FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IX (2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.5

Katarzyna Słomczyńska

Jak bardzo przemienna może być grupa nieprzemienna?*

Abstract. In this paper we survey, also in historical perspective, the results connected with the notion of the commutativity degree of a finite group, i.e., the probability that two randomly selected elements of the group commute.

Wstęp

Stopień przemienności grupy skończonej można mierzyć wartością prawdopodobieństwa, że dwa jej losowo wybrane elementy będą ze sobą komutować. W zasadzie jako pierwsi badali tę wielkość Erdös i Turán, którzy w roku 1968 podali dolne oszacowanie na stopień przemienności w zależności od rzędu grupy. W roku 1973 Gustafson pokazał prosty, choć na pozór zaskakujący wynik, dowodząc, że stopień przemienności dowolnej grupy nieabelowej da się od góry oszacować przez 5/8. Dało to początek intensywnym badaniom stopnia przemienności prowadzonym do dziś. Okazuje się, iż znajomość tej wielkości może dostarczyć nam istotnych informacji o strukturze grupy. W niniejszej pracy przedstawię niektóre z najważniejszych wyników uzyskanych w tej dziedzinie, jak i otwarte wciąż hipotezy. Badając to zagadnienie, czytelnik ma możliwość zapoznania się w naturalny sposób z wieloma faktami dotyczącymi teorii grup począwszy od elementarnych (zapewne dlatego w *American Mathematical Monthly* ta tematyka była poruszana kilka razy) aż po bardziej zaawansowane.

1. Podstawowy wzór i oszacowanie dolne

Zacznijmy od oczywistego stwierdzenia, że chociaż w każdej nieprzemiennej grupie są z definicji pary elementów, które nie komutują ze sobą, to są i takie, które są ze sobą przemienne: na przykład jedynka komutuje z każdym elementem

*How abelian can a non-abelian group be?

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 20E45; Secondary: 20P99
Key words and phrases: group, commutativity degree, conjugacy class, degree equation

grupy, a każdy element komutuje sam ze sobą. Można więc zadać pytanie: jak wiele jest takich par w grupie skończonej G? Na to pytanie odpowiada wielkość

$$\Pr(G) := \frac{\left|\left\{(x,y) \in G^2 : xy = yx\right\}\right|}{|G|^2}$$

nazywana *stopniem przemienności grupy* G i równa prawdopodobieństwu tego, że dwa losowo wybrane elementy grupy będą ze sobą przemienne, gdy każdą parę będziemy losować z takim samym prawdopodobieństwem (równym $1/|G|^2$). Oczywiście stopień przemienności grupy jest liczbą wymierną z przedziału $(0,1]$, która równa jest 1, wtedy i tylko wtedy, gdy grupa jest abelowa.

Dla przykładu policzmy, ile wynosi stopień przemienności dla grupy izometrii trójkąta równobocznego izomorficznej z grupą permutacji zbioru trójelementowego S_3. Ponieważ identyczność komutuje z każdym elementem grupy, dwa obroty ze sobą i z identycznością, zaś każda z trzech symetrii tylko ze sobą i z identycznością, to otrzymujemy $6+2\cdot 3+3\cdot 2 = 18$ komutujących par, czyli stopień przemienności grupy S_3 wynosi $18/36 = 1/2$.

Podstawowa metoda, którą stosuje się w obliczaniu stopnia przemienności, odwołuje się do pojęcia klas sprzężoności. W dowolnej grupie G możemy wprowadzić relację równoważności $\sim$, sklejającą ze sobą te elementy grupy, które dają się przekształcić jeden na drugi przez wewnętrzny automorfizm grupy, czyli dla $x, y \in G$ mamy $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$, takie że $y = gxg^{-1}$. Klasy równoważności tej relacji nazywa się *klasami sprzężoności* lub *orbitami grupy*. Dla $x \in G$ jego orbitę oznaczamy przez $G_x := [x]_\sim = \left\{gxg^{-1} : g \in G\right\}$. Można łatwo zauważyć, że taka klasa jest równoliczna ze zbiorem warstw powstałym przez podzielenie grupy G przez *centralizator* $C_x := \{g \in G : gx = xg\}$ elementu x, czyli podgrupę złożoną z elementów komutujących z x. Z tego oraz z twierdzenia Lagrange'a wynika, że rząd centralizatora równa się ilorazowi rzędu grupy przez moc klasy sprzężoności, a więc $|C_x| = |G| / |G_x|$. Dzięki tej elementarnej zależności możemy teraz łatwo obliczyć liczbę komutujących par elementów grupy w następujący sposób. Niech $k(G) := |G/\sim|$ będzie liczbą klas sprzężoności, zaś $\{x_1 = 1, \ldots, x_{k(G)}\}$ zbiorem reprezentantów klas sprzężoności. Zauważmy ponadto, że elementy należące do tej samej klasy sprzężoności mają równoliczne centralizatory. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\left|\left\{(x,y) \in G^2 : xy = yx\right\}\right| &= \sum_{x \in X} |C_x| = \sum_{i=1}^{k(G)} |G_{x_i}|\,|C_{x_i}| \\ &= \sum_{i=1}^{k(G)} |G_{x_i}| \frac{|G|}{|G_{x_i}|} = k(G)\,|G|,\end{aligned}$$

a stąd wynika, że stopień przemienności grupy G równy jest ilorazowi liczby klas sprzężoności przez rząd grupy

$$\Pr(G) = \frac{k(G)}{|G|}.$$

Tak więc badanie stopnia przemienności sprowadza się do badania zależności pomiędzy liczbą klas sprzężoności a rzędem grupy. W szczególności, korzystając ze znanych stwierdzeń dotyczących liczby klas sprzężoności, można łatwo pokazać, że tak zdefiniowana wielkość jest „malejąca”, to jest, jeżeli H jest podgrupą grupy G, to $\Pr(G) \leq \Pr(H)$, a gdy H jest podgrupą normalną, to stwierdzenie to można jeszcze wzmocnić, wówczas prawdziwa jest nierówność $\Pr(G) \leq \Pr(H) \cdot \Pr(G/H)$ (Gallagher, 1970).

W powyższej formie wzór na stopień przemienności pojawił się po raz pierwszy w roku 1968 w jednej z serii prac napisanych wspólnie przez węgierskich matematyków Paula Erdösa (1913–1996) i Pála Turána (1910–1976) poświęconych statystycznym własnościom grup skończonych, a w szczególności grup symetrii (Erdös, Turán, 1968). Jednakże problem badania związku pomiędzy strukturą grupy a liczbą jej klas sprzężoności jest jednym z najstarszych zagadnień studiowanych w ramach teorii grup. Był analizowany już w pracy niemieckiego matematyka Edmunda Landaua (1877–1938) na początku XX wieku. Landau (1903) pokazał, że istnieje tylko skończenie wiele grup o danej liczbie klas sprzężoności. Oznacza to w szczególności, że dla stopnia przemienności grupy musi istnieć niezerowe oszacowanie od dołu zależne tylko od rzędu grupy.

Pierwsze takie oszacowanie znaleźli również Erdös i Turán, posługując się metodą zapożyczoną z pracy amerykańskiego matematyka Georga Abrama Millera (1863–1951) z roku 1919. Styl pisania Millera, jednego z czołowych matematyków amerykańskich przełomu XIX i XX wieku, może zadziwić dzisiejszego czytelnika ze względu na pojawiające się w jego tekstach naukowych metafory i porównania. W omawianej pracy Miller (1919) nazywa jedynkę „monarchą” grupy, a sprzężone elementy określa jako elementy mające takie same prawa w „grupowym rządzie”. Tym niemniej, to Miller jako pierwszy wymyślił jak szacować od dołu stopień przemienności, a Erdös i Turán jedynie skopiowali kilkadziesiąt lat później jego rozumowanie. W tym samym roku wynik ten uzyskał też niezależnie amerykański matematyk Morris Newman (1924–2007) (Newman, 1968).

Miller, a za nim Erdös i Turán wykorzystali w sprytny sposób własności tak zwanego ciągu Sylvestra $(2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, \ldots)$. *Ciąg Sylvestra* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiujemy jako ciąg zaczynający się od 2, którego każdy element równy jest iloczynowi wszystkich poprzednich elementów zwiększonemu o 1, czyli

$$s_1 := 2,\ s_{k+1} := 1 + \prod_{i=1}^{k} s_i\ (k \in \mathbb{N}).$$

Stąd otrzymujemy natychmiast wzór rekurencyjny

$$s_{k+1} = s_k\,(s_k - 1) + 1 \leq s_k^2\ (k \in \mathbb{N}).$$

Możemy teraz łatwo pokazać (indukcją na k), że wzrost wartości ciągu Sylvestra jest co najwyżej podwójnie wykładniczy, a dokładniej

$$\log_2(\log_2(s_k)) \leq k - 1\ (k \in \mathbb{N}).$$

Kluczową własnością ciągu Sylvestra, którą Erdös i Turán użyli w dowodzie, jest fakt, że jego odwrotności w optymalny sposób szacują mocno od dołu jedynkę, gdy szacujemy ją za pomocą ciągu odwrotności liczb naturalnych o ustalonej długości k, czyli tak zwanych *ułamków egipskich*. Jeżeli rozważymy dowolny ciąg liczb naturalnych $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}$, spełniający nierówność $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{y_i} < 1$, to

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{y_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{s_i} = 1 - \frac{1}{s_{k+1} - 1}.$$

Zacznijmy teraz nasze krótkie rozumowanie od tak zwanego *równania klas* stwierdzającego po prostu, że rząd grupy jest sumą mocy klas sprzężoności

$$|G| = \sum_{i=1}^{k(G)} |G_{x_i}|.$$

Dzieląc teraz obie strony równania przez rząd grupy otrzymujemy, że 1 da się przedstawić jako suma odwrotności mocy centralizatorów reprezentantów $\{x_1 = 1, \ldots, x_{k(G)}\}$ poszczególnych klas

$$1 = \sum_{i=1}^{k(G)} \frac{|G_{x_i}|}{|G|} = \sum_{i=1}^{k(G)} \frac{1}{|C_{x_i}|}.$$

Jednakże centralizator jedności grupy jest całą grupą, a więc w tym rozkładzie pojawia się na początku składnik $1/|G|$. Suma pozostałych czynników musi być więc mniejsza od 1, a ich liczba wynosi dokładnie $k(G) - 1$

$$\sum_{i=2}^{k(G)} \frac{1}{|C_{x_i}|} = 1 - \frac{1}{|G|} < 1.$$

Korzystając z omówionych własności ciągu Sylvestra, otrzymujemy

$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=2}^{k(G)} \frac{1}{|C_{x_i}|} \leq 1 - \frac{1}{s_{k(G)} - 1},$$

a zatem rząd grupy szacuje się przez $k(G)$-ty wyraz ciągu Sylvestra $|G| + 1 \leq s_{k(G)}$. Ostatecznie, po podwójnym zlogarytmowaniu i wykorzystaniu oszacowania wzrostu wartości ciągu Sylvestra, wynika stąd, że liczba klas sprzężoności musi być większa od podwójnego logarytmu o podstawie 2 z rzędu grupy $\log_2(\log_2|G|) \leq \log_2(\log_2(s_{k(G)})) \leq k(G)$. Ostatecznie po podzieleniu przez rząd grupy otrzymujemy proste oszacowanie (Erdös, Turán, 1968; Newman, 1968)

$$\Pr(G) \geq \frac{\log_2(\log_2|G|)}{|G|}.$$

Wynika z niego w szczególności, iż w każdej grupie nieabelowej dostatecznie dużego rzędu pojawi się dużo nietrywialnych par komutujących ze sobą.

2. Oszacowanie górne i dwie metody obliczania stopnia przemienności

Równanie klas wykorzystał też pięć lat później matematyk amerykański William Howard Gustafson (1944–2007) do dowodu dość niespodziewanego uniwersalnego oszacowania górnego na stopień przemienności grupy nieabelowej zamieszczonego w *American Mathematical Monthly* (Gustafson, 1973). Idea jego rozumowania jest następująca. Aby zmaksymalizować stopień przemienności grupy nieabelowej G chcemy zmaksymalizować liczbę jej klas sprzężoności. Rozważmy *centrum grupy* $Z(G) := \bigcap_{x \in G} C_x$, czyli podgrupę złożoną z wszystkich elementów komutujących z każdym elementem grupy. Oczywiście centrum złożone jest z wszystkich jednoelementowych klas sprzężoności, a więc, aby zmaksymalizować liczbę klas sprzężoności, chcemy, żeby było ono jak największe, a od pozostałych klas wymagamy, żeby każda z nich składała się dokładnie z dwóch elementów. Można jednak łatwo pokazać, że iloraz nieabelowej grupy G przez jej centrum $Z(G)$ nie może być grupą cykliczną (zob. np. (Gallian, 2013, Theorem 9.3), a więc musi mieć rząd równy przynajmniej 4 lub większy (oczywiście, jeżeli $|G/Z(G)| = 4$, to wtedy $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Stąd

$$4 \leq |G/Z(G)| = |G| / |Z(G)|,$$

a więc rząd centrum nie może być większy niż 1/4 rzędu grupy. Stosując teraz równanie klas otrzymujemy

$$\begin{aligned} |G| &\geq |Z(G)| + 2(k(G) - |Z(G)|) \\ &= 2k(G) - |Z(G)| \geq 2k(G) - |G|/4. \end{aligned}$$

Po przekształceniu nierówności i podzieleniu jej obu stron przez rząd grupy otrzymujemy natychmiast oszacowanie stopnia przemienności G od góry

$$\Pr(G) \leq 5/8.$$

Zauważmy, odwracając powyższe rozumowanie, możemy z faktu, że $\Pr(G) = 5/8$ wywnioskować, że $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Wydaje się, że wynik ten był znany o wiele wcześniej, niektórzy przypisują go słynnemu niemieckiemu matematykowi Maksowi Zornowi (1906–1993) (zob. Leavitt *et al.*, 1992), ale dopiero Gustafson jako pierwszy zamieścił go w druku (zob. też MacHale, 1974). Widzimy od razu, istnieje ogromna luka pomiędzy grupami abelowymi, gdzie wszystkie pary elementów komutują, a nieabelowymi, gdzie przynajmniej $3/8 = 37,5\%$ par nie komutuje ze sobą. Oznacza to, że w nieabelowej grupie musi być „dużo” niekomutujących par. Tak więc wynik ten idzie niejako w przeciwnym kierunku co rezultat Erdösa i Turána.

Czy ograniczenie górne ustalone przez Gustafsona jest osiągalne? Odpowiedź brzmi: tak. Jako przykład może nam posłużyć ośmioelementowa grupa kwaternionów $\mathbb{Q}_8 := \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, w której działanie grupowe dane jest przez następującą tabelę:

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	$-k$	k	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	1	-1	k	$-k$	$-j$	j
j	j	$-j$	k	$-k$	-1	1	$-i$	i
$-j$	$-j$	j	$-k$	k	1	-1	i	$-i$
k	k	$-k$	$-j$	j	i	$-i$	-1	1
$-k$	$-k$	k	j	$-j$	$-i$	i	1	-1

Obliczając jej stopień przemienności, można też w prosty sposób zaprezentować dwie podstawowe techniki obliczania tej wielkości.

Pierwsza metoda wykorzystuje równanie klas. W grupie kwaternionów mamy dwie jednoelementowe klasy sprzężoności, gdyż dwuelementowe jest jej centrum $Z(\mathbb{Q}_8) = \{1, -1\}$. Pozostałe klasy $G_i = \{i, -i\}$, $G_j = \{j, -j\}$, $G_k = \{k, -k\}$ są dwuelementowe, a zatem równanie klas ma postać $8 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$. Łącznie jest więc 5 klas i stopień przemienności wynosi dokładnie $5/8$.

Druga metoda obliczania stopnia przemienności wykorzystuje *teorię reprezentacji grup*. Przypomnijmy, że *reprezentacją* (skończonej) *grupy* G (w zespolonej przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^n$) nazywamy dowolny homomorfizm grup ρ prowadzący z G do *ogólnej grupy liniowej* $GL(n, \mathbb{C})$, którą możemy utożsamić z grupą wszystkich odwracalnych macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem liczb zespolonych, zaś n nazywamy wtedy *wymiarem reprezentacji*. Reprezentację ρ nazywamy *nieprzywiedlną*, jeżeli nie posiada ona nietrywialnych (różnych od $\{0\}$ i $\mathbb{C}^n$) *podprzestrzeni niezmienniczych* V, czyli takich, że dla każdego $g \in G$ zachodzi $\rho(g)(V) \subset V$. *Charakterem* reprezentacji nieprzywiedlnej ρ (w skrócie: nieprzywiedlnym charakterem) nazywamy z kolei odwzorowanie liniowe $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ dane wzorem $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr} \rho(g)$ dla $g \in G$, gdzie tr oznacza ślad odwzorowania liniowego (można go utożsamić z sumą wyrazów na głównej przekątnej macierzy). Oczywiście, dla elementu neutralnego e grupy G mamy $\chi_\rho(e) = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = n$, charakter wyznacza wymiar nieprzywiedlnej reprezentacji. Wiadomo też, charakter reprezentacji nieprzywiedlnej wyznacza ją z dokładnością do naturalnej równoważności w zbiorze reprezentacji.

W obliczaniu stopnia przemienności grupy wykorzystuje się cztery dobrze znane i elementarne fakty dotyczące charakterów nieprzywiedlnych reprezentacji danej grupy. Po pierwsze, liczba nieprzywiedlnych charakterów skończonej grupy G równa jest liczbie klas sprzężoności $k(G)$. Po drugie, wymiary $n_1 \leq \cdots \leq n_{k(G)}$ tych nieprzywiedlnych charakterów są dzielnikami rzędu grupy. Po trzecie, suma kwadratów wymiarów nieprzywiedlnych charakterów równa się rzędowi grupy. Po czwarte wreszcie, liczba jednowymiarowych charakterów równa się indeksowi jej *komutanta* G', czyli rzędowi grupy G podzielonej przez rząd G', gdzie G' jest podgrupą (normalną) G generowaną przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$ dla $g, h \in G$. Te cztery fakty składają się łącznie na tak zwane *równanie wymiarów* (ang. *degree equation*):

$$|G| = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{|G|/|G'|} + \sum_{i=|G|/|G'|+1}^{k(G)} n_i^2 = |G| \,/\, |G'| + \sum_{i=|G|/|G'|+1}^{k(G)} n_i^2.$$

Jak wykorzystać to równanie do obliczania stopnia przemienności grupy kwaternionów? Zauważmy, że $\mathbb{Q}_8' = \{1, -1\}$, a więc indeks komutanta wynosi w tym przypadku 4. Stąd rząd grupy wynoszący 8 jest sumą czterech jedynek i kwadratów pewnych dzielników 8 różnych od 1. W grę wchodzi tylko kwadrat 2. Wynika stąd, że równanie wymiarów musi mieć postać

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2^2.$$

Tak więc grupa kwaternionów ma pięć nieprzywiedlnych charakterów, a więc też pięć klas sprzężoności i stopień przemienności równy 5/8. Zauważmy, wynik ten uzyskujemy nie znając w ogóle nieprzywiedlnych charakterów grupy kwaternionów!

Innego przykładu wykorzystania równania wymiarów do obliczenia stopnia przemienności dostarcza nam grupa permutacji zbioru czteroelementowego S_4. Łatwo pokazać, że jej komutant to grupa alternująca (grupa parzystych permutacji) A_4 i $|S_4| \,/\, |A_4| = 2$. W równaniu wymiarów musimy teraz przedstawić $|S_4| - |S_4| \,/\, |A_4| = 24 - 2 = 22$ jako sumę kwadratów nietrywialnych dzielników liczby 24. Da się to zrobić tylko na jeden sposób $22 = 4 + 9 + 9$. Stąd równanie wymiarów przyjmuje w tym przypadku postać

$$24 = 1 + 1 + 2^2 + 3^2 + 3^2,$$

a zatem grupa S_4 ma, podobnie jak grupa kwaternionów, pięć nieprzywiedlnych charakterów, a więc też pięć klas sprzężoności. W konsekwencji $\Pr(S_4) = 5/24$. Oczywiście nie dla każdej grupy da się „rozwiązać” równanie wymiarów i co za tym idzie obliczyć stopień przemienności w tak prosty sposób.

3. Stopień przemienności a struktura grupy

Zauważmy najpierw, że po podzieleniu grupy kwaternionów $\mathbb{Q}_8$ przez jej centrum $Z(\mathbb{Q}_8) \simeq Z_2$ otrzymujemy grupę $Z_2 \times Z_2$. Okazuje się, że własność ta w pełni charakteryzuje grupy nieprzemienne, które mają maksymalny stopień przemienności równy 5/8, co można pokazać wykorzystując podobne rozumowanie jakie doprowadziło Gustafsona do oszacowania górnego. Tak więc $\Pr(G) = 5/8$ wtw $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ta prosta uwaga stanowi punkt wyjścia do całej serii wyników (niektóre z nich uzyskano stosunkowo niedawno), które mówią, że jeżeli stopień przemienności grupy jest dostatecznie duży, to grupa jest bliska abelowej w pewnym określonym znaczeniu strukturalnym, a także dostarczają pełnych charakteryzacji grup o „dużym” (większym od zadanego) stopniu przemienności. Przypomnijmy, że G nazywamy odpowiednio:

(1) *nilpotentną*;

(2) *superrozwiązalną*;

(3) *rozwiązalną*,

gdy istnieje dla niej skończony ciąg jej podgrup normalnych

$$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_N = G$$

o tej własności, że grupa ilorazowa G_{k+1}/G_k (dla $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) jest, odpowiednio:

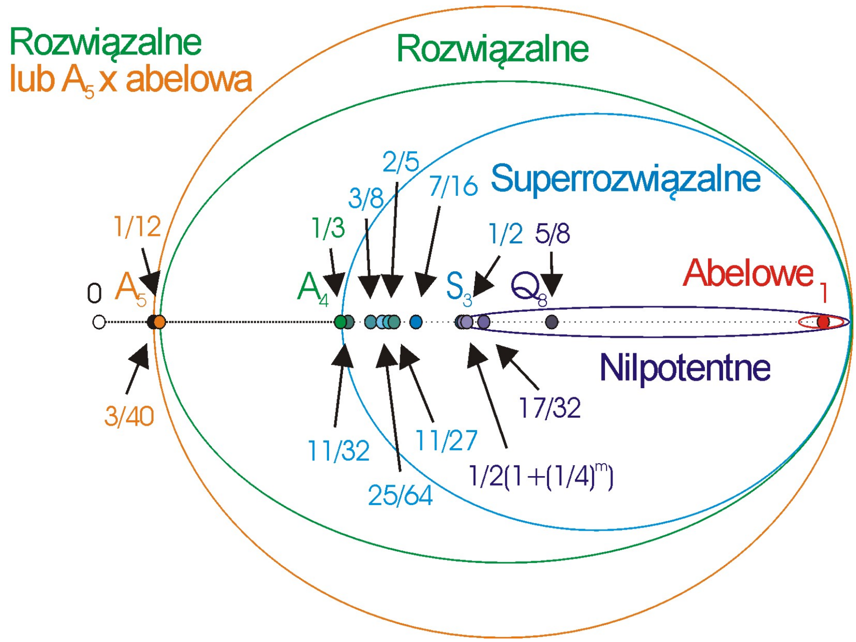
(1) podgrupą grupy $Z(G/G_k)$;

(2) cykliczna;

(3) abelowa.

Grupy abelowe, nilpotentne, superrozwiązalne i rozwiązalne tworzą rosnący ciąg klas grup o malejącym stopniu przemienności. W szczególności każda grupa nieabelowa o maksymalnym stopniu przemienności równym 5/8 musi być już nilpotentna, gdyż z zależności $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ wynika, że $\{e\} \leq Z(G) \leq G$ tworzą wtedy odpowiedni ciąg podgrup.

W roku 1978 Paul Lescot, wówczas student matematyki na Uniwersytecie Paryskim, uogólnił tę obserwację, pokazując, że wystarczy, aby stopień przemienności grupy skończonej był większy od 1/2, żeby grupa ta musiała już być nilpotentna (Lescot, 1978). Rezultatu tego nie da się poprawić, gdyż stopień przemienności grupy S_3 wynosi, jak widzieliśmy, właśnie 1/2, a grupa ta nilpotentna nie jest. Dekadę temu natomiast trzech matematyków z Uniwersytetu w Cork w Irlandii (Barry *et al.* 2006) pokazało, że gdy stopień przemienności jest z kolei większy od 1/3, to grupa musi być superrozwiązalna. I tego wyniku także nie da się poprawić, gdyż stopień przemienności grupy A_4 wynosi właśnie 1/3, a grupa ta superrozwiązalna nie jest. Superozwiązalnośc jest warunkiem pośrednim pomiędzy nilpotentnością a rozwiązalnością. W roku 1988 ponownie Lescot pokazał, że gdy stopień przemienności grupy jest większy od 1/12, to grupa ta musi być już rozwiązalna (Lescot, 1988). Wyniku tego również nie da się wzmocnić. Rozważmy bowiem grupę alternującą A_5 izomorficzną z tzw. *grupą ikosaedralną*, czyli grupą obrotów dwunastościanu lub dwudziestościanu foremnego. W jej skład wchodzi identyczność, 12 obrotów o kąt $2\pi/5$, 12 obrotów o kąt $4\pi/5$, 20 obrotów o kąt $2\pi/3$ oraz 15 obrotów o kąt π, a obroty o dany kąt tworzą właśnie klasy sprzężoności, których jest zatem w A_5 pięć. Stąd $\Pr(A_5) = 5/60 = 1/12$, a grupa ta nie jest, jak dobrze wiadomo, rozwiązalna. Wreszcie ten ostatni wynik został wzmocniony niedawno przez jednego z czołowych amerykańskich specjalistów z teorii grup Roberta Guralnicka z University of Southern California w Los Angeles i przez Geoffreya Robinsona z Uniwersytetu w Aberdeen w Szkocji, którzy scharakteryzowali wszystkie nierozwiązalne grupy o stopniu przemienności równym 1/12 (muszą być one produktem grupy A_5 i grupy abelowej) i pokazali, że wszystkie pozostałe grupy o stopniu przemienności większym od 3/40 muszą być już rozwiązalne (Guralnick, Robinson, 2006). Inaczej mówiąc, grupa o stopniu przemienności powyżej 3/40 jest albo rozwiązalna, albo jest produktem A_5 i grupy abelowej, a wtedy jej stopień przemienności wynosi 1/12. Do dziś jest to najmocniejszy wynik tego typu.



Rysunek 1.

Cytowane rezultaty uzasadniają stwierdzenie, że jeżeli grupa nie ma odpowiednio dobrej struktury, to musi być „bardzo nieprzemienna”. Jednakże wynik Erdösa i Turána pokazuje, że dla grup o danym rzędzie ta nieprzemienność musi mieć też swoje dolne ograniczenie. Rezultat ten dał impuls do poszukiwania bardziej dokładnych dolnych uniwersalnych (czyli zależnych tylko od rzędu grupy) oszacowań stopnia przemienności. Najmocniejsze z nich uzyskano niedawno, gdy pokazano, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, stopień przemienności dowolnej grupy o rzędzie większym lub równym niż 3 szacuje się od dołu (Baumeister *et al*, 2016).

$$\Pr(G) \geq \delta \cdot \frac{\log_2 |G|}{|G| \left(\log_2 (\log_2 |G|\right)^{3+\varepsilon}}$$

Istnieją zresztą poważne poszlaki, prawdziwe jest również o wiele mocniejsze oszacowanie dolne postaci $(\log_3 |G|)/|G|$. Prawdziwość tego stwierdzenia została sprawdzona dla wszystkich grup rzędu mniejszego od 3^{15} (Bertram, 2013).

4. Jaką liczbą może być stopień przemienności?

Oczywiście musi być liczbą wymierną z przedziału $(0, 1]$, ale z uwagi na widoczne „luki” w zbiorze wartości stopnia przemienności $\mathcal{P}$ (na przykład luka pomiędzy 5/8 a 1) bardzo naturalnym wydaje się pytanie: jakie ten zbiór ma własności? Pierwszy rezultat tego typu udowodnił (w swojej pracy magisterskiej na Uniwersytecie w Chicago opublikowanej później w *Pacific Journal of Mathematics*) David Rusin, który pokazał, że jedynymi wartościami, jakie stopień przemienności może przyjmować w przedziale $(11/32, 1]$, są elementy ciągu $\frac{1}{2}(1 + 1/4^m)$, a więc

$1, 5/8, 17/32$ i tak dalej oraz elementy zbioru $\{3/8, 25/64, 2/5, 11/27, 7/16, 1/2\}$ (Rusin, 1979). Śmiałe hipotezy dotyczące własności zbioru $\mathcal{P}$ wysunął w swoim doktoracie obronionym w roku 1969 na Uniwersytecie Kaliforinijskim w Los Angeles Keith S. Joseph. Hipotez tych początkowo niezauważono, na co wpływ miał fakt, że doktorat ten nie został od razu opublikowany, a Joseph po jego napisaniu przestał się zajmować matematyką na poziomie uniwersyteckim. Po pierwsze, Joseph przypuszczał, że każdy punkt skupienia tego zbioru musi być wymierny; po drugie, że może być on osiągany tylko po wartościach większych od niego – „od góry" (i w konsekwencji zbiór $\mathcal{P}$ z porządkiem dualnym do naturalnego jest dobrze uporządkowany), a po trzecie, że też musi być stopniem przemienności pewnej grupy lub zerem, czyli $\mathcal{P} \cup \{0\}$ jest domknięty (Joseph, 1969, 1977). Z wyniku Rusina wynika prawdziwość tych trzech hipotez dla wartości stopnia przemienności z przedziału $(11/32, 1]$. W roku 2012 Peter Hegarty z Uniwersytetu w Göteborgu pokazał, że pierwsze dwie hipotezy Josepha są prawdziwe dla wartości stopnia przemienności z przedziału $(2/9, 1]$. Autor przyznawał jednak, że zupełnie nie wiadomo jakich metod można by użyć, żeby udowodnić hipotezy Josepha w całym zakresie wartości $(0, 1]$, (Hegarty, 2013). Ten trudny problem został częściowo rozwiązany całkiem niedawno przez angielskiego matematyka Seana Eberharda z Oxfordu, który, wykorzystując teorię ułamków egipskich, pokazał, że pierwsze dwie hipotezy Josepha są prawdziwe. Co więcej, wykazał on, że typ porządkowy $\mathcal{P}$ (z dualnym porządkiem) równy jest albo ω^ω albo ω^{ω^2} (Eberhard, 2015). Trzecia hipoteza Josepha pozostaje otwarta.

5. Zakończenie

Wiele z omawianych tu zagadnień można w naturalny sposób uogólnić badając stopień przemienności bądź to w grupach topologicznych (Gustafson, 1973), grupach nieskończonych (Antolín *et al*, 2017), bądź to w innych strukturach algebraicznych takich jak półgrupy (MacHale, 1990; Ponomarenko, Selinski, 2012) czy pierścienie (MacHale, 1976; Buckley, MacHale, 2017). Co ciekawe, nie wszystkie wyniki dotyczące grup mają swoje odpowiedniki dla innych struktur. Na przykład stopień przemienności półgrupy może być dowolną liczbą wymierną z przedziału $(0, 1]$, zaś dla pierścieni nie ma prostego wzoru opisującego stopień przemienności na podobieństwo wzoru wiążącego go z liczbą klas sprzężoności dla grup (Buckley, MacHale, 2017). Z drugiej strony stanowią one przykład o szerszej klasy zagadnień zaliczanych do tak zwanej *probabilistycznej teorii grup* (Dixon, 2002). Więcej ciekawych informacji o stopniu przemienności można znaleźć w pracach przeglądowych (Castelaz, 2010; Das *et al*, 2013).

Literatura

Antolín, Y., Martino, A., Ventura, E.: 2017, Degree of commutativity of infinite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **145**, 479–485.

Barry, F., MacHale, D., Ní Shé, Á.: 2006, Some supersolvability conditions for finite groups, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **106A**, 163–177.

Baumeister, B., Maróti, A., Tong-Viet, H. P.: 2016, Finite groups have more conjugacy classes, *Forum Math.* **29**, 259–275.

Bertram, E. A.: 2013, New reductions and logarithmic lower bounds for the number of conjugacy classes in finite groups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **87**, 406–424.

Buckley, S. M., MacHale, D.: 2017, Contrasting the commuting probabilities of groups and rings, preprint, `http://archive.maths.nuim.ie/staff/sbuckley/Papers/bm_g-vs-r.pdf`.

Castelaz, A.: 2010, *Commutativity degree of finite groups*, Master's thesis, Wake Forest University.

Das, A. K., Nath, R. K., Pournaki, M. R.: 2013, A survey on the estimation of commutativity in finite groups, *Southeast Asian Bull. Math.* **37**, 161–180.

Dixon, J. D.: 2002, Probabilistic group theory, *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.* **24**, 1–15.

Eberhard, S.: 2015, Commuting probabilities of finite groups, *Bull. London Math. Soc.* **47**, 796–808.

Erdös, P., Turán, P.: 1968, On some problems of a statistical group-theory, iv, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19**, 413–435.

Gallagher, P. X.: 1970, The number of conjugacy classes in a finite group, *Math. Z.* **118**, 175–179.

Gallian, J. A.: 2013, *Contemporary Abstract Algebra*, 8th ed., Belmont, CA, Cengage Learning.

Guralnick, R. M., Robinson, G. R.: 2006, On the commuting probability in finite groups, *J. Algebra* **300**, 509–528.

Gustafson, W. H.: 1973, What is the probability that two group elements commute?, *Amer. Math. Monthly* **80**, 1031–1034.

Hegarty, P.: 2013, Limit points in the range of the commuting probability function on finite groups, *J. Group Theory* **16**, 235–247.

Joseph, K. S.: 1969, *Commutativity in non-abelian groups*, PhD thesis, UCLA.

Joseph, K. S.: 1977, Several conjectures on commutativity in algebraic structures, *Amer. Math. Monthly* **84**, 550–551.

Landau, E.: 1903, Über die Klassenzahl binären quadratischen Formen von negativer Discriminante, *Math. Ann.* **56**, 671–676.

Leavitt, J. L., Sherman, G. J., Walker, M. E.: 1992, Rewriteability in finite groups, *Amer. Math. Monthly* **99**, 446–452.

Lescot, P.: 1978, Sur certains groupes finis, *Rev. Math. Spéciales*, Avril 1987, 276–277.

Lescot, P.: 1988, Degré de commutativité et structure d'un groupe fini (1), *Rev. Math. Spéciales*, Avril 1988, 276–279.

MacHale, D.: 1974, How commutative can a non-commutative group be?, *Math. Gazette* **58**, 199–202.

MacHale, D.: 1976, Commutativity in finite rings, *Amer. Math. Monthly* **83**, 30–32.

MacHale, D.: 1990, Probability in finite semigroups, *Irish Math. Soc. Bull.* **25**, 64–68.

Miller, G. A.: 1919, Groups possessing a small number of sets of conjugate operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **20**, 260–270.

Newman, M.: 1968, A bound for the number of conjugacy classes in a group, *J. London Math. Soc.* **43**, 108–110.

Ponomarenko, V., Selinski, N.: 2012, Two semigroup elements can commute with any positive rational probability, *College Math. J.* **43**, 334–336.

Rusin, D. J.: 1979, What is the probability that two elements of a finite group commute?, *Pacific J. Math.* **82**, 237–247.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail kslomcz@up.krakow.pl