większości uczniów klas 5–6 dług jest pojęciem abstrakcyjnym, dodatkowo jego reprezentacja w postaci zapisu ze znakiem „minus” na rachunkach bankowych nie jest dostępna dla niepełnoletnich osób.

Stefan Turnau w latach 90. ubiegłego stulecia pisał, że wówczas w języku potocznym liczby ujemne niemal zupełnie nie występowały:

„Choć od szeregu pokoleń używa się termometrów i obrotów finansowych jako konkretyzacji liczb ujemnych, mówi się na ogół jest pięć stopni mrozu, bardzo rzadko jest minus pięć stopni; mówi się jestem winien 500 zł, chyba nigdy mam minus 500 zł”.

(Turnau, 1990, s. 132)

Współcześnie, wobec ewolucji języka, na którą wpływa również powszechność smartfonów i dostępu do Internetu, uczeń coraz częściej zobaczy prognozę pogody opisaną liczbami ujemnymi i częściej odpowie na pytanie: „Jaka będzie temperatura dzisiaj?” stwierdzeniem: dziś będzie minus 5 stopni, niż trzy dekady temu,

²⁴W punkcie III nie został sprecyzowany termin „proste rachunki pamięciowe”, ale dalsze zapisy mówią o czterech podstawowych działaniach na liczbach, a także o potęgach o wykładniku naturalnym.

gdyż odczyta wartość temperatury z termometru cyfrowego lub z informacji w Internecie, czy aplikacji w swoim smartfonie. Nie zmienia to jednak faktu, że symbole te są kwestią umowy.

Wobec cytowanego Punktu III.1 w podstawie programowej, podręczniki i materiały dydaktyczne starają się dostarczyć nauczycielom i uczniom odpowiednich zadań. Jedną z takich prób przedstawia Rysunek 4.

1. Jaką liczbą opiszesz:

- a) pożyczone od kolegi 5 zł,
- b) temperaturę osiem stopni Celsjusza poniżej zera,
- c) otrzymane kieszonkowe w wysokości 30 zł,
- d) głębokość Rowu Mariańskiego,
- e) wysokość najwyższego szczytu w polskich Tatrach,
- f) zaciągnięty kredyt hipoteczny na kwotę 140 tys. zł,
- g) temperaturę ciała zdrowego człowieka,
- h) położenie Żuław Wiślanych?

Rysunek 4. Próba podania praktycznych przykładów stosowania liczb ujemnych – przykład materiałów dydaktycznych.

Źródło: <https://tinyurl.com/yb8h4vws>

Na lekcjach fizyki pojawia się natomiast pewien model naukowy, który jest najwcześniej dostępny dla uczniów – bo już na poziomie starszych klas szkoły podstawowej²⁵, i służy do opisu zjawiska świata rzeczywistego z elektrostatyki. Rzeczywisty model możliwy do obserwowania związany jest z dwoma rodzajami elektryzowania się dielektryków: „dodatnio” – na przykład podczas pocierania papierem o szkło, „ujemnie” – na przykład podczas pocierania ebonitu sukniem. Na szkłe jest za mało elektronów – na ebonicie jest ich nadmiar. Zetknięcie ciał dodatnio i ujemnie naelektryzowanych powoduje ich rozładowanie i sprawia, że stają się elektrycznie obojętne.

Model ten stał się najprawdopodobniej prototypem modelu guziczkowego, co pokażemy w paragrafie 13.1. Pomijamy analizę bardziej zaawansowanych modeli związanych z fizyką cząstek elementarnych i procesem anihilacji ze względu na poziom nauczania, którego dotyczy kształtowanie pojęcia liczby ujemnej.

9. Termometr i oś liczbowa

Najbardziej powszechną konkretyzacją liczb ujemnych obecną w podręcznikach i wykorzystywaną w nauczaniu matematyki w Polsce jest temperatura ujemna.

Uczniowie porównują liczby ujemne, używając języka z życia codziennego: ciepłej, zimniej, temperatura najniższa, najwyższa (zob. np. Rysunki 5, 6).

²⁵Oraz wygaszanego obecnie gimnazjum

1. Wykorzystując informacje z mapy, wykonaj polecenia:

- Odszukaj miasto, w którym była najniższa temperatura.
- W którym mieście było najcieplej?
- Wypisz malejąco odczytane z mapy temperatury.
- Podaj nazwy tych miast, w których było cieplej niż w Lublinie.



Rysunek 5. Przykład materiałów dydaktycznych.

Źródło: <https://tinyurl.com/yb8h4vws>

5. W tabeli podano temperatury topnienia niektórych substancji.

Substancja	cyna	żelazo	gliceryna	rtęć	azot	srebro	woda	tlen	siarka
temperatura w °C	232	1536	-17	-38,8	-210	982	0	-218,8	120

- Która z podanych substancji ma najwyższą, a która najniższą temperaturę topnienia?
- Uporządkuj podane temperatury w kolejności rosnącej.

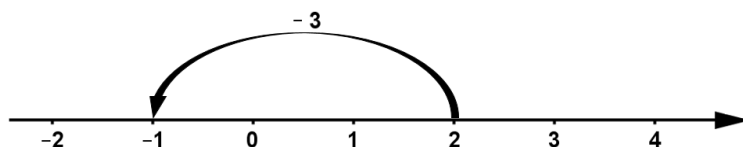
Rysunek 6. Przykład materiałów dydaktycznych.

Źródło: <https://tinyurl.com/yb8h4vws>

Jeśli temperatura wzrasta to słupek (np. rtęci) podwyższa się, jeśli maleje, to obniża się. Naturalna wizualizacja pozwala ponownie uruchomić oś liczbową, która dzieciom na tym etapie nauczania jest już dobrze znana w kontekście liczb dodatnich.

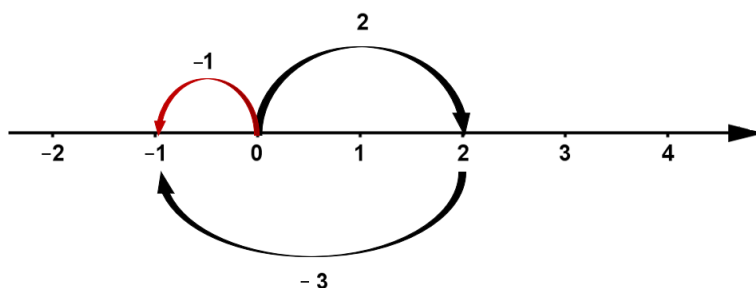
Turnau (1990, s. 133) rozróżnia dwa modele ze strzałkami wykorzystywane do prezentacji dodawania w kontekście osi liczbowej.

Model I, w którym z matematycznego punktu widzenia składnik sumy interpretowany jest jako punkt na osi liczbowej o podanej współrzędnej, drugi składnik jest współrzędną wektora przesunięcia. Wynik jest w tym modelu punktem – obrazem danego punktu w zadanym przesunięciu. Rysunek 7 przedstawia interpretację działania $2 + (-3)$.



Rysunek 7. Interpretacja działania $2 + (-3)$ w modelu I ze strzałkami

W Modelu II każdy ze składników jest interpretowany jako współrzędna wektora przesunięcia, a dodawanie jest składaniem tych przesunięć.



Rysunek 8. Interpretacja działania $2 + (-3)$ w modelu II ze strzałkami

Te dwa modele mają wspólną interpretację tylko wówczas, gdy początkiem pierwszego wektora w Modelu II jest liczba 0. Turnau (1990, s. 133) podkreśla, że wówczas tracimy jednak sens II Modelu, w którym liczba oznacza zmianę, a nie stan początkowy czy końcowy. A ta interpretacja jest już bliska teoretycznej konstrukcji liczb całkowitych jako klas abstrakcji par liczb naturalnych. Turnau konkluduje, że mylenie tych dwóch interpretacji może prowadzić do poważnych konsekwencji i nieporozumień, więc wydaje się, że warto umówić się z uczniami na jedną z nich.

Turnau jednak pisze wyłącznie o dodawaniu liczb całkowitych z wykorzystaniem tych dwóch modeli ze strzałkami. Ucząc w klasie 5–6 szkoły podstawowej, oczywiście nie mówimy dzieciom o wektorach (których nie ma obecnie w programie nauczania matematyki nawet na poziomie podstawowym szkoły ponadgimnazjalnej), lecz wprowadzamy umowę, wg której dodawanie oznacza ruch, przesunięcie w przeciwnych kierunkach: prawo-lewo i przyjmujemy konwencję: dodać 1 oznacza ruch o jednostkę w prawo, a dodać -1 oznacza ruch o jednostkę w lewo.

Zauważmy, że w tej wersji przedstawione modele ze strzałkami nie podają bezpośredniej interpretacji działania odejmowania. W obu tych modelach na samym starcie musimy przyjąć kolejną umowę, że odejmowanie jest dodaniem liczby przeciwnej, czyli $2 - 3 = 2 + (-3)$. Jest tak dlatego, że modelowanie na osi liczbowej w oparciu na bardziej naturalnej dla dzieci konwencji, zgodnej z konkretyzacją termometra i ideą Wallisa, że: „dodać” – to znaczy iść w prawo na osi liczbowej (temperatura rośnie), a „odjąć” to znaczy iść w lewo na osi liczbowej (temperatura spada) jest poruszana wcześniej – już w pierwszych klasach szkoły podstawowej, a nawet w nauczaniu początkowym – czyli przyjmujemy, że jest już dzieciom doskonale znana. W tej stylistyce oba modele ze strzałkami znajdują wcześniej zastosowanie, działania dodawania i odejmowania mają swoją interpretację – natomiast umowa: $2 + (-3) = 2 - 3$ będzie potrzebna jako umowa dodatkowa do działań na liczbach całkowitych, pozwalająca na modelowanie dowolnego dodawania i odejmowania liczb całkowitych.

Model osi liczbowej próbuje wspierać jednoargumentowe, dwuargumentowe i symetryczne funkcje znaków liczb całkowitych, ponieważ -3 może oznaczać pozycję, -3 może oznaczać „ruch o 3 jednostki w lewo”, ale -3 może przedstawiać również liczbę (pozycję) przeciwną niż $+3$ i odwrotnie.

We współczesnej dydaktyce wykorzystywane są gry do kształtowania pojęcia liczby ujemnej z wykorzystaniem modelu osi liczbowej. Na przykład Thompson i Dreyfus (1988) zaproponowali grę, w której żółw porusza się wzdłuż poziomej osi liczbowej, a rolą uczniów jest wydawanie komend do jego poruszania się i przewidywania oraz zapisywania jego położenia.

Pojawiały się również pomysły dydaktyczne z wprowadzaniem oddzielnym dwóch osi liczbowych – jedna dodatnia, druga ujemna – a następnie złączania ich (Peled et al., 1989).

Z kolei Hejny (2008) proponuje zabawy ruchowe, które rozpoczynają kształtowanie liczb ujemnych już na poziomie nauczania początkowego.

Ponadto w innych komercyjnych grach, jak np. Minecraft (zob. <https://minecraft-pl.gamepedia.com/Koordynaty>), dzieci operują modelem trójwymiarowego układu współrzędnych, opisując położenie gracza na mapie. Współrzędne zwane są koordynatami (z języka angielskiego) i mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Niektórzy uczniowie operują koordynatami zupełnie swobodnie już na etapie 5 klasy szkoły podstawowej.

10. Dług – strata

Interpretacja liczby ujemnej jako straty (długu) ma wiele dydaktycznych zalet. Umowa towarzysząca wykorzystaniu tego modelu jest taka, że wielkość straty (długu, kredytu, debetu, punktów karnych) zapisujemy, poprzedzając znakiem minus, oraz to, że zysk i strata tej samej wielkości powodują stan zerowy. W kontekście bilansu finansowego dla ucznia jest oczywiste, że zarówno $x + (-x) = 0$, jak i $(-x) + x = 0$. W kontekście „zysk-strata” podstawowe działania też mają naturalną interpretację: „dodać” = zyskać, „odjąć” = stracić; natomiast w stylistyce „dług” zaletą modelu jest to, że jest on formułowany w naturalnym języku i od razu nadaje się do modelowania działań na liczbach wymiernych. Ponadto interpretacja dodawania w tym modelu jest naturalna: dokładanie, gromadzenie, podobnie odejmowania, którym jest zabranie, umorzenie.

Model pozwala na dodawanie liczb tych samych znaków oraz w większości przypadków liczb znaków przeciwnych. Na przykład:

$-3 + (-2)$ „nasz dług wynosił 3 [tysiące] i wzięliśmy kolejny dług w wysokości 2 [tysięcy], więc nasz dług wynosi teraz już 5 [tysięcy]”, więc $-3 + (-2) = -5$.

$-3 - (-2)$ „nasz dług wynosił 3 [tysiące] i ktoś nam umorzył dług w wysokości 2 [tysiące], więc mój dług wynosi teraz tylko 1 [tysiąc]”, więc $-3 - (-2) = -1$.

Interpretacja jednak się komplikuje np. w sytuacji: $-2 - (-3)$. Umorzenie długu nie będzie dobrą interpretacją dla działania odejmowania w tym kontekście. Chcąc postąpić analogicznie, otrzymujemy stwierdzenie, które jest nierealne.

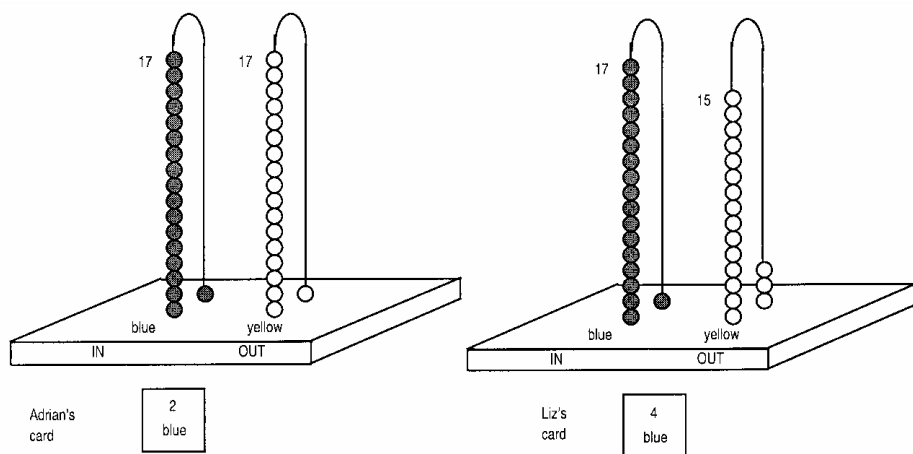
Można usłyszeć od nauczycieli skrajnie sprzeczne opinie na temat tego modelu. Model ten nie jest jednak dostępny dla wszystkich uczniów. Wielu z nich nie będzie w stanie wykorzystać tego modelu ze względu na własne doświadczenie społeczne. Ograniczy działanie tego modelu zarówno sytuacja rodzinna, w której dziecko nie wie, co to jest dług i nie ma z takim pojęciem do czynienia na co dzień, jak i sytuacja skrajnie odmienna – gdy dziecko pochodzi z rodziny, w której żyje się na kredyt i nie ma zwyczaju oddawania długów lub priorytetu spłacania kredytów, gdyż są one powiększane w imię wygody życia.

W pierwszym przypadku wystarczy przejść do interpretacji wszelkiego rodzaju straty i zysku. Natomiast drugi przypadek jest trudniejszy. Uczniowie wychowani w rodzinach żyjących na kredyt będą mieć trudność z interpretacją wielu działań w tym modelu. Na przykład: $-2 + 3$, czyli to, że mieliśmy długu 2 [tysiące] i otrzymaliśmy 3 [tysiące] gotówki niekoniecznie dla nich będzie oznaczać priorytet redukcji długu. Podobnie działanie $3 + (-2)$ interpretowane jako posiadanie 3 [tysięcy] gotówki i zaciągnięcie kredytu w wysokości 2 [tysięcy] nie będzie oznaczało posiadania 1 [tysiąca]. Dla współczesnego ucznia taka sytuacja jest mało sensowna, może być zinterpretowana jako inwestycja – obracanie, czyli posiadanie 5 tysięcy, ewentualnie potrzeba zakupu rzeczy – czyli wydania tych 5 tysięcy. Konsumpcyjna postawa współczesnego człowieka w takiej sytuacji sprawi, że spłata długu nie będzie priorytetem, a model nie będzie użyteczny, bo będzie dla ucznia niezrozumiały lub nielogiczny.

11. Liczydła i gry dydaktyczne

Linchevski i Williams (1999) opisali badania empiryczne przeprowadzone w celu przedstawienia i weryfikacji innego modelu nauczania pojęcia liczby ujemnej. Pomysł jest zgodny z koncepcją realistycznego nauczania matematyki, wykorzystuje dramę na lekcji matematyki związaną z sytuacją z życia codziennego, a następnie gry dydaktyczne. Według tego scenariusza miało nastąpić intuicyjne odkrycie liczb ujemnych, które następnie podlegać miało już tylko matematycznemu szlifowi. Dzieci rejestrowały najpierw procesy w sytuacjach niematematycznych i w pewnym momencie były postawione wobec problemu do rozwiązania.

W pierwszym eksperymencie dzieci odgrywały dramę, w której miały kontrolować tłum na dyskotecie. Każde dziecko stało przy jednym „wejściu” z podwójnym liczydłem – z żółtymi koralikami (osoby wychodzące z dyskoteki) i niebieskimi (osoby wchodzące). Dzieci ciągnęły karty pokazujące, ile ludzi chce wejść, a ile wyjść.



Rysunek 9. Liczydło Adriana i Lisy (Linchevski, Williams, 1999, s. 138)

Co jakiś czas dzieci były proszone o przedstawienie kontrolerowi raportu na temat liczby ludzi na dyskotecę, który decydował czy obiekt jest pełny czy nie. Limity liczydła prowokowały kryzysy, gdy koraliki wypełniły jedno liczydło przed końcem gry. Dzieci wówczas stawały przed problemem – jak kontynuować zliczanie? Badania pokazały, że dzieci stając przed takim problemem: „jak kontynuować zliczanie?” same intuicyjnie zamiast dokładać 4 paciorki reprezentujące osoby bawiące się na dyskotecę, które właśnie wchodziły – odkrywały, że mogą zmniejszyć stos koralików żółtych o 4, reprezentujących osoby, które już wyszły (np. Adrian i Liz, zob. Rysunek 9). Słownictwo „wchodzący” i „wychodzący” pozwoliło dzieciom łatwiej zaznajomić się z pojęciami matematycznymi. Później dla dzieci stawało się intuicyjne, że jeżeli od $+2$ odejmą $+4$ to będzie -2 , gdyż wyobrażały sobie osoby wchodzące i wychodzące z dyskoteki.

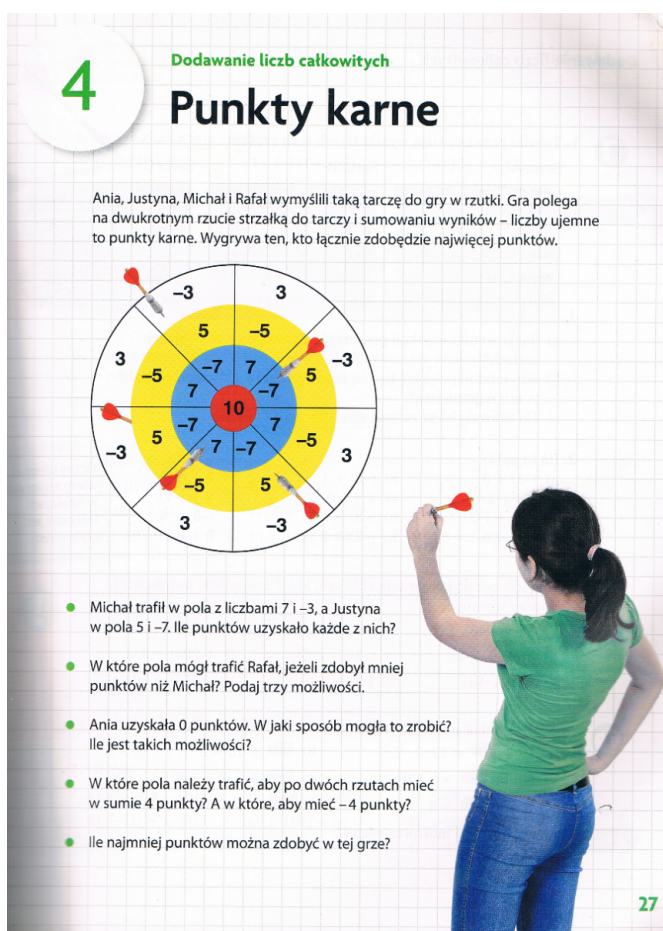
Po tej części nastąpił drugi eksperyment, który polegał na przeprowadzeniu kilku gier. Miały one podobny charakter do dramy z dyskoteką. Druga gra polegała na rzucaniu kostkami do gry: żółtej i niebieskiej, a wygrywał zespół, który pierwszy osiągnął przewagę 8 punktów. Ponownie u dzieci intuicyjnie tworzyły się strategie: „możemy dodać 5 niebieskich, ale zamiast tego możemy też zabrać 5 z żółtych”. W trzeciej grze zrezygnowano z kości żółtych i niebieskich na rzecz kości „neutralnej” z następującymi numerami na ścianach: $+3$, $+2$, $+1$, -1 , -2 , -3 . Podczas tej gry wśród dzieci pojawiły się trudności – chciały, by jedne ścianki były żółte, a drugie niebieskie – tak jak w poprzedniej grze. Wprowadzono im umowę, że minus oznacza dodawanie do żółtego, a plus – dodawanie do niebieskiego. W grze czwartej dzieci używały kostki z drugiej gry i kostki z liczbami całkowitymi z gry trzeciej. Grupy, którym nie sprawiały trudności poprzednie gry, teraz napotykały na trudności ze względu na dwa znaczenia znaku minus. W opisie eksperymentu czytamy, że Stella popełniła błąd, bo wylosowała „odjąć -1 ” i odjęła od niebieskich, gdyż „ -1 ” oznacza punkt dla żółtych lub zabranie punktu niebieskim, natomiast Dave słusznie zauważył, że na kostce znajduje się „odjąć” co sugeruje, że należy zabrać punkt drużynie żółtych. Dzieci były pewne siebie po pierwszej grze. Jednak podczas kolejnych gier rosła ich niepewność. Nauczyciele starali się nakierować dzieci na to, aby „ubierały” w słowa swoje matematyczne przemyślenia oraz zasady gry.

Linchevski i Williams twierdzą, że pierwszy eksperyment z dyskoteką łatwo wprowadzał dzieci w świat dramy i pozwalał na intuicyjne odkrycie liczb całkowitych, pokazując ich wartości, jednak dopiero w drugim eksperymencie dzieci uczyły się działań na liczbach całkowitych.

Na końcu gier dzieci otrzymały pełny matematyczny test z zdaniami $+3$ dodać $+2$, $+2$ odjąć $+4$, -5 dodać -2 . Zapis obliczeń był w całości matematyczny ($+3$) $+$ (-2). Wszystkie dzieci rozwiązały test ze 100% poprawnością.

Opisany model należy do tej samej struktury grupy z narzuconym porządkiem, choć w tej grze pojawiają się dwukolorowe liczmany.

W polskich propozycjach dydaktycznych też znajdujemy opisy gier. Na przykład gra w rzutki z tarczą z punktami karnymi (ujemnymi), w której należy sumować wyniki dwóch rzutów. Gra ta nie wprowadza jednak pojęcia liczby ujemnej, lecz ćwiczy operacje dodawania liczb całkowitych.



Rysunek 10. Punkty karne (źródło: Matematyka 2001, klasa 6, 2014, s. 26)

12. Konkretny model guziczkowy

Model guziczkowy, chociaż jest modelem sztucznie wymyślonym na użytek dydaktyki matematyki, to jednak ma wiele zalet. Po pierwsze jest to model konkretny, odwołujący się do liczmanów w nauczaniu początkowym i stanowiący niejako jego przedłużenie.

Model jest bardzo łatwy do zrozumienia przez ucznia, gdyż oparty jest na prostych i naturalnych dla niego zasadach: mamy dwa kolory żetonów (guziczków), para złożona z żetonów dwóch różnych kolorów jest neutralna (czyli nie ma wartości – jej wartość zeruje się) – znika, odpada, ale też może powstać z niczego, czyli można ją dołożyć albo odłożyć. „Dodać” oznacza „dołożyć” odpowiednią liczbę żetonów danego koloru, „odjąć” – znaczy „zabrać” odpowiednią liczbę żetonów tego typu. Aby móc interpretować symbolicznie działania umawiamy się, że jeden żeton danego koloru zapisujemy jako „1” (często czarny lub czerwony), a drugiego

koloru, jako „-1” (biały lub niebieski). Niektóre propozycje, tak, jak na poniższej ilustracji (Rysunek 11) proponują podpisanie żetonów symbolami „+1” i „-1”, choć w tradycyjnym ujęciu w Polsce żetony nie miały podpisów.

Kolorowe żetony

Umówmy się, że czerwony żeton ma wartość 1, a niebieski -1.

● Jaką łączną wartość mają żetony na każdym z tych rysunków?

I

II

III

● A jaką łączną wartość mają te zestawy żetonów?

IV

V

VI

● Z którego rysunku można odczytać wynik działania $3 + (-1)$?

A wynik działania $(-2) + 2$?

● Oblicz, układając żetony lub robiąc odpowiedni rysunek.

$4 + (-6)$ $(-1) + 4$ $(-2) + (-5)$

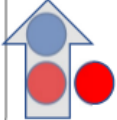
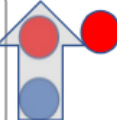
● Zapisz i wykonaj kilka podobnych działań.

Rysunek 11. Model guziczkowy pod nazwą „Kolorowe żetony”
(Matematyka 2001, klasa 6, 2014, s. 26)

Możemy ten model wykorzystać do reprezentacji wszystkich przypadków dodawania i odejmowania liczb całkowitych. Mnożenie i dzielenie liczby całkowitej przez naturalną można następnie interpretować jako ich konsekwencje – mnożenie jako wielokrotne dodawanie, a dzielenie na przykład przez podział.

Poniższe tabele prezentują przykładowe interpretacje działań w tym modelu: dodawanie (Tabela 1) i odejmowanie (Tabela 2).

Tabela 1 Dodawanie liczb całkowitych w modelu guziczkowym

Reprezentacja symboliczna działania	Reprezentacja enaktywna dodawania		Wynik	Komentarz
$2 + 1$		Do dwóch czerwonych żetonów dokładamy jeden czerwony. Mamy razem trzy czerwone żetony.	3 	Jako punkt startu - nawiązanie do liczb naturalnych.
$-2 + (-1)$		Do dwóch niebieskich żetonów dokładamy jeden niebieski. Mamy razem trzy niebieskie żetony.	-3 	Ta konkretyzacja jest dla ucznia analogiczna i naturalna.
$-1 + 2$		Do jednego żetonu niebieskiego dokładamy dwa czerwone. Powstaje jedna para neutralna, którą można odłożyć. Pozostaje jeden żeton czerwony.	1 	Zauważamy, że wyniki takich działań zawsze będą takie same – model ten sam. Wniosek: dodawanie liczb całkowitych też jest przemienne.
$2 + (-1)$		Do dwóch czerwonych żetonów dokładamy jeden niebieski. Powstaje jedna para neutralna, którą można odłożyć. Pozostaje jeden żeton czerwony.	1 	
$1 + (-2)$		Do jednego czerwonego żetonu dokładamy dwa niebieskie. Powstaje jedna para neutralna, którą można odłożyć. Pozostaje jeden żeton niebieski.	-1 	
$-2 + 1$		Do dwóch niebieskich żetonów dokładamy jeden czerwony. Powstaje jedna para neutralna, którą można odłożyć. Pozostaje jeden żeton niebieski.	-1 	

Model guziczkowy funkcjonuje w różnych odmianach, na przykład uczniowi można dostarczyć śrubki i zakrętki i umówić się, że śrubka z zakrętką tworzą parę neutralną.

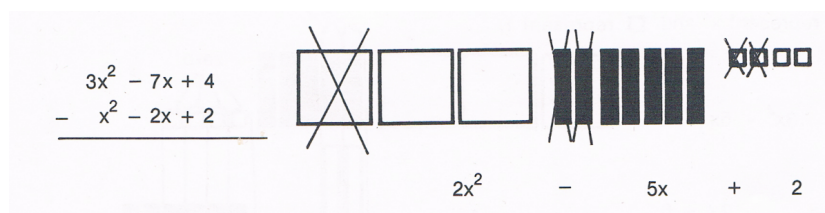
Turnau uznaje walory dydaktyczne modelu guziczkowego za bardzo ograniczone, gdyż: „(...) model z guziczkami nie służy kształceniu żadnych innych pojęć prócz liczb ze znakiem, ich dodawania i odejmowania” (Turnau, 1990, s. 134–135).

Chcemy jednak w niniejszym artykule podkreślić, że obecnie model guziczkowy doczekał się wielu różnych odmian, zastosowań i przedłużeń, a niektóre z nich są zaprezentowane w rozdziale 13. Ponadto w Stanach Zjednoczonych znane jest na

Tabela 2 Odejmowanie liczb całkowitych w modelu guziczkowym

Reprezentacja symboliczna działania	Reprezentacja enaktywna odejmowania	Wynik	Komentarz
$2 - 1$		1	Jako punkt startu - nawiązanie do liczb naturalnych.
$-2 - (-1)$		-1	Ta konkretyzacja jest dla ucznia analogiczna, więc bardzo naturalna.
$-1 - (-2)$		1	
$-1 - 1$		-2	
$1 - (-1)$		2	

przykład przedłużenie tego modelu do tzw. „płytek algebraicznych” wykorzystywanych do kształtowania pojęcia dodawania i odejmowania wyrażeń algebraicznych. Wprowadzono tam płytki reprezentujące „x” oraz „-x” (różniące się kolorami), dalej „x²” i „-x²” (różniące się kolorami). Rysunek 12 przedstawia w jaki sposób modeluje się wielomiany i ich odejmowanie.



Rysunek 12. Model odejmowania wielomianów (Howden, 1985, s. 14)

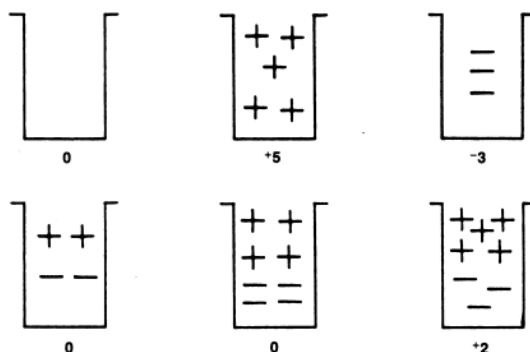
Poniżej przedstawiamy inne modele, których źródeł również można upatrywać w metodzie guziczkowej, które stanowią jego modyfikację, a w ostatnim paragrafie przedstawimy możliwość utworzenia z tego modelu – modelu wirtualnego, „quasi-rzeczywistego” i opiszemy jego hipotetyczne zalety.

13. Źródło i odmiany modelu guziczkowego w literaturze zagranicznej

13.1. Prototypy modelu guziczkowego – ładunki dodatnie i ujemne

Najprawdopodobniej prototypem modelu guziczkowego był tak zwany „positive-negative charge model” (model dodatniego-ujemnego ładunku), który został opisany już w latach 70. ubiegłego stulecia i służył do interpretacji dodawania i odejmowania liczb całkowitych (Frاند, Granville, 1978; Grady, 1978).

Następnie szeroko cytowany „annihilation model” (model anihilacji), opublikowany na łamach czasopisma „Arithmetic Teacher” w artykule Battista M.T. (1983), ukazywał, w jaki sposób można wykorzystać ten model do interpretacji wszystkich czterech działań na liczbach całkowitych. Model ten ma charakter modelu konkretnego, gdzie autor opisuje wykorzystanie żetonów (chips) w dwóch kolorach (np. czerwony i biały), lecz rekomenduje napisanie na każdym z nich „ładunku” + lub -. Żetony te następnie są wrzucane do słoika, który w ten sposób zyskuje odpowiednie „naładowanie”. Proces anihilacji, unicestwienia odnosił się do metafory znaku (+ lub -) jako ładunku: liczba dodatnia jest naładowana dodatnio, a liczba ujemna ma ładunek ujemny. Ładunki ujemne i dodatnie znoszą się, jedna liczba całkowita ma wiele reprezentacji, jak na Rysunku 13.

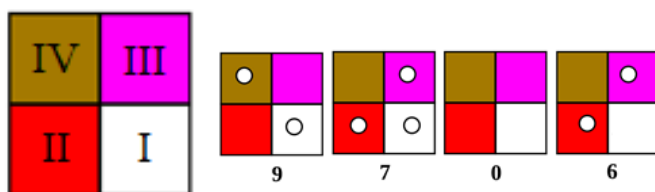


Rysunek 13. Reprezentacje liczb całkowitych w „annihilation model”, Battista, M.T. (1983, s. 26)

13.2. Minikomputer Papy'ego

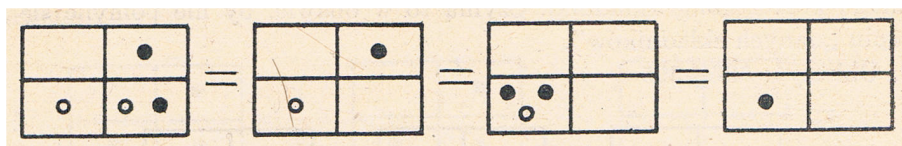
Belgijski dydaktyk matematyki Papy (1969) zaproponował pomoc dydaktyczną służącą do kształtowania pojęcia liczby w systemie pozycyjnym o nazwie minikomputer. Jego użyteczność była przedmiotem badań również w Polsce w latach 70. ubiegłego wieku w klasach eksperymentalnych – już na etapie nauczania początkowego. Dzieci ustawiały pionki na poszczególnych polach tabliczek, które w belgijskiej wersji były magnetyczne. Jedna tabliczka składała się z czterech pól (zob. Rysunek 14). Każda z takich tabliczek reprezentuje cyfrę liczby w systemie dziesiętkowym, natomiast zakodowana jest – jak na komputer przystało – w systemie dwójkowym. Zasady działania tej „maszyny” są więc następujące:

1. Na żadnym polu tabliczki nie może stać więcej niż jeden pionek, a każde dwa pionki ustawione na jednym polu maszyna zastępuje jednym, stojącym na polu następnym.
2. Nie mogą występować równocześnie pionki na polach drugim i czwartym, gdyż maszyna wyrzuca je i jednocześnie wstawia jeden pionek na pierwsze pole następnej tabliczki.
3. Nie mogą występować równocześnie pionki na polach trzecim i czwartym, gdyż maszyna zastępuje obydwie pionki parą innych: po jednym pionku na drugim polu tej samej tabliczki i na polu pierwszym następnej tabliczki.



Rysunek 14. Tabliczka złożona z czterech pól i reprezentacja liczby 9706 w mini-komputerze Papy'ego

Z punktu widzenia tego artykułu istotne jest, że w minikomputerze Papy'ego występowały pionki w dwóch kolorach, które reprezentowały liczby dodatnie i ujemne. Pionki różnych kolorów stojące na tym samym polu zбиваły się – wypadały z gry. Dzięki temu można było modelować dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych. Dla przykładu działanie $5 - 3$ można było modelować następująco:



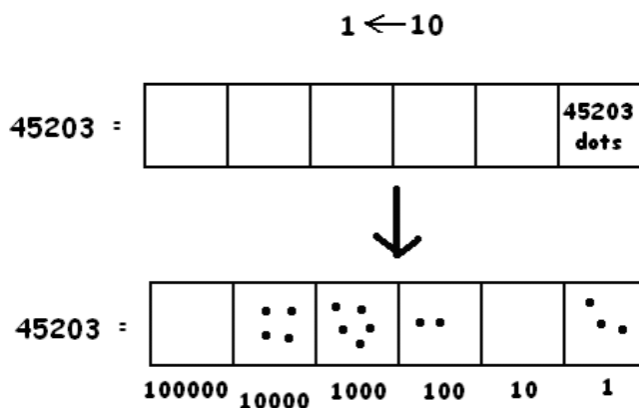
Rysunek 15. Reprezentacja działania $5 - 3$ w mini-komputerze Papy'ego (zob. Moroz, 2018, s. 150)

Istotnym z naszego punktu widzenia jest fakt, że wg Moroz (2018, s. 149): „Przed rozpoczęciem nauki odejmowania z zastosowaniem minikomputera uczni-

wie powtarzają własność różnicy dwóch równych liczb: $a - a = 0$ ” i na tej podstawie, po ułożeniu dwóch różnokolorowych pionków na jednym polu dochodzą samodzielnie do wniosku, że takie dwa pionki się zbijają.

13.3. Kropki i antykropki w modelu teoretycznym Tantara: „Exploding dots”

Model Tantara, choć nie jest modelem konkretnym, to jednak zostaje przywołany w tym miejscu, gdyż zdaje się być pewnego rodzaju połączeniem dwóch poprzednich modeli. Zarówno w metodzie guzikkowej można upatrywać jego źródła, jak i w minikomputerze Papy’ego. Model Tantara jest ustrukturyzowanym krokiem pośrednim pomiędzy konkretną reprezentacją enaktywną, a symboliką liczbową. Podobnie jak minikomputer Papy’ego służy głównie kształtowaniu pojęcia liczby w systemie pozycyjnym. Opiera się na reprezentacji liczby, tylko nie jest to reprezentacja konkretna (jak tabliczki magnetyczne i pionki u Papy’ego), tylko ikoniczna. Wizualizacja liczby polega na rysowaniu kropek w tak zwanych pudełkach/skarbonkach (boxes). Podobnie jak w minikomputerze zestaw tych pudełek tworzy, zwane przez tego australijskiego popularyzatora matematyki, „maszynę”.



Rysunek 16. Reprezentacja liczby 45 203 w „maszynie” Tantara (2009)

W tym modelu pomieszczone są dwa światy: świat obiektów i czynności konkretnych oraz świat obiektów reprezentowanych ikoncznie i czynności umysłowych (wyobrażonych). Już sam tytuł to ukazuje – kropki (reprezentacja ikonczna), które wybuchają (zjawisko świata rzeczywistego), po drodze przeskakują z pudełka do pudełka, a maszyna – działa. Nie wiemy czy zabieg ten jest celowy.

Zaletą tego modelu tkwi w możliwościach wykorzystania go w innych sytuacjach: zarówno do rozumienia pojęcia wielomianu, wraz z podstawowymi działaniami na wielomianach (maszyny typu $1 \leftarrow x$), jak i do reprezentacji liczb zespolonych oraz podstawowych działań na nich.

W „maszynach” Tantara jest jednak inna interpretacja działania odejmowania w stosunku do metody guzikkowej. W modelu guzikkowym „odejmowanie” było interpretowane jako fizyczne „zabieranie” żetonów. Natomiast „maszyny” Tantara nie przewidują zabierania, wyjmowania kropek. W modelu Tantara nie ma

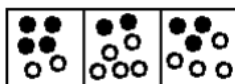
bezpośredniej interpretacji odejmowania, a jedynie dodawanie liczby przeciwnej do dodatniej (podobnie jak w minikomputerze Papy'ego). Czyli tak, jak zostało to przedstawione na Rysunku 7, wykonując odejmowanie: $423 - 254$, faktycznie w tym modelu wykonujemy dodawanie: $423 + (-254)$.

Zatem nie jest możliwe w modelu tym bezpośrednio reprezentowanie działań typu: $-2 - (-5)$, $5 - (-2)$. Takie przypadki wymagają podjęcia dodatkowych zabiegów dydaktycznych, co stanowi ograniczenie tego modelu.

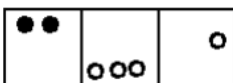
Podobieństwo tkwi w tym, że Tanton wprowadza tak zwaną *anty kropkę*, która reprezentuje jednostkę ujemną i ma taką samą własność, jak w metodzie guziczkowej – kropka i antykropka się *unicestwiają*.

EXPLODING DOTS

As another example we see that $423 - 254$, represented by diagram:



has answer:



That is:

$$423 - 254 = 2|-3|-1$$

This is absolutely valid mathematically, though the rest of the world may have difficulty understanding what "two hundred and negative thirty negative one" means! To translate this into familiar terms we can "unexplode" one of the solid dots to add ten solid dots to the middle box. This gives the representation: $1 | 7 | -$. 1. Unexploding again gives: $1|6|9$.

Thus we have:

$$423 - 254 = 169.$$

Rysunek 17. Opis odejmowania liczb w modelu Tantara (2009, s. 7)

14. Konkretyzacja liczb ujemnych w świecie wirtualnym – brakujące ogniwo

Przytoczony zapis (Punkt III.1) z podstawy programowej (zob. par. 8) wymusza od autorów podręczników i od nauczycieli wysiłek związany z pracą nad konkretyzacją pojęcia liczb ujemnych, co jak wykazaliśmy jest nadal wyzwaniem.

Brakującym ogniwem łączącym rzeczywiste doświadczenie ucznia z kształtowaniem pojęcia liczb ujemnych znaleźć możemy w świecie wirtualnym, świecie gier, coraz bardziej znanym uczniom.

Świat ten jest coraz częściej wykorzystywany do nauczania.

Autorzy widzą możliwość modyfikacji tradycyjnego modelu guziczkowego (zob. s. 12) poprzez stworzenie aplikacji w postaci gry na smartfony lub tablety. Zasady działania gry byłyby takie same, jak przy modelu konkretnym, opisanym w punkcie 12, jednak zaletą wirtualnej gry byłoby faktyczne znikanie pary neutralnej. Przy przeciągnięciu palcem na ekranie tabletu lub smartfona żetonu czerwonego na niebieski lub odwrotnie – następowałoby ich unicestwienie. Świat wirtualny pełniłby dla dziecka rolę świata quasi-realnego, naturalnego dla niego, natomiast czynności przesuwania palcem żetonów byłyby reprezentacjami enaktywnymi. Unicestwienie w tym świecie byłoby skonkretyzowane, a nie oparte na sztucznych konwencjach i umowach – jak próby opisane powyżej.

Autorzy mają nadzieję, że jest to novum godne dalszych badań – najpierw utworzenia takiej gry, a następnie przeprowadzenia badań na temat jej skuteczności w kształtowaniu liczb ujemnych i podstawowych działań na nich.

Literatura

- Artin, E., Schreier, O.: 1926, Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **5**, 85–99.
- Arystoteles: 1831, *Physica*, w: I. Bekker (red.), *Aristotelis Opera*, Georg Reimer, Berlin.
- Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2013, *Euklides Elementy. Księgi V–VI teoria proporcji i podobieństwa*, Copernicus Center Press, Kraków.
- Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2015, *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz*, Wydawnictwo Universitas, Kraków.
- Battista, M. T.: 1983, A complete model for operations on integers, *Arithmetic Teacher* **30**(9), 26–31.
- Bruner, J.: 1978, *Poza dostarczone informacje*, Mroziak, B. (przeł.), PWN, Warszawa.
- Chodnicki, J., Dąbrowski, M., Pfeiffer, A.: 2014, *Matematyka 2001. Klasa 6. Podręcznik do szkoły podstawowej*, WSiP, Warszawa.
- Dedekind, R.: 2017, Ciągłość i liczby niewymierne, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **9**, §2.
- Dehaene, S.: 1997, *The Number Sense*, Oxford University Press, Oxford.
- Descartes: 1637, *La Géométrie*, l'Imprimerie de Jan Maire, Leyde.
- Frاند, J., Granville, E. B.: 1978, *Theory and Application of Mathematics for Teachers*, 2 edn, Wadsworth Publishing Company, Belmont, Calif.
- Freudenthal, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Glaeser, G.: 1981, Epistemologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **2**(3), 303–346.
- Grady, M. B.: 1978, A Manipulative Aid for Add-ing and Subtracting Integers, *Arithmetic Teacher* **26**(3).
- Hejny, M.: 2008, Scheme oriented educational strategy in mathematics, w: B. Maj, M. Pytlak, E. Swoboda (red.), *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*, 1st edn, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 40–48.

- Howden, H.: 1985, *Algebra tiles for the overhead projector*, Cuisenaire Company of America, New York.
- Klakla, M.: 1982, Procesy psychiczne związane z tworzeniem pojęć i struktur, w: I. Gucewicz-Sawicka (red.), *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 32–45.
- Lakoff, G., Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
- Linchevski, L., Williams, J.: 1999, Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 131–147.
- Matłosz, B.: 2012, Teaching and learning the elements of arithmetic and algebra using the multiple intelligence theory, *Annals of the Polish Mathematical Society, Series 5, Didactica Mathematicae* **34**(20), 69–84.
- MEN, ORE: 2017, *Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła podstawowa. Matematyka*, Dobra Szkoła.
- Moroz, H.: 2018, Wykład 16. numeracja i system pozycyjny, Cz. III, w: B. Nowecki (red.), *Materiały pomocnicze do nauczania matematyki w szkole podstawowej. Wykłady telewizyjne*, WSiP, Warszawa.
- Papy, G.: 1969, Minicomputer, *Educational Studies in Mathematics* **2**(2/3), 333–345.
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., Resnick, L. B.: 1989, Formal and informal sources of mental models for negative numbers, w: J. G. Vergnaud, G. ans Rogalski, M. Artigue (red.), *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. III, PME, Paris, France, 106–110.
- Piaget, J.: 1966, *Studia z psychologii dziecka*, PWN, Warszawa.
- Piaget, J.: 1970, *Genetic Epistemology*, W.W. Norton, New York.
- Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1–36.
- Tanton, J.: 2009, "Exploding dots". Advanced version for personal fun. http://testing.matteacherscircle.org/assets/session-materials/JTantonExplodingDots_EducatorsVersion.pdf.
- Thompson, P. W., Dreyfus, T.: 1988, Integers as transformations, *Journal for Research in Mathematics Education* **19**, 115–133.
- Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
- Wallis, J.: 1685, *Treatise of Algebra*, John Playford, London, przeł. P. Błaszczuk, K. Mrówka (2015).

Źródła internetowe:

<https://minecraft-pl.gamepedia.com/Koordynaty>
<https://tinyurl.com/yb8h4vws>

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail piotr.blaszczuk@up.krakow.pl
e-mail mirosława.sajka@up.krakow.pl