FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.6

Joanna Major, Bożena Olik-Pawlik,
Tadeusz Ratusiński, Lidia Zaręba

O roli prac dyplomowych z dydaktyki matematyki w kształceniu przyszłych nauczycieli matematyki*

Abstract. In the training process of students – future teachers of mathematics, an important role is played by, among others, participation in the diploma seminar, during which the student (being at the final stage of studies) is tasked with preparing a bachelor's or master's thesis. This dissertation may be purely mathematical in nature or refer to problems in didactics of mathematics. The article aims to develop and illustrate some thoughts from previous works of the authors (Zaręba, 2009; Major, Olik-Pawlik, Ratusiński, Zaręba, 2016), pointing to the legitimacy of the preparation of teacher diploma theses in the field of didactics of mathematics by students.

1. Wprowadzenie

Kształcenie na uczelni pedagogicznej, której głównym zadaniem jest przygotowanie do wykonywania zawodu nauczyciela, ukierunkowane jest na zdobycie przez absolwentów odpowiednich efektów kształcenia. W programach nauczycielskich studiów wyższych na kierunku matematyka, prowadzonych w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie, charakterystyka sylwetki absolwenta uwzględnia – na poziomie studiów pierwszego stopnia – następujący zapis:

> Absolwent specjalności nauczycielskiej dysponuje odpowiednim przygotowaniem psychologicznym, pedagogicznym i dydaktycznym pozwalającym mu pełnić role: nauczyciela – wychowawcy i opiekuna oraz nauczyciela – osoby integrująco-motywującej. Posiada także wstępne przygotowanie umożliwiające prowadzenie badań edukacyjnych
> (Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, 2017a).

*On the role of dissertations in didactics of mathematics in the training process of future teachers of mathematics

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97B50; Secondary: 97C70

Key words and phrases: educating students – future teachers, the teaching-learning process of mathematics, thesis, mathematical activities, generalization

W stosunku do absolwenta studiów drugiego stopnia zakłada się szersze przygotowanie w kontekście prowadzenia badań edukacyjnych; tu zwraca się uwagę na to, że:

> Absolwent posiada także przygotowanie umożliwiające prowadzenie badań edukacyjnych, dostrzeganie oraz samodzielne rozwiązywanie problemów teoretycznych i praktycznych, sytuujących się w dydaktyczno-pedagogicznym polu eksploracyjnym
> (Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, 2017b).

W ramach oferowanych na studiach kursów należy zatem zapewnić studentowi możliwość takiego dydaktycznego przygotowania, by mógł on nie tylko pełnić rolę nauczyciela matematyki, ale także potrafił (dostrzegając problemy różnej natury, w tym zarówno matematycznej, jak i praktycznej) prowadzić badania edukacyjne. Zdaniem autorów niniejszej pracy realizacja postawionych celów stanie się pełniejsza, jeśli student będzie miał możliwość przygotowania podczas studiów pracy dyplomowej z dydaktyki matematyki. Zaobserwować można jednak, że mimo dużego zainteresowania studentów możliwością przygotowywania pracy o charakterze dydaktycznym, prac takich wciąż powstaje zbyt mało.

Zaawansowanie na poziomie treści czy rozumowań jest cennym wyznacznikiem konstruowania prac dyplomowych, nie zawsze jednak – w opinii autorów artykułu – musi odnosić się tylko do matematyki teoretycznej. Równie wartościowe i głębokie mogą być rozumowania o charakterze dydaktycznym, prowadzone na gruncie matematyki szkolnej. Chodzi tu o dostrzeżenie wagi i potrzeby prowadzenia przez studenta pracy badawczej w obrębie etapu edukacyjnego, do którego ma on nabyć uprawnienia nauczycielskie. W tym kontekście na uwagę zasługuje zdanie Z. Mosznera: „Niestety jest wielu matematyków, którzy uważają, że przyszłym nauczycielom wystarczy dostatecznie obszerne wykształcenie matematyczne, a przyszła praktyka uczyni z nich dobrych pedagogów" (Moszner, 2004, s. 263). Formułując taką myśl, autor tej wypowiedzi wyraża troskę o „uświadomienie większości (wszystkim?) kształcącym przyszłych nauczycieli specyfiki takich studiów, tego, że muszą oni uczyć, mając ciągle na uwadze działalność, do której przygotowują" (Moszner, 2004, s. 262–263). Oczywiście, można kształcić studentów w ramach matematyki teoretycznej, wdrażając ich we wspomnianą wcześniej działalność, poprzez prowokowanie do aktywności matematycznej na wysokim poziomie abstrakcji. Słuszne wydaje się jednak stwierdzenie, że absolwenci studiów nauczycielskich mogą – w zależności od wybranego seminarium i tematu pracy dyplomowej – odebrać istotnie różne wykształcenie dydaktyczne. Wynika to stąd, że pracom z matematyki teoretycznej i dydaktyki matematyki przyświecają inne cele. W pracach odnoszących się do matematyki teoretycznej student musi wykazać się znajomością pewnej teorii matematycznej, którą w pewnym stopniu powinien sam przyswoić bądź uzupełnić (np. luki w rozumowaniach dowodowych). W pracach z dydaktyki matematyki dyplomant ma za zadanie scalić wiedzę z matematyki teoretycznej z wiedzą praktyczną, odnoszącą się do rzeczywistości szkolnej. Musi zatem wykazać się umiejętnością syntezy teoretycznej wiedzy matematycznej, teoretycznych podstaw dydaktycznych oraz praktycznych sytuacji mających miejsce podczas szkolnych lekcji matematyki, na odpowiednim etapie edukacyjnym.

Należy przypomnieć, że idea pisania prac dyplomowych z dydaktyki matematyki, to efekt starań podjętych przez A. Z. Krygowską; to z jej inicjatywy „rozszerzenie tematycznej oferty prac magisterskich na matematycznych kierunkach nauczycielskich o prace obejmujące tematykę dydaktyczną stało się faktem" (Konior, 2005, s. 68–70). Wybór przez dyplomanta seminarium z dydaktyki matematyki wiąże się dla niego z podejmowaniem szeregu działań i aktywności, na znaczenie których przede wszystkim chcą zwrócić uwagę autorzy niniejszej publikacji.

Na zagadnienia związane z przygotowywaniem prac dyplomowych warto spojrzeć nieco szerzej, biorąc pod uwagę nie tylko rozwój studenta – przyszłego nauczyciela, ale także wartość, jaką badania dydaktyczne (nawet te – prowadzone w ramach prac dyplomowych) wnoszą w edukację. Trzeba bowiem uświadomić sobie, że w związku z ciągłymi przemianami w otaczającej nas rzeczywistości zmiany w oświacie są nieuniknione. Badania dydaktyczne ukazują się więc w tym kontekście jako ważne i niezbędne dla ulepszania procesu edukacji. Nie powinny być jednak prowadzone tylko w obrębie ośrodków naukowych – uczelni, przez specjalistów w dziedzinie dydaktyki matematyki. Cenne jest także podejmowanie badań w węższym zakresie, w różnego typu placówkach szkolnych czy klasach, badań, w których funkcję badacza przejmuje nauczyciel uczący daną grupę osób. Przygotowanie pracy dyplomowej z dydaktyki matematyki to jeden z istotnych elementów w kształceniu nauczycieli, bo mogący ukazać studentom jak stawać się nie tylko dobrymi nauczycielami, ale także świadomymi i stawiającymi sobie pytania badaczami procesu nauczania-uczenia się matematyki.

Sam proces nauczania-uczenia się jest bardzo złożony i wymaga interdyscyplinarnego spojrzenia badawczego (Czajkowska, 2015). W procesie tym można, z pewnym uproszczeniem, wyróżnić cztery komponenty, których świadomość istnienia powinien mieć każdy uczący tego przedmiotu: kształtowanie pojęć matematycznych, rozwiązywanie zadań, prowadzenie rozumowań matematycznych oraz kształtowanie języka matematycznego (Major, Olik-Pawlik, Ratusiński, Zaręba, 2016). Nie ulega wątpliwości, że wszystkie z wymienionych tu składników rozważanego procesu są ważne i to na każdym poziomie edukacji. Z uwagi na rozmiary artykułu, autorzy skoncentrowali swoje rozważania głównie wokół trzeciego komponentu tj. prowadzenia rozumowań matematycznych.

2. O wybranych aspektach pracy dyplomowej na przykładzie zagadnień związanych z pojęciem pola prostokąta

Punktem wyjścia każdej pracy dyplomowej z dydaktyki matematyki jest odpowiednie przygotowanie merytoryczne dyplomanta w zakresie obranej tematyki. Realizacja tego etapu odbywa się między innymi w wyniku studiowania literatury, w tym analizy pojęć czy twierdzeń związanych z tematem pracy. Nie wystarczy jednak operatywne rozumienie kluczowych w danej pracy definicji czy twierdzeń z poziomu matematyki wyższej, dlatego że odpowiednie przygotowanie studenta do nauczania matematyki na określonym poziomie edukacyjnym stawia przed nim dodatkowe wyzwania. Nauczyciel powinien mieć – oprócz zaplecza czysto teoretycznego z poziomu matematyki wyższej – także świadomość, w jakim zakresie pojęcia czy twierdzenia opisywane językiem matematyki wyższej są dostępne

uczniom w określonym wieku szkolnym. Warto, by zdawał sobie sprawę z problemów i trudności związanych z kształtowaniem tych pojęć. W tym względzie niezbędna jest oczywiście znajomość treści podstawy programowej z danego poziomu edukacyjnego. Czym innym jest jednak wiedza teoretyczna wypływająca z tego dokumentu, a czym innym doświadczenie – nawet fragmentaryczne – płynące z pracy o charakterze badawczym, a szczególnie empirycznym. Występujący w roli badacza i obserwatora przyszły nauczyciel ma bowiem możliwość, chociaż na wybranym zagadnieniu matematycznym, doświadczyć różnorodnych problemów dydaktycznych z nim związanych. Współpraca z uczniami (rozmowy z nimi, obserwacja podejmowanych działań czy analiza pisemnych prac uczniów), to najlepszy sposób, by zdobyć nie tylko informacje o trudnościach jakich doświadczają i błędach, które popełniają ucząc się matematyki, ale również wiedzę na temat ich ciekawych pomysłów, nietypowych rozumowań czy niestandardowych rozwiązań.

3. Pole prostokąta w ujęciu teoretycznym i dydaktycznym

Dla zilustrowania wagi omawianych tu kwestii autorzy posłużyli się zagadnieniami związanymi z pojęciem pola prostokąta opracowywanym na II etapie edukacyjnym. Na gruncie matematyki wyższej odpowiednikiem pojęcia pola figury ograniczonej jest miara Jordana – pojęcie, które niejednokrotnie sprawia trudności studiującym matematykę. Do jego zrozumienia potrzebna jest bowiem wiedza na temat szeregu innych pojęć takich jak: jednostka pola, sieć kwadratowa o danym odstępie, k-krotne zagęszczenie sieci, segment sieci zawarty w figurze, segment sieci pokrywający figurę, pola tych segmentów, ciągi pól stosownych segmentów przy kolejnych zagęszczeniach sieci, granice tych ciągów. W wyniku długiego postępowania zwanego wymierzaniem figury, jeśli granice odpowiednich ciągów są równe, to za pole figury przyjmuje się wspólną wartość tych granic (por. Krygowska, 1972, s. 159–162). Długą procedurę, której tu nie przytoczono, Z. Krygowska (1972, s. 171) ujmuje w zwięzły, w porównaniu do opisu całego toku postępowania, sposób (patrz: Rysunek 1):

Definicja 9,2

Jeżeli f jest figurą ograniczoną, to granicę $w(f)$ ciągu pól segmentów zawartych w f, wyznaczonych przez ciąg sieci użyty do wymierzania f jednostką $\bar{u}^2$, nazywamy **miarą wewnętrzną** f przy tej jednostce; granicę $z(f)$ ciągu pól segmentów sieci pokrywających f, wyznaczonych przez ciąg sieci użyty do wymierzania f jednostką $\bar{u}^2$, nazywamy **miarą zewnętrzną** figury f przy danej jednostce.

Jeżeli $w(f) = z(f)$, to mówimy, że figura f ma **miarę polową** lub **pole** równe (przy danej jednostce $\bar{u}^2$) liczbie

$$w(f) = z(f).$$

Rysunek 1. Geometria dla klasy II liceum ogólnokształcącego (Krygowska, 1972, s. 162–164).

Już sam opis procedury wymierzania figury może wskazywać na trudności tkwiące w omawianym tu pojęciu. Nieco łatwiejsze jest zastosowanie wspomnianej procedury do szczególnej figury jaką jest prostokąt. W wyniku wymierzania dowolnego prostokąta o wymiarach a i b wskazuje się iloczyn $a \cdot b$ jako pole tego prostokąta (por. Krygowska, 1972, s. 162–164). Choć procedura jest ogólna, to jednak przybliżanie zagadnienia na rysunku wymusza ustalenie konkretnych wartości a i b. Oczywiście wystarczy mieć świadomość istoty uzmienniania stałych[1], by zrozumieć, że rozważania nie ulegną zmianie przy innych długościach boków prostokąta. Podobna sytuacja dotyczy wyboru sieci o odstępie równym jednostce długości czy sposobu zagęszczania tej sieci.

Rozumienie opisanej wyżej procedury jest istotne w wykształceniu studenta matematyki. Nie wystarczy jednak dobrze opanować pojęcie miary Jordana, by w umiejętny sposób pokierować aktywnością ucznia szkoły podstawowej i zrealizować ujęte w podstawie programowej zagadnienia dotyczące pól figur płaskich. W szkole podstawowej wprowadza się wzór na pole prostokąta, aby następnie – na drodze dedukcyjnej – uzyskać wzory na pola takich figur geometrycznych jak: kwadrat, romb, równoległobok, trójkąt i trapez. Kluczową rolę zatem odgrywa tutaj odpowiednie zorganizowanie aktywności ucznia na poziomie wprowadzania go w procedurę obliczania pola prostokąta. Stąd niniejszy paragraf poświęcony został dydaktycznym zagadnieniom związanym z polem prostokąta.

Warto zwrócić uwagę na to, że w *Podstawie programowej kształcenia ogólnego* (z roku 2012), w której II etap edukacyjny obejmował kształcenie w klasach IV–VI szkoły podstawowej, brak jest zapisów wskazujących na to, że uczeń rozumie odpowiednie pojęcie, lecz akcentuje się czynności, które za rozumieniem przemawiają:

> Słowo „rozumie" jest za mało precyzyjne, można bowiem podkładać pod nie przeróżne interpretacje. /. . . / Wszelkie próby ustalenia, czy uczeń rozumie dane pojęcie, jeśli nie prowadzi tego profesjonalnie przygotowany psycholog, grożą sprawdzaniem jedynie werbalnej wiedzy, wymaganiem od ucznia teoretycznych sformułowań, definicji, wyuczonych formułek. Z tego powodu o tym, czy uczeń należycie rozumie dane pojęcie (na swoim poziomie wiekowym), ma się wnioskować pośrednio z tego, czy poprawnie i z sensem wykonuje określone w podstawie programowej czynności
> (Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2008, s. 55–56).

Zgodnie z tą uwagą autorzy podstawy programowej zakładają, że na II etapie edukacyjnym uczeń „oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych" (Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2008, s. 32).

[1] *Uzmiennianie stałych* jest w literaturze z dydaktyki matematyki rozumiane jako „rozumowanie prowadzone w szczególnym przypadku, jednak tak, że widoczna jest jego ogólna ważność pozwalająca uznać, że tak będzie zawsze; zawsze znaczy tu – dla każdych innych liczb wziętych zamiast występujących w rozumowaniu (Nowak, 1989; Mnich, 1980; Turnau, 1990); szczególny przypadek stanowiący bazę do uzmienniania stałych to przykład paradygmatyczny" (za: Zaręba, 2012, s. 39–40).

Akcentując potrzebę czynnego udziału ucznia w zdobywaniu wiedzy matematycznej, zwraca się uwagę na dobór sytuacji, które umożliwiają dziecku odkrycie sposobu obliczania pola prostokąta. Jak piszą autorzy wskazanej tu podstawy programowej:

> Kształtowanie pojęcia pola prostokąta należy rozpocząć od sytuacji, w których oba boki wyrażają się liczbami naturalnymi i uczeń ma obliczyć, z ilu kwadracików składa się prostokąt. W naturalny sposób pojawia się mnożenie. W przypadku długości ułamkowych wystarczy, że uczeń wie, że nadal stosuje się tę samą procedurę: aby obliczyć pole prostokąta, mnożę długości boków (wyrażone w tych samych jednostkach)
> (Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2008, s. 68).

W tych kilku zdaniach tkwi bardzo istotny, z punktu widzenia metody matematycznej, problem. Będzie o nim mowa w dalszej części artykułu. Z powodu ograniczeń programowych II etapu edukacyjnego (zakres materiału klas IV–VI nie obejmuje rozważań w zbiorze liczb niewymiernych), w niniejszej pracy uwagę skupiono na wspomnianym przejściu – od pola prostokąta o wymiarach będących liczbami naturalnymi do pola prostokąta o długościach boków wyrażonych liczbami wymiernymi. Aby ułatwić lekturę tekstu, przejście to będzie krótko sygnalizowane przy zastosowaniu zwrotów: *wymiary naturalne*, *wymiary wymierne*.

Biorąc pod uwagę fakt, że podstawa programowa wyznacza to, co w szkole powinien opanować „przeciętny uczeń", wydaje się sensowne szybkie przejście od procedury obliczania pola prostokąta dla wymiarów naturalnych do analogicznej procedury stosowanej przy wymiarach wymiernych. Warto jednak zastanowić się nad cytowanym wyżej zdaniem: „W przypadku długości ułamkowych wystarczy, że uczeń wie, że nadal stosuje się tę samą procedurę". Czym innym jest bowiem nieświadome stosowanie twierdzenia (jakim niewątpliwie jest korzystanie ze wzoru na pole prostokąta o wymiarach naturalnych) przy innych, stosunkowo do znanych, założeniach, czym innym zaś korzystanie z twierdzenia funkcjonującego przy ogólniejszych założeniach ze świadomością, że wolno z takiego twierdzenia korzystać. To nauczyciel, w zależności od możliwości swoich uczniów, podejmuje decyzję, w jaki sposób pokonać opisane przejście. Czynić to jednak powinien w zgodzie z poprawnym rozumieniem i kształtowaniem u uczniów metody matematycznej. Tak samo dobrym rozwiązaniem będzie w takiej sytuacji poinformowanie uczniów, że odpowiedni wzór można stosować w przypadku innego rodzaju długości boków, jak i zorganizowanie aktywności uczniów tak, by sami taki wniosek byli w stanie sformułować. Nie jest natomiast właściwym rozwiązaniem dopuszczanie do sytuacji, w której uczeń nie ma okazji do refleksji i uświadomienia sobie, że następuje zmiana zakresu stosowanych do tej pory danych (założeń twierdzenia). Niestety bywa tak, że sami uczący nie zawsze mają tego świadomość; niejednokrotnie autorzy tego artykułu mieli okazję obserwować lekcje matematyki, podczas których po wprowadzeniu wzoru na obliczanie pola prostokąta o wymiarach boków będących liczbami naturalnymi uczniowie obliczali, jako ćwiczenie utrwalające, pola prostokątów o bokach, których długości wyrażone były liczbami wymiernymi. Do braku tej świadomości niejednokrotnie przyznają się studenci i czynni nauczyciele, co znaczy, że jest to problem w nauczaniu, którego nie można zbagatelizować w kształceniu przyszłych, jak i czynnych nauczycieli.

Niepoprawną metodologicznie jest także inna sytuacja związana z wprowadzaniem twierdzenia ogólniejszego od danego. Chodzi mianowicie o sprawdzanie poprawności takiego twierdzenia na konkretnych, wybranych przykładach. Jak pisze S. Turnau: „Sprawdzanie jakiegokolwiek uogólnionego twierdzenia w szczególnych przypadkach tak, że dla uczniów wygląda to na rozstrzygający argument, jest nauczaniem nierzetelnej matematyki" (Turnau, 1990, s. 139).

Opisane kwestie są przykładem na to, jak w pozornie prostym zagadnieniu tkwić mogą istotne dydaktycznie problemy. Na ich rozważanie i zgłębianie jest miejsce nie tylko w ramach zajęć z dydaktyki matematyki, ale także w trakcie działalności dydaktyczno-badawczej prowadzonej w ramach prac dyplomowych. Ta ostatnia forma jest nie tylko ciekawsza od poprzednio wskazanej, ale też o wiele bardziej wartościowa, bo „żywa" – wymagająca kontaktu z uczniem, z wytworami jego umysłu. Takiej aktywności studentów nie zastąpią żadne rozważania teoretyczne. Daje ona możliwość nie tylko uświadomienia sobie problemu, ale niesie szansę prowadzenia własnych eksperymentów dydaktycznych w pracy z uczniami, pozwala spojrzeć na wybrane zagadnienia od strony ucznia, daje okazję do obserwacji trudności towarzyszącym badanym.

Aby zwrócić uwagę na korzyści, jakie może przynieść studentowi uczestnictwo w seminarium z dydaktyki matematyki, na znaczenie podejmowanych przez studentów działań towarzyszących pisaniu pracy dyplomowej z tej dziedziny, przybliżono zasygnalizowaną wyżej problematykę, odwołując się do jednej z prac licencjackich (Koszyk, 2012). Praca ta, napisana pod kierunkiem jednego spośród współautorów niniejszego artykułu[2], prowokować miała dyplomantkę między innymi do:

- zgłębiania od strony teoretycznej zagadnień związanych z tematyką seminarium;
- stawiania pytań badawczych i samodzielnego wyboru tematu pracy dyplomowej;
- wypracowywania własnego narzędzia badawczego i samodzielnego analizowania wyników uzyskanych podczas badań empirycznych (Zaręba, 2009, s. 97).

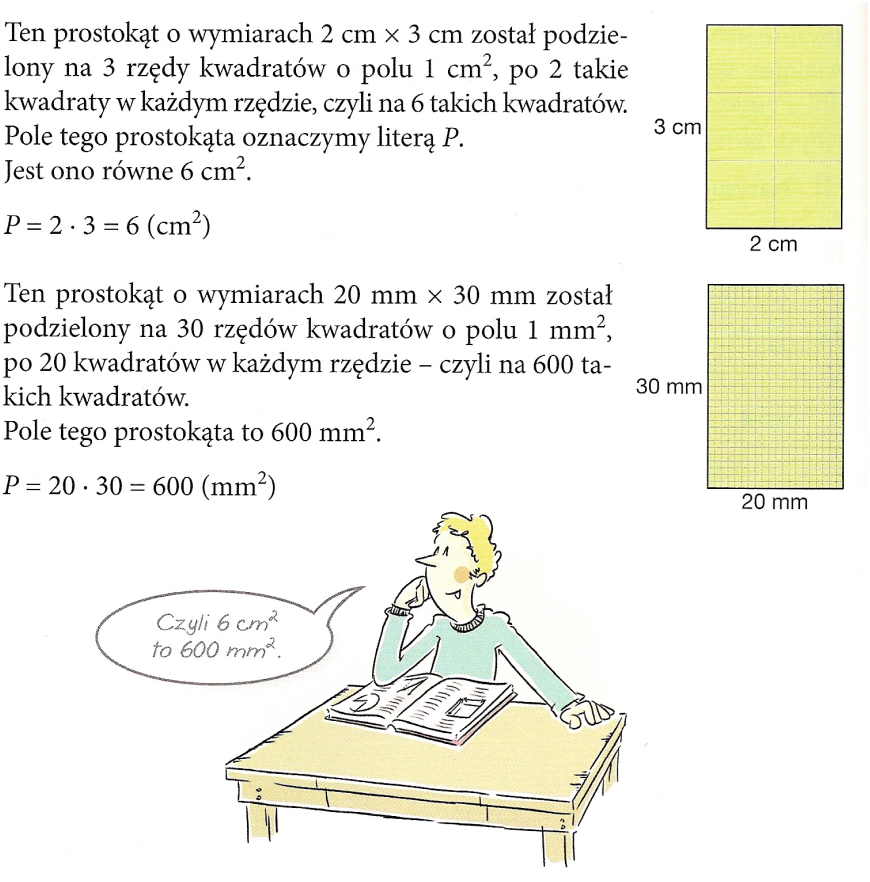
Głównym atutem wskazanej pracy licencjackiej jest jej empiryczny charakter. Dyplomantka zorganizowała i przeprowadziła badania dotyczące zagadnienia obliczania pola prostokąta przez uczniów klasy piątej szkoły podstawowej. Wątek badań empirycznych, cel, organizację i istotne – z punktu widzenia poruszanej w niniejszym artykule tematyki – wyniki badań zostały przybliżone w dalszej części artykułu. Autorzy tej publikacji chcieli zwrócić uwagę na to, że aby zapewnić odpowiedni poziom merytoryczny i dydaktyczny badań, studentka wcześniej dokonała analizy wybranych serii podręczników szkolnych. Taka analiza, to również forma pracy badawczej, jakże istotnej z punktu widzenia nauczania.

Aby uwypuklić znaczenie podręcznika w nauczaniu matematyki oraz podkreślić sens wykonywania przez dyplomantów analiz takich materiałów, w artykule omówiono istotne wyniki wykonanych analiz (zarówno autorki omawianej pracy

[2]Niepublikowana praca licencjacka przygotowana pod kierunkiem dr Lidii Zaręby w Uniwersytecie Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Archiwum UP w Krakowie.

licencjackiej, jak i autorów niniejszego artykułu). Zwrócono przy tym uwagę na proponowane przez autorów różnych podręczników szkolnych przejścia od wzoru na pole prostokąta o wymiarach naturalnych do wzoru na pole prostokąta o wymiarach wymiernych. W szczególności chodziło tu o kwestię uświadamiania uczącemu się możliwości zmiany zakresu liczb występujących w tym wzorze (wyrażających długości boków prostokąta); natomiast nie analizowano w tym miejscu spraw związanych z pojęciem jednostki pola (ustalaniem jednostki kwadratowej, wymierzaniem figur różnymi jednostkami).

Jednym z poddanych analizie podręczników do nauczania w klasach IV–VI szkoły podstawowej jest podręcznik do klasy czwartej serii *Matematyka z kluczem* (Braun, Mańkowska, Paszyńska, 2015). Wybrane treści, odnoszące się do omawianego tematu, ujęto na Rysunku 2. Autorzy wskazanego opracowania proponują rozpocząć od obliczania pola prostokąta, wyrażając je w różnych jednostkach. W obu sytuacjach obliczenia sprowadzają się do zauważenia, ile jest rzędów w prostokącie i ile jest w każdym takim rzędzie odpowiednich jednostek, a następnie do utworzenia iloczynu otrzymanych liczb.

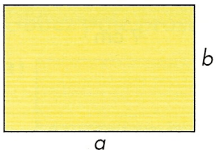


Rysunek 2. Matematyka z kluczem, kl. 4 (Braun i in., 2015, s. 150).

Tuż po tym wprowadzeniu znajduje się podsumowanie dotyczące sposobu obliczania pola prostokąta o bokach długości a, b (patrz: Rysunek 3). Po tych informacjach następuje seria zadań ćwiczeniowych na obliczanie pola prostokąta o podanych wymiarach. Zauważyć należy, że wymiary te są wyrażone liczbami naturalnymi.

Gdy boki prostokąta wyrażamy w centymetrach, to jego pole obliczymy w centymetrach kwadratowych. Gdy boki prostokąta wyrażamy w milimetrach, to jego pole obliczymy w milimetrach kwadratowych.

Pamiętaj – jeśli chcesz obliczyć pole prostokąta, to długości obu jego boków muszą być wyrażone w jednakowych jednostkach.



Pole P prostokąta o bokach a i b jest równe $a \cdot b$.

$$P = a \cdot b$$

Rysunek 3. Matematyka z kluczem, kl. 4 (Braun i in., 2015, s. 151).

Każdy dbający o rozwój swoich uczniów nauczyciel potraktuje przytoczone na rysunku 2 treści jako pomysł na zorganizowanie aktywności uczniów tak, by oni sami mogli odkryć przepis na wyrażenie pola odpowiedniego prostokąta. Wystarczy ukierunkować uczniów na sposób znajdowania liczby jednostek wypełniających prostokąt: liczbę rzędów i liczbę jednostek w każdym rzędzie. Warto zwrócić uwagę na to, że drugi przykład (dla prostokąta o wymiarach wyrażonych w milimetrach) także prowadzi do takiej samej procedury (mnożenia liczby rzędów przez liczbę odpowiednich jednostek w rzędzie). Wybór takiego samego prostokąta do znajdowania pola przy różnych jednostkach miał prawdopodobnie nie tylko zasygnalizować zagadnienia dotyczące wyrażenia pola figury w różnych jednostkach, ale także dać podstawy do obliczania i wyrażania (w klasie piątej) pól figur w tych samych jednostkach – nawet, jeśli długości boków prostokąta nie będą liczbami naturalnymi. Wątek ten rozwinięto w dalszej części artykułu (przy omawianiu treści ujętych w klasie piątej omawianego podręcznika).

Wniosek przytoczony na rysunku 3 może rodzić kontrowersje. Z jednej strony bowiem podany tam wzór jest prawdziwy, z drugiej strony może prowokować do błędnych interpretacji nie tyle uczniów (bo prawdopodobnie w tym momencie edukacyjnym, w kontekście wzoru na pole prostokąta, nie uświadamiają oni sobie istnienia innych liczb niż liczby naturalne), co studentów, czy początkujących nauczycieli. Podano bowiem ogólny przepis na obliczanie pola prostokąta bez informacji o tym, że długości a i b prostokąta wyrażone są liczbami naturalnymi. Z doświadczeń autorów artykułu wynika jednak, że częstym zjawiskiem jest nieuświadomienie sobie tego faktu przez studentów, którzy przygotowując swoje pierwsze lekcje, dobierają jako zadania ćwiczeniowe przykłady, w których długości boków wyrażone są liczbami wymiernymi. Takie zachowanie studentów świadczy z jednej strony o słabej znajomości programu, z drugiej zaś problem jest o wiele

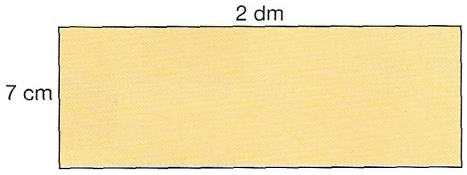
poważniejszy – studenci nie zdają sobie bowiem sprawy z tego, iż przedstawione w podręczniku rozumowanie nie uprawnia ich do stosowania twierdzenia przy zmienionych założeniach.

Przedstawiony na rysunku 3 wzór ogólny (w podręczniku do klasy czwartej), powtórzony w innej postaci w klasie piątej (Braun, Mańkowska, Paszyńska, 2014, patrz: rysunek 4) prowokować może piątoklasistów do stosowania go przy obliczaniu pola prostokąta również o wymiarach wymiernych. Taki rzeczywiście wydaje się zamysł autorów podręcznika.

Rysunek 4. Matematyka z kluczem, kl. 5 (Braun i in., 2014, s. 79).

Za punkt wyjścia przyjmują oni bowiem wprowadzony dla wymiarów naturalnych sposób obliczania pola prostokąta, stosują ten sposób również w nowej sytuacji, w której długości boków są liczbami wymiernymi (por. Rysunek 5).

Oblicz pole prostokąta o wymiarach podanych na rysunku.



Długości obu boków musimy przedstawić w tych samych jednostkach.

Można obliczać tak:	lub tak:
2 dm = 20 cm	7 cm = 0,7 dm
$P = 20 \cdot 7 = 140$ (cm^2)	$P = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4$ (dm^2)

Odp. Pole tego prostokąta wynosi 140 cm^2 (czyli 1,4 dm^2).

Rysunek 5. Matematyka z kluczem, kl. 5 (Braun i in., 2014, s. 80).

Oczywiście efekt w postaci korzystania ze wzoru przy szerszych założeniach będzie tym sposobem zrealizowany, jednak w opinii autorów niniejszego artykułu nie o kształcenie takiego rodzaju rozumowania u uczniów chodzi. Nieuświadomione uogólnienie wzoru (twierdzenia) może w przyszłości rodzić błędne intuicje u uczniów. Wiadomo bowiem, że nie wszystkie twierdzenia da się uogólnić (zastosować przy nowych, szerszych założeniach odnośnie zmiennych występujących w twierdzeniu).

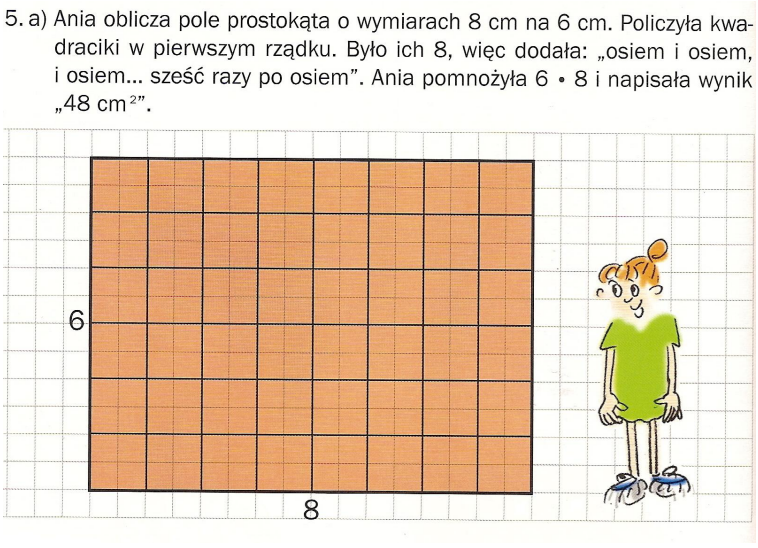
Warto, by nauczyciel zdawał sobie sprawę z opisanego tu podejścia i z wynikających z tego konsekwencji. Mając taką świadomość, może wykorzystać sytuację z rysunku 5, by zamieniając jednostki na mniejsze (w ujęciu matematyki wyższej – odpowiednio zagęszczając sieć) zastosować znany dla wymiarów naturalnych sposób obliczania pola prostokąta. W ten sposób znaleźć można pole prostokąta o wymiarach 2 dm i 7 cm wyrażone w mniejszej jednostce, tzn. $20 \cdot 7 = 140$ [cm^2]. Ponieważ każdy decymetr kwadratowy to 100 cm^2, dlatego pole tego samego prostokąta wyrażone w większej jednostce to $1,4$ dm^2. W wyniku obserwacji uczeń sam może dostrzec, że taki wynik uzyska, stosując do prostokąta o wymiarach 2 dm i $0,7$ dm podobną procedurę jak dla prostokątów o wymiarach naturalnych. Na kartach wskazanego podręcznika opisane rozumowanie dotyczy tylko jednej sytuacji, więc potrzebne jest takie zaangażowanie nauczyciela w pracę nad przedstawionym w podręczniku tekstem, by rozumowanie ucznia nie pozostawało w sprzeczności z metodą matematyczną. Znaczenie takiego podejścia podkreśla m.in. S. Turnau, pisząc:

> Źródło, z którego wypływa przekonanie o ogólnej prawdziwości twierdzenia, nie musi mieć zawsze charakteru zbliżonego do matematycznego dowodu. Daleko ważniejsze jest, by przekonanie to było głębokie i pełne. Wystarczy, by uczeń dostrzegł na dobrze dobranym przykładzie paradygmatycznym, że „tak musi być zawsze" (Turnau, 1978, s. 119).

Różnica w obu zaprezentowanych podejściach jest istotna – w jednym ujęciu widać automatyczne stosowanie wzoru dla nowych danych, w drugim ujęciu jest miejsce na refleksję dotyczącą tych nowych zmiennych. Oczywiście, opisane przejście bazujące na zamianie jednostek można pominąć, jednak komentarz, iż to twierdzenie (wzór na pole prostokąta o wymiarach naturalnych) stosować można także dla prostokątów o wymiarach wymiernych jest niezbędny dla poprawnego kształtowania metody matematycznej. Wystarczy, by uczeń miał sygnał, że w danym momencie ma do czynienia z danymi liczbowymi innego zakresu oraz dla tych nowych danych sposób obliczania pola prostokąta nie ulegnie zmianie. Zrozumienie uzasadnienia tego faktu, ze względu na terminologię matematyczną, może być zbyt trudne dla ucznia szkoły podstawowej (twierdzenie ogólniejsze z nowymi założeniami nie zawsze musi być prawdziwe). Wystarczy jednak, zdaniem autorów, by uczeń miał czytelny sygnał od nauczyciela, że w danym momencie ma do czynienia z danymi liczbowymi innego zakresu oraz dla tych nowych danych sposób obliczania pola prostokąta nie ulegnie zmianie.

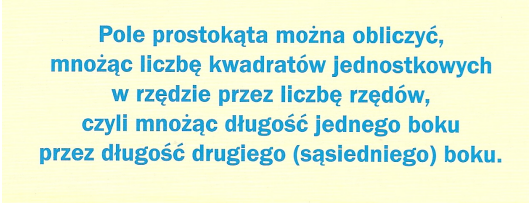
Inne ujęcie dydaktyczne wypływa z kart podręczników serii *Matematyka dla Ciebie* (Ciosek, Legutko, Turnau, Urbańska, 2005a, 2005b). Tu autorzy podręczni-

ka wyraźnie uwypuklają pojęciowe rozumienie[3] pola prostokąta, zwracając uwagę na sposób zliczania jednostek, które całkowicie wypełniają prostokąt (patrz: rysunek 6).



Rysunek 6. Matematyka dla Ciebie, kl. 4 (Ciosek i in., 2005a, s. 130).

Podsumowaniem tego rozumowania jest opis słowny formuły (patrz: rysunek 7). W opisie tym jest mowa o mnożeniu długości boków prostokąta, jednak wydaje się, że zaakcentowano tutaj pierwszą część zdania, czyli mnożenie liczby kwadratów jednostkowych w rzędzie przez liczbę rzędów (z uwagi na to, co reprezentują mnożone liczby, formuła kojarzy się z liczbami naturalnymi). Druga część zdania wydaje się jedynie uzmysławiać, że mnożone liczby wyrażają długości boków.

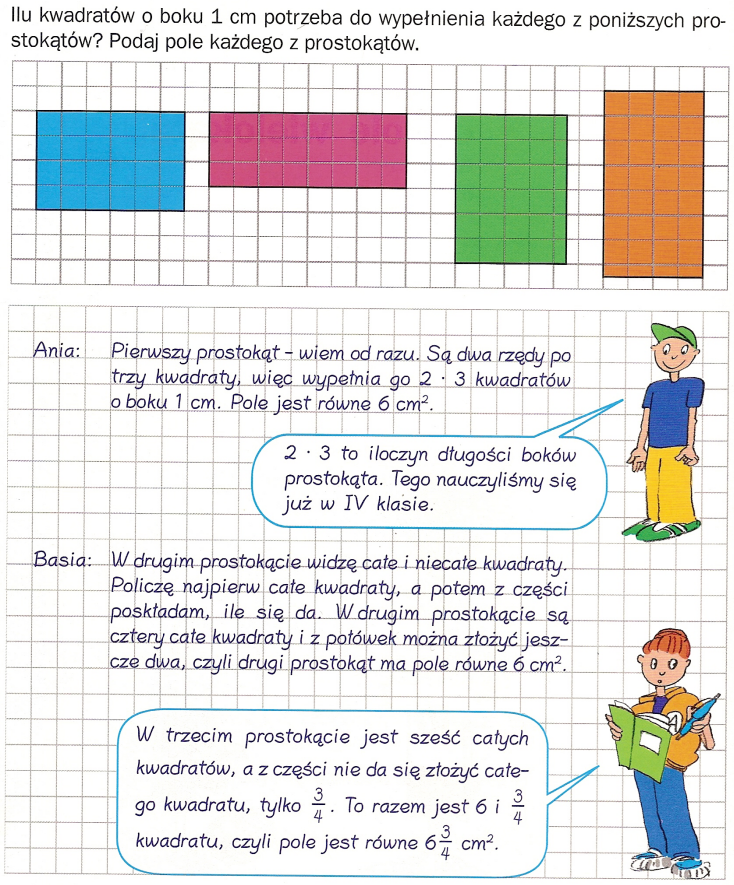


Rysunek 7. Matematyka dla Ciebie, kl. 4 (Ciosek i in., 2005a, s. 132).

Do wzoru na pole prostokąta autorzy powracają w podręczniku do klasy piątej (patrz: Rysunki 8 i 9). Poprzez odpowiedni dobór wymiarów prostokątów stwarzają uczniowi okazję do tego, by nie tylko przypomniał sobie istotę tego wzoru (znajdowanie liczby kwadratów, które są potrzebne do wypełnienia odpowiedniego prostokąta), ale i przekonał się, dlaczego z takiego samego wzoru może korzystać

[3]Rozumienie pojęciowe wiąże się z rozumieniem tego, że dla znalezienia pola prostokąta należy znaleźć liczbę jednostek (kwadratów) całkowicie wypełniających figurę; rozumienie algorytmiczne zaś oznacza utożsamianie obliczania pola prostokąta tylko z procedurą zawartego we wzorze mnożenia $a \cdot b$.

przy długościach boków wyrażonych liczbami wymiernymi. Przykład pierwszego prostokąta (o wymiarach 2 cm× 3 cm) daje sposobność przypomnienia poznanego w klasie czwartej sposobu obliczania pola prostokąta (jako iloczynu długości boków prostokąta). W sytuacji drugiego prostokąta ($1,5$ cm $\times$ 4 cm) autorzy podręcznika kierują uwagę ucznia na pojęciowe rozumienie pola, pole prostokąta w tym przypadku jest liczbą całych oraz „poskładanych" kwadratów mieszczących się w prostokącie. Podobnie wygląda sytuacja dla dwóch kolejnych prostokątów (3 cm $\times$ 2 cm i $3\frac{3}{4}$ cm $\times$ 2 cm).



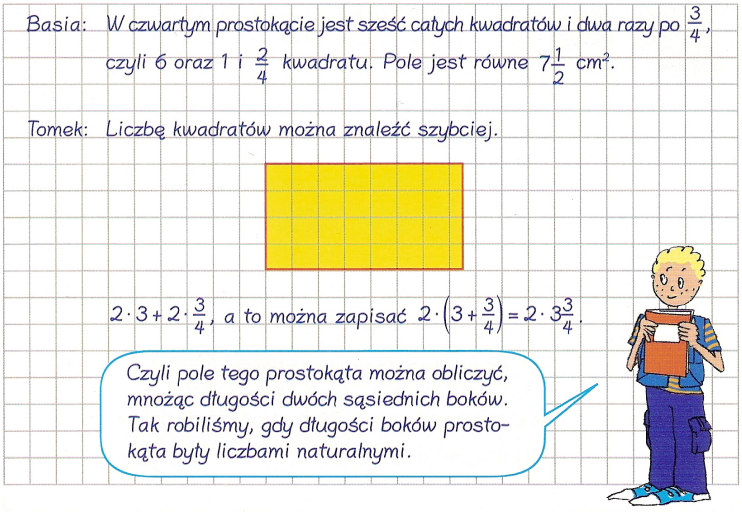
Rysunek 8. Matematyka dla Ciebie, kl. 5 (Ciosek i in., 2005b, s. 194).

Ostatni przypadek (patrz: Rysunek 9) autorzy podręcznika wykorzystują do płynnego przejścia od pojęciowego ujęcia pola prostokąta (zliczania „kawałkami" ile jest kwadratów jednostkowych wypełniających prostokąt) do ujęcia algorytmicznego (pole prostokąta z rysunku jako iloczyn długości jego boków) i – co istotne – w przypadku, gdy długości boków prostokąta nie są już wyrażone liczbami naturalnymi. Prostokąt ma co prawda tylko jeden bok o długości wyrażonej ułamkiem, ale i tak ukazuje to sposób postępowania w sytuacji dowolnego prostokąta o tego typu wymiarach. Na jakiekolwiek liczby wymierne zmienimy teraz długości bo-

ków tego prostokąta, metoda postępowania pozostanie taka sama i doprowadzi do iloczynu długości boków prostokąta. Przykładowo, dla prostokąta o wymiarach 3 cm $\times$ $2\frac{1}{4}$ cm rachunek będzie następujący:

$$3 \cdot 2 + 3\tfrac{1}{4} = 3 \cdot (2 + \tfrac{1}{4}) = 3 \cdot 2\tfrac{1}{4}.$$

Zastosowana tutaj metoda (*uzmienniania stałych*) jest niewątpliwie lepszym rozwiązaniem metodologicznym niż przemilczenie faktu, iż znany dla wymiarów naturalnych wzór na pole prostokąta stosować można także w przypadku prostokątów, których długości boków są liczbami wymiernymi.



Rysunek 9. Matematyka dla Ciebie, kl. 5 (Ciosek i in., 2005b, s. 195).

4. Pole prostokąta w ujęciu empirycznym

Świadomość zaprezentowanego w poprzednim paragrafie problemu była istotnym elementem merytorycznego przygotowania autorki prezentowanej w artykule pracy dyplomowej do podjęcia prób badawczych. To dzięki zgłębieniu – od strony teoretycznej i dydaktycznej – zagadnień związanych z wprowadzaniem wzoru na obliczanie pola prostokąta studentka wypracowała – pod kierunkiem promotora – własną koncepcję badań empirycznych. Celem badań, adresowanych do grupy uczniów piątej klasy szkoły podstawowej, było (por. Koszyk, 2012) między innymi:

- **zbadanie intuicji badanych w zakresie sposobu obliczania pola prostokąta w nowej dla nich sytuacji, tzn. w przypadku prostokąta o wymiarach wymiernych** (uczniowie dysponowali, wprowadzonym w klasie czwartej, wzorem na pole prostokąta o wymiarach będących liczbami naturalnymi),
- **sprawdzenie czy stosowanie przez uczniów wzoru na pole prostokąta wiąże się z rozumieniem przez nich tego wzoru w sposób pojęciowy czy w sposób algorytmiczny** (rozumienie pojęciowe wiąże się

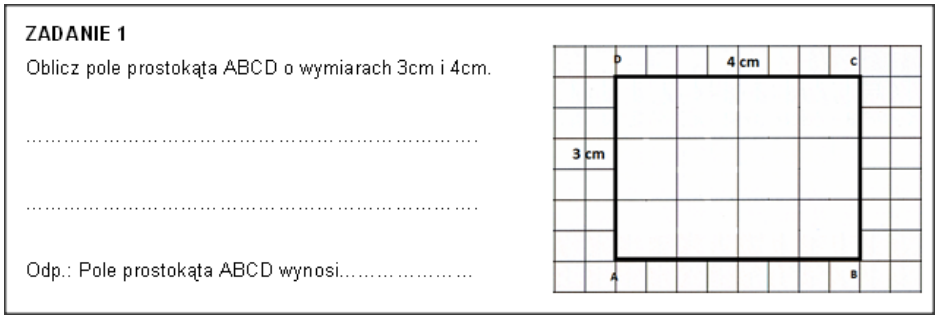
z rozumieniem pola prostokąta jako liczby kwadratów całkowicie wypełniających figurę; rozumienie algorytmiczne oznacza utożsamianie pola prostokąta tylko z wynikiem liczbowym zawartej we wzorze na pole prostokąta procedury mnożenia długości jego boków $a \cdot b$),

- **ukierunkowanie aktywności uczniów na takie działanie, które pomoże im dostrzec (w wyniku aktywności uogólniania) słuszność stosowania poznanego wzoru na pole prostokąta o wymiarach naturalnych także w sytuacji wymiarów wymiernych.**

Autorka zaplanowała i przeprowadziła lekcję, w czasie której uczniowie między innymi rozwiązywali specjalnie skonstruowane przez dyplomantkę zadania. Ich układ miał doprowadzić do realizacji celu trzeciego. Analiza przedstawionych przez 20 uczniów rozwiązań zadań miała pomóc w rozstrzygnięciu kwestii ujętych w dwóch pierwszych celach. Aby analiza była bardziej wiarygodna i miarodajna, studentka nagrywała lekcję za pomocą dyktafonu, korzystała również z uwag i spostrzeżeń przekazanych przez nauczycielkę, pod opieką której prowadziła lekcję. Warto podkreślić, aby możliwa była realizacja postawionych celów, konstrukcja zadań wymagała od autorki nie tylko odpowiedniego przygotowania merytorycznego, lecz również wnikliwej analizy podstawy programowej oraz programu realizowanego przez nauczyciela uczącego badanych uczniów.

Poniżej zaprezentowano jedynie wybrane zadania pochodzące z zastosowanej podczas lekcji karty pracy. Celem niniejszego artykułu jest bowiem tylko przybliżenie tematyki badań, którymi zajęła się studentka w ramach swojej próby badawczej z zakresu dydaktyki matematyki, a nie dokładne zreferowanie tej próby.

Aby zbadać intuicje uczniów w kontekście obliczania pola prostokąta w nowej dla nich sytuacji tzn. w przypadku długości boków wyrażonych liczbami wymiernymi, przed przypomnieniem realizowanych w klasie czwartej zagadnień dotyczących pola, autorka poleciła uczniom rozwiązanie dwóch „zadań wstępnych" zawartych w przygotowanej przez nią karcie pracy (patrz: zadania 1 i 2, rysunki 10 i 11)[4].



Rysunek 10.

[4]Rysunki prostokątów zamieszonych w kartach sporządzone zostały na sieci kwadratowej oddającej ich autentyczne wymiary.

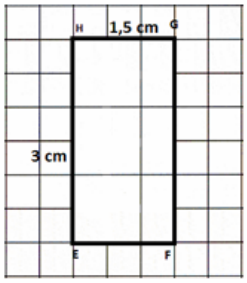
ZADANIE 2

Jak byś obliczył pole prostokąta EFGH o wymiarach 3cm i 1,5cm?

.....

.....

.....



Rysunek 11.

ZADANIE 1

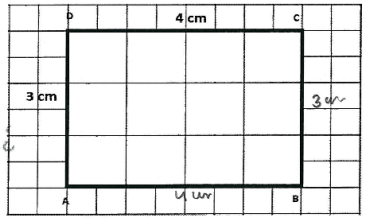
Oblicz pole prostokąta ABCD o wymiarach 3cm i 4cm.

3·4+3·4=12+12

= 24

Długość razy szerokość

Odp.: Pole prostokąta ABCD wynosi 24

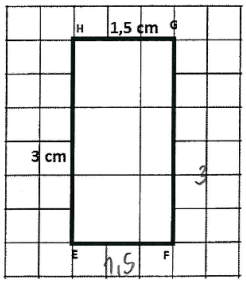


ZADANIE 2

Jak byś obliczył pole prostokąta EFGH o wymiarach 3cm i 1,5cm?

3·1,5cm + 3·1,5 = 45+45 = 90

Długość razy szerokość



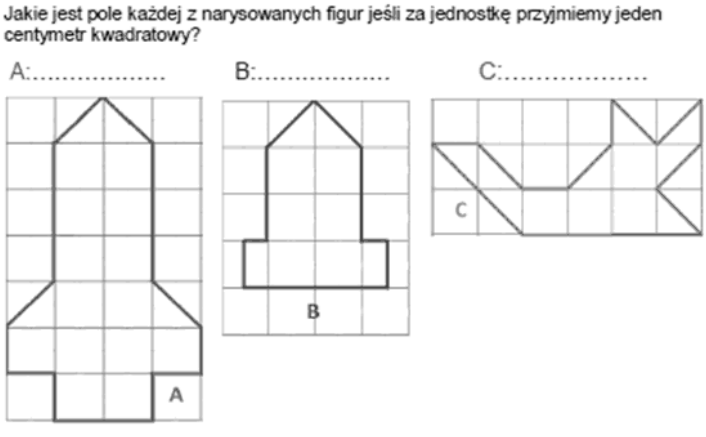
Rysunek 12.

Analiza uczniowskich rozwiązań tych dwóch zadań dała studentce możliwość zaobserwowania faktu, że uczniowie nie mieli barier w stosowaniu znanego wzoru w nowej dla nich sytuacji. Większość, bo 15 spośród 20 badanych, poprawnie zapisywała obliczenia[5] w zadaniu 1 ($3 \cdot 4 = 12$) oraz w zadaniu 2 ($1,5 \cdot 3 = 14,5$). Dodatkowo, uczniowie notowali wzór, z którego korzystali; najczęściej były to zapisy postaci: „szerokość × długość" lub „szerokość razy długość". Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na cenne spostrzeżenie autorki: przenoszenie rozumowania z sytuacji znanej uczniowi do sytuacji nowej (choć bez świadomości ucznia, że

[5]Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że zapisy w pracach uczniów nie zawsze są w pełni poprawne; rozwiązujący raz zapisują jednostki, innym razem nie, stawiają znak równości między wyrażeniami z mianami i bez nich. Analiza takich prac uczniów była jednak prowadzona z innego punktu widzenia, ukierunkowana była na inny cel; poprawność tego zapisu nie była zatem w tym momencie brana pod uwagę.

sytuacja jest dla niego nowa) miało miejsce również w pracach, w których zastosowano niepoprawny wzór na pole prostokąta w sytuacji wymiarów naturalnych. Uczniowie mylili wzór na pole prostokąta ze wzorem na jego obwód (np. zapisując obliczenia do zadania 1 w postaci: $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 6 + 8 = 14$ cm) bądź stosowali „kombinację" obu wzorów (patrz: rysunek 12). Obie sytuacje pozwalają „doświadczyć" kolejnego istotnego problemu w edukacji szkolnej – trudności związanych z rozumieniem pojęć: obwodu prostokąta i jego pola oraz konsekwencji tych trudności, tj. błędów uczniów w stosowaniu wzorów. Przyczyn takich błędów można upatrywać nie tylko w braku rozumienia przez uczniów obu pojęć, mogą być one także efektem algorytmicznego podejścia do zagadnień miarowych. Próba rozpoznania charakteru prowadzonego w tym zakresie rozumowania uczniów (pojęciowego lub algorytmicznego) była jednym z celów pracy studentki. Interesujące jest jej doświadczenie związane z realizacją tego celu. Aby przybliżyć i uzasadnić wnioski autorki w zakresie stosowanego podczas pracy uczniów rozumowania (pojęciowego lub algorytmicznego), warto najpierw przyjrzeć się propozycji dydaktycznej zmierzającej do uogólnienia wzoru na pole prostokąta (od wymiarów naturalnych do wymiarów wymiernych). Ponieważ propozycja dyplomantki jest rozbudowana, w artykule ograniczono się jedynie do wybranych zadań tej propozycji[6].

Ważne z punktu widzenia prowokowania uczniów do uogólniania były zadania, w których chodziło o to, by uczeń – rozwiązując je – zauważył, że iloczyn długości dwóch sąsiednich boków prostokąta (niezależnie od tego czy są one liczbami naturalnymi czy wymiernymi) daje taki sam wynik jak wymierzanie figury odpowiednimi jednostkami. Aby odwołanie do czynności wymierzania figury stosowną jednostką było możliwe, autorka poprzedziła omówione dalej zadania 3–7 poleceniem znalezienia pola figur o różnych nietypowych kształtach (patrz: rysunek 13).

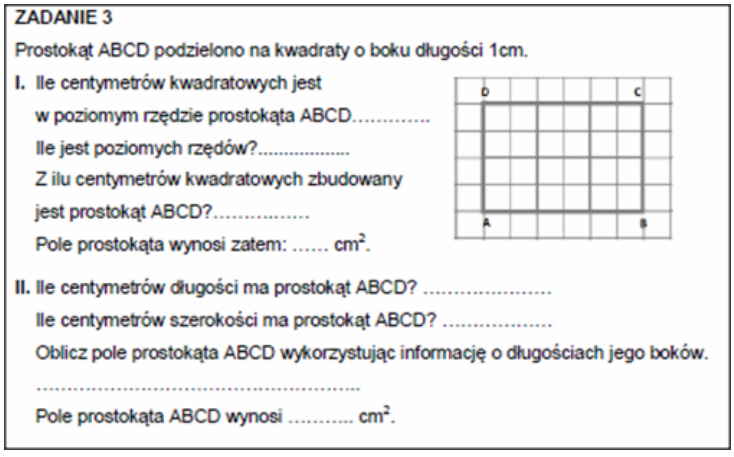


Rysunek 13.

W zaproponowanym cyklu zadań studentka dała wyraz swoim przemyśleniom pozyskanym w drodze analizy podręczników. Każde z zadań pełni istotną rolę w propozycji autorki. Dla przykładu, zadanie 3 (patrz: Rysunek 14) miało sprowokować

[6]Podane w dalszym ciągu artykułu zadania o numerach 3–7 pochodzą z innej karty pracy niż zaprezentowane wcześniej, a pochodzące z karty wstępnej, zadania 1–2.

ucznia do przypomnienia sobie dwóch dróg prowadzących do znalezienia pola prostokąta o wymiarach naturalnych: zliczania centymetrów kwadratowych wypełniających prostokąt $ABCD$ oraz zastosowania odpowiedniego wzoru.



ZADANIE 3

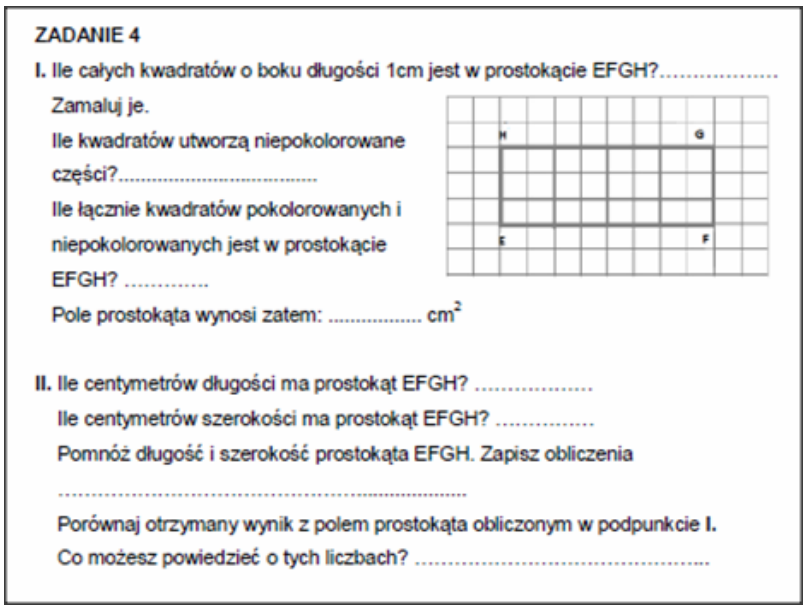
Prostokąt ABCD podzielono na kwadraty o boku długości 1cm.

I. Ile centymetrów kwadratowych jest w poziomym rzędzie prostokąta ABCD.....
Ile jest poziomych rzędów?.....
Z ilu centymetrów kwadratowych zbudowany jest prostokąt ABCD?.....
Pole prostokąta wynosi zatem: ..... cm^2.

II. Ile centymetrów długości ma prostokąt ABCD? .....
Ile centymetrów szerokości ma prostokąt ABCD? .....
Oblicz pole prostokąta ABCD wykorzystując informację o długościach jego boków.
.....
Pole prostokąta ABCD wynosi ..... cm^2.

Rysunek 14.

Zadanie 4 (patrz: rysunek 15) dotyczy już pola prostokąta, w którym jego szerokość wyraża się liczbą wymierną. Cenne jest zwrócenie uwagi uczniów na ten fakt, co autorka uczyniła, zamieszczając w karcie pracy, pomiędzy zadaniem 3 a zadaniem 4, tekst (odnoszący się do prostokąta z zadania 3): *Długości boków narysowanego prostokąta ABCD są liczbami naturalnymi. A jak obliczyć pole prostokąta o wymiarach 1,5 cm i 4 cm? Dowiemy się tego za chwilę.*



ZADANIE 4

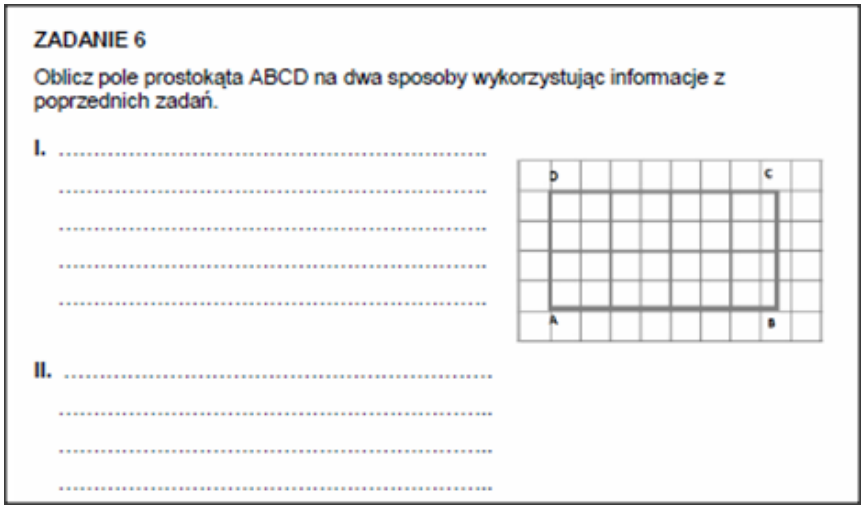
I. Ile całych kwadratów o boku długości 1cm jest w prostokącie EFGH?.....
Zamaluj je.
Ile kwadratów utworzą niepokolorowane części?.....
Ile łącznie kwadratów pokolorowanych i niepokolorowanych jest w prostokącie EFGH? .....
Pole prostokąta wynosi zatem: ..... cm^2

II. Ile centymetrów długości ma prostokąt EFGH? .....
Ile centymetrów szerokości ma prostokąt EFGH? .....
Pomnóż długość i szerokość prostokąta EFGH. Zapisz obliczenia
.....
Porównaj otrzymany wynik z polem prostokąta obliczonym w podpunkcie I.
Co możesz powiedzieć o tych liczbach? .....

Rysunek 15.

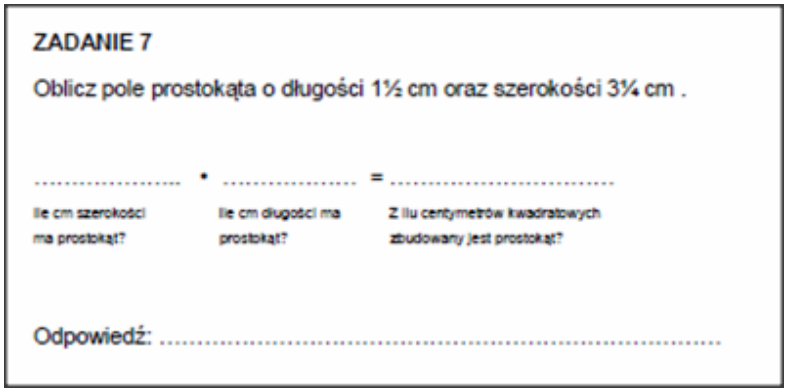
Polecenie porównania liczb otrzymanych dwoma sposobami miało skierować uwagę ucznia na to, że w nowej sytuacji iloczyn długości dwóch sąsiednich boków prostokąta daje taki sam wynik jak znajdowanie liczby centymetrów kwadratowych wypełniających dany prostokąt. Taki sam cel przyświecał niecytowanemu tu zadaniu 5; jego budowa była analogiczna do zadania 4. Różnica tkwiła jedynie w doborze prostokąta, który miał wymiary 3 cm $\times$ $2\frac{1}{4}$ cm.

W zadaniu 6 (patrz: rysunek 16) należało obliczyć pole prostokąta o wymiarach 2 cm $\times$ $3\frac{3}{4}$ cm. Głównym celem tego zadania było sprawdzenie stopnia opanowania przez ucznia przedstawionych wcześniej dwóch sposobów obliczania pola prostokąta, jednak już bez wykorzystania tekstu sterującego.



Rysunek 16.

Ostatnim zadaniem, na które warto zwrócić uwagę, jest zadanie 7 (patrz: rysunek 17). Miało być ono pomocne w doprowadzeniu uczniów do zapisania pola odpowiedniego prostokąta w postaci iloczynu $1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$. W tym, na pozór oczywistym zadaniu, widoczne są kolejne przemyślenia autorki – nie chcąc dopuścić do sytu-

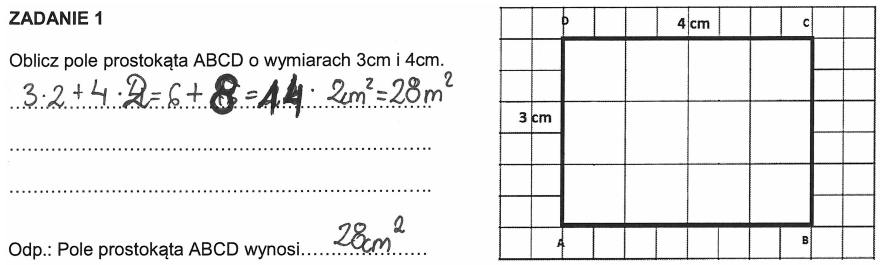


Rysunek 17.

acji mnożenia przez siebie wyrażeń mianowanych (z matematycznego punktu widzenia mnożenie jest funkcją określoną na iloczynie kartezjańskim zbiorów liczbowych), zastosowała zabieg uzupełniania liczbami odpowiednio podpisanych miejsc (np. *Ile cm szerokości ma prostokąt?*). Zaproponowane przez dyplomantkę całościowe podejście do omawianego zagadnienia świadczy o dojrzałości matematycznej studentki. Widoczny jest przejaw troski o rozwój warsztatu pracy nauczyciela oraz o odpowiednie kształtowanie matematycznej metody w umyśle ucznia. Ważne, że w swojej propozycji dydaktycznej uwzględniła istotny w uczeniu się element – refleksję towarzyszącą zmianie warunków matematycznej sytuacji (założeń twierdzenia) i ocenę prawdziwości tezy w tej nowej sytuacji.

Przedstawiona przez studentkę propozycja dydaktyczna miała w zamierzeniu autorki nie tylko sprowokować uczniów do uogólnienia w zakresie stosowania wzoru dotyczącego pola prostokąta (od wymiarów naturalnych do wymiarów wymiernych). Miała ona również pomóc w rozpoznaniu czy stosowanie przez uczniów wzoru na pole prostokąta wiąże się z rozumieniem przez nich tego wzoru w sposób pojęciowy czy w sposób algorytmiczny. W dalszej części artykułu zwrócono uwagę na realizację tego celu, a także na wyniki analizy przeprowadzonej przez studentkę oraz korzyści płynące z takiego badania empirycznego.

Sposób rozwiązania przez ucznia zadań 1, 2, 5 i 6 miał dostarczyć informacji o tym, czy badany postępuje algorytmicznie i jedynie podstawia liczby będące długościami boków prostokąta do odpowiedniego wzoru, czy może skupia się na istocie pojęciowego rozumienia pola figury – w przedstawionej tu sytuacji na zliczaniu centymetrów kwadratowych. Warto zauważyć, że przy pojęciowym podejściu do pola prostokąta, zadania 1 i 2 („karty wstępnej") są w jednakowym stopniu dostępne uczniom i uprawnione do stosowania. Jest tak, pomimo że w zadaniu 2 sytuacja jest dla uczniów nowa, bo dotyczy wymiarów wymiernych.

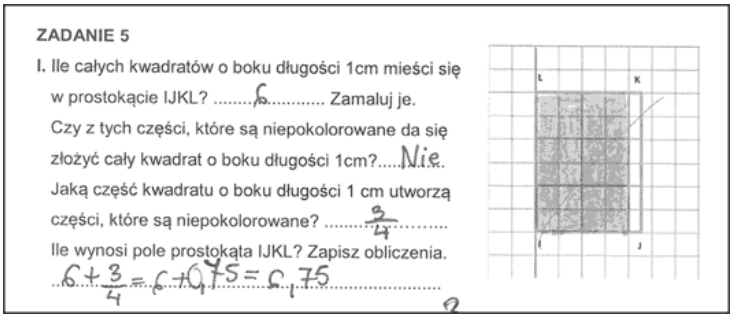


Rysunek 18.

Jak wykazała przeprowadzona przez studentkę analiza rozwiązań zadań 1 i 2, wszyscy uczniowie (20 badanych) do obliczania pól prostokątów podchodzili w sposób algorytmiczny, 15 spośród nich stosowało właściwy wzór pozwalający obliczyć pole prostokąta, pozostałych 5 uczniów myliło ten wzór ze wzorem na obwód prostokąta, bądź tworzyli oni „zlepek" obu wzorów. Tym samym pokazali, że nie rozumieją oni istoty stosowanego wzoru. Naturalnym wydawała się hipoteza studentki, iż stosowanie błędnych wzorów jest efektem rozumowania uczniów jedynie w sposób algorytmiczny. Hipoteza taka okazała się jednak zbyt powierzchowna, głębsza analiza prac uczniów dała studentce podstawy do obalenia tego

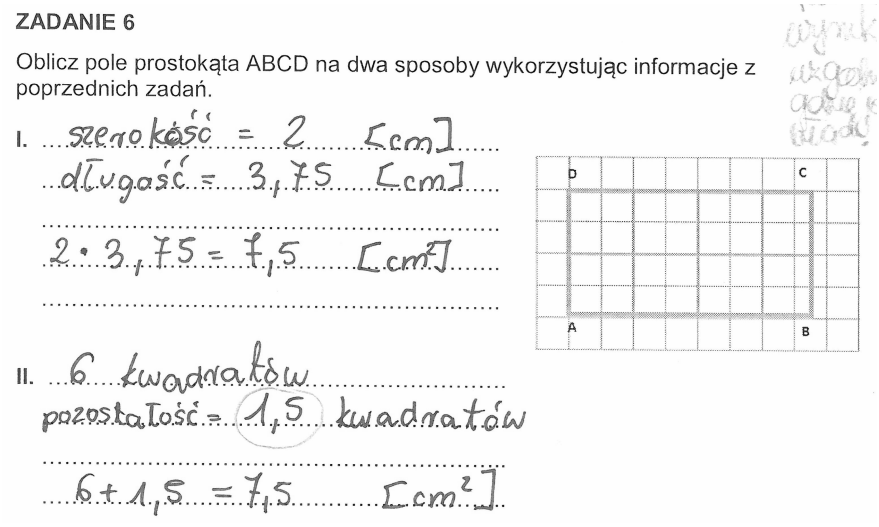
przypuszczenia. Autorka przedstawiła analizę rozwiązań wszystkich zadań 1–6 jednej z badanych osób. Uczennica, rozwiązując zadanie 1, pomyliła pole z obwodem prostokąta (patrz: rysunek 18), który z kolei obliczyła nieprawidłowo.

Wydawać by się mogło, że rozumowanie badanej przejawia charakter rozumowania algorytmicznego, tymczasem zaprezentowane przez uczennicę rozwiązania kolejnych zadań (z propozycji dydaktycznej) sugerują pojęciowe rozumowanie badanej w zakresie pola prostokąta. To odkrycie studentki najlepiej wyrażają jej własne słowa odnoszące się do Rysunków 19 i 20: „Zaprezentowane poniżej rozwiązania zadania 5 i 6 są dla mnie zaskakujące, ponieważ założyłam[7], że badana nie rozumie pojęcia pola prostokąta" (Koszyk, 2012, s. 38).


ZADANIE 5

I. Ile całych kwadratów o boku długości 1cm mieści się w prostokącie IJKL? ...6... Zamaluj je.
Czy z tych części, które są niepokolorowane da się złożyć cały kwadrat o boku długości 1cm?...Nie.
Jaką część kwadratu o boku długości 1 cm utworzą części, które są niepokolorowane? ...$\frac{3}{4}$...
Ile wynosi pole prostokąta IJKL? Zapisz obliczenia.
$6+\frac{3}{4}=6+0{,}75=6{,}75$

Rysunek 19.


ZADANIE 6

Oblicz pole prostokąta ABCD na dwa sposoby wykorzystując informacje z poprzednich zadań.

I. szerokość = 2 [cm]
długość = 3,75 [cm]
$2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5$ [cm²]

II. 6 kwadratów
pozostałość = 1,5 kwadratów
$6 + 1{,}5 = 7{,}5$ [cm²]

Rysunek 20.

Odkrycie to zaskoczyło studentkę, która uświadomiła sobie, że uczeń może rozumieć pojęcie pola prostokąta (potrafi rozumować pojęciowo), tymczasem wprowadzenie wzoru na pole tej figury (a być może dłuższe nim operowanie) eliminuje tę

[7]Studentka sformułowała taką hipotezę po analizie przedstawionych przez uczennicę rozwiązań zadań 1 i 2 „karty wstępnej".

sferę rozumowania. Uczeń jest prawdopodobnie nastawiony na stosowanie pewnego algorytmu i jego aktywność sprowadza się do odtworzenia wzoru (niekoniecznie w poprawny sposób), bez weryfikacji w kontekście rozumienia samego pojęcia pola, „bez rzutu oka wstecz", a więc z wyłączeniem rozumowania pojęciowego.

Oczywiście, przyczyn takiego stanu rzeczy można upatrywać w tym, że zadania 1 i 2 były zadaniami poprzedzającymi cykl zadań mających na celu przypomnienie (co było zrobione dopiero w zadaniach 3 i 4) dwóch sposobów obliczania pola prostokąta (jako liczba jednostek całkowicie wypełniających figurę i jako iloczyn długości boków prostokąta). Uczennica (autorka rozwiązań zadań z rysunków 19 i 20) miała więc okazję – już po rozwiązaniu zadań 1 i 2, w których należało obliczyć pola prostokątów, korzystając z posiadanej wiedzy – przypomnieć sobie oba wspomniane sposoby obliczania pola prostokąta. Warto jednak uświadomić sobie fakt, że podobne zabiegi (kształtujące oba sposoby rozumienia pola prostokąta) były stosowane w klasie czwartej. Ich uwieńczeniem było wprowadzenie wzoru na pole prostokąta. To, że w kolejnym roku nauki uczeń postawiony w sytuacji obliczania pola prostokąta sięga do wzoru, którego nie pamięta bądź nie przyswoił sobie ze zrozumieniem, a jednocześnie nie odwołuje się do istoty pojęcia, jest sygnałem niepokojącym.

Równie niepokojące wydają się takie zaobserwowane przez studentkę sytuacje, w których uczeń, podczas całej swojej pracy, wykazuje się umiejętnością stosowania wzoru, nie rozumie zaś istoty pojęcia pola prostokąta. Świadczy o tym rozwiązanie ucznia ujęte na rysunku 21.

ZADANIE 5

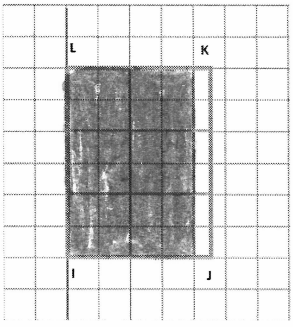
I. Ile całych kwadratów o boku długości 1cm mieści się w prostokącie IJKL? ..... 6 ..... Zamaluj je.

Czy z tych części, które są niepokolorowane da się złożyć cały kwadrat o boku długości 1cm?... Nie ...

Jaką część kwadratu o boku długości 1 cm utworzą części, które są niepokolorowane? ... $\frac{3}{4}$ .....

Ile wynosi pole prostokąta IJKL? Zapisz obliczenia.

$6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4}$



II. Ile centymetrów długości ma prostokąt IJKL?... 3 .....

A ile centymetrów szerokości ma prostokąt IJKL?... $2\frac{1}{4}$ .....

Pomnóż długość i szerokość prostokąta IJKL. Zapisz obliczenia.

$3 \cdot 2\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$

Porównaj otrzymany wynik z polem prostokąta obliczonym w podpunkcie **I.**

Co możesz powiedzieć o tych liczbach? ... Są różne .....

Rysunek 21.

Zdaniem autorów artykułu, przyczyn tego rodzaju błędów można szukać na wielu płaszczyznach. Niewątpliwie jednak cennym jest w takiej sytuacji powrócić do

analizy podręcznika, z którego autorzy tego rodzaju błędów korzystają i podjąć refleksję nad tym, czy układ, zakres treści nie są źródłem błędnej interpretacji ze strony ucznia czy nauczyciela. Warto tu przywołać słowa S. Turnaua wypowiedziane w kontekście odpowiedniej budowy podręcznika: „Reguły (definicje, twierdzenia, algorytmy) powinny być wprowadzane po długiej sekwencji zadań rozwiązywanych pojęciowo" (Turnau, 1978; za: Legutko, 2001, s. 19).

5. Wnioski

Misją wyższych uczelni o profilu pedagogicznym jest przygotowanie wysoko wykwalifikowanych nauczycieli. Wśród zakładanych do osiągnięcia przez absolwentów efektów kształcenia wymienić można między innymi wprowadzanie studentów w badania naukowe służące rozwojowi edukacji. Do realizacji takiego zadania w znacznym stopniu przyczyniać się może przygotowywanie przez studentów pracy dyplomowej z dydaktyki matematyki. Do tego, aby student – przyszły nauczyciel – uzyskał pełne wykształcenia zawodowe, niezbędne jest bowiem postawienie go w roli badacza, który z jednej strony musi przygotować się merytorycznie (dzięki zgłębianiu literatury matematycznej, podstawy programowej i podręczników szkolnych), z drugiej zaś zaplanować badania i zabiegi dydaktyczne prowokujące uczniów do adekwatnych dla wyznaczonego celu aktywności matematycznych. Istotną jest tu rola promotora, który dyskretnie udziela studentowi pomocy, prowokując do dyskusji, sugerując lekturę stosowną do tematu, ogólnie – ukierunkowując jego aktywność w taki sposób, by mógł podjąć i przemyśleć problemy, które w przyszłości będzie być może napotykał w swojej pracy. Możliwość takiej współpracy, to ważny element dla rozwoju studenta, jako młodego człowieka i zarazem przyszłego nauczyciela.

Już na przykładzie omówionych w artykule fragmentów pracy dyplomowej można dostrzec korzyści, jakie daje studentowi przygotowanie tego typu pracy z dydaktyki matematyki. Mając oczywiście na uwadze wybrany temat tej pracy, można – w zależności od jej celów i poruszanej problematyki – wskazać różne pozytywne aspekty działalności dyplomantów.

Wydawać by się mogło, że wystarczająca dla merytorycznego przygotowania nauczyciela jest wiedza z zakresu rozumienia pojęć czy twierdzeń matematyki wyższej (w przypadku tematyki omawianej pracy licencjackiej wiedza ta odnosi się do pojęcia pola figury ograniczonej). Tak jednak nie jest, co łatwo sobie uświadomić, porównując choćby język i zasób innych pojęć potrzebnych do wprowadzenia pojęcia pola – na różnych poziomach nauczania. Wszelkie materiały dydaktyczne, w tym podręczniki do nauczania matematyki, służą nauczycielowi jako pomoc w organizowaniu aktywności ucznia tak, by mógł on opanować określone treści. Jak pisze S. Turnau:

> Twierdzenia, a więc ogólne własności pojęć, ich relacje, związki między operacjami, powinny być przez ucznia odkrywane w toku jego własnej aktywności, lub współodkrywane w toku lektury, nie zaś poznawane jako gotowe elementy wiedzy (Turnau, 1978, s. 119).

Zatem jest rzeczą naturalną wykorzystywanie wypracowanych już materiałów; to z kolei wymaga od nauczyciela zrozumienia idei przyświecającej autorom danego

podręcznika. Z drugiej strony nie wystarczy zapoznać się ze sposobem wprowadzania w dane zagadnienie. Niejednokrotnie bowiem podejmowane analizy podręczników wskazywały na to, że prezentowane w nich ujęcie tematu prowadzi uczniów do błędnych intuicji. Tak więc podejmując się analizy podręczników, nie chodzi jedynie o zapoznanie się z tematem, chodzi tu również, a może przede wszystkim, o własne, krytyczne i konstruktywne podejście do wybranego ujęcia tematu oraz o właściwe interpretowanie tekstu podręcznika i rozumienie intencji autorów tego podręcznika.

W odniesieniu do pojęcia pola prostokąta, studentka miała okazję (dokonując analizy podręczników) zauważyć, że omówione w artykule „przejście od wymiarów naturalnych do wymiarów wymiernych" jest jakościowo różnie realizowane w podręcznikach. Należy nakłaniać studentów do takiej refleksji i uczyć odpowiedniego spojrzenia na analizowane koncepcje, by potrafili w swojej dalszej pracy zawodowej wybierać z bogatej oferty zarówno te atrakcyjne dla uczniów, które – jako ciekawe – są motywujące do dalszej nauki, jak i te, które są przede wszystkim merytorycznie i metodologicznie poprawne oraz kształcące i rozwijające myślenie uczniów.

Warto w tym miejscu przytoczyć słowa H. Siwek, która podkreśla, że nauczyciel:

> nie może (...) poprzestać na nauce algorytmów i ćwiczeniu sprawności, na uświadamianiu sensu pojęć matematycznych i ilustrowaniu ich za pomocą środków poglądowych. Powinien potrafić tworzyć projekty poprawne pod względem dydaktycznym i matematycznym (wykorzystując różne podręczniki i materiały metodyczne) (...) Zadaniem nauczyciela jest także obserwować ucznia, analizować jego zachowania, szukać ich wyjaśnień z uwzględnieniem badań psychologicznych i dydaktycznych, a więc być badaczem procesu nauczania-uczenia się. Trafna diagnoza możliwości matematycznych ucznia jest jednym z podstawowych warunków jego sukcesów w tym przedmiocie (Siwek, 1998, s. 167).

Oczekiwania, jakie stawia przed nauczycielem współczesny świat, są duże, dlatego tym bardziej należy przygotowywać studentów do wymienionych przez autorkę zadań już podczas studiów. Wydaje się, że dyplomantka, której pracę przedstawiono w niniejszym artykule, podjęła w ramach pracy licencjackiej wszystkie z wymienionych tu aktywności.

Poczyniona przez studentkę analiza podręczników, podstawy programowej oraz realizowanego w szkole programu matematyki pozwoliła dostrzec ciekawe problemy badawcze i dała podstawy do skonstruowania odpowiedniego – adekwatnego do postawionych celów badawczych – narzędzia badawczego. Istotne jest to, że autorka dostrzegła, a następnie uwzględniła w swojej propozycji dydaktycznej, refleksję dotyczącą zmiany warunków matematycznej sytuacji (założeń twierdzenia). Jest bowiem niezwykle ważnym problemem sytuacja związana z pochopnie podejmowanymi przez uczniów uogólnieniami. Dyplomantka miała okazję sama przekonać się, jak ważną rolę w procesie nauczania odgrywa nauczyciel. To on musi skierować myślenie uczniów na odpowiednie tory, w szczególności uwrażliwić ich na stawianie sobie pytań, dostrzeganie nowych sytuacji, warunków, przypadków czy wreszcie porównywanie tych nowych sytuacji z sytuacjami, które są już

im znane. Ten stan rzeczy był widoczny w badaniach, wówczas gdy uczeń nie wykazywał samodzielnej refleksji na temat tego czy stosowany wcześniej przez niego (w przypadku prostokątów o wymiarach naturalnych) wzór, pozwalający obliczyć pole prostokąta, można wykorzystać (uogólnić) także na przypadek prostokątów o wymiarach wymiernych.

Takie bezrefleksyjne podejście ucznia i nieuświadomione przenoszenie rozumowania z sytuacji uczniowi znanej do sytuacji nowej udało się zaobserwować studentce dzięki zorganizowanym badaniom empirycznym. Zaplanowanie badań, ich przeprowadzenie i analiza dały możliwość osobistego dostrzeżenia trudności uczniów i zanalizowania popełnionych przez nich błędów. Badania empiryczne wiążą się niejednokrotnie ze stawieniem hipotez i ich weryfikowaniem. Te elementy były widoczne w omawianej pracy. Warto w tym miejscu przypomnieć interesującą sytuację: studentka postawiła hipotezę, iż stosowanie przez badanych uczniów błędnych wzorów jest efektem rozumowania uczniów jedynie w sposób algorytmiczny. Jak się jednak okazało przypuszczenie takie było jednak pochopne. Udało się bowiem znaleźć taką pracę ucznia, która tej hipotezy nie potwierdzała. Warto dodać, że przeprowadzone przez studentkę badania dotyczyły małego grona uczniów, jednak zdiagnozowanie – nawet w przypadku jednego ucznia – iż wprowadzenie algorytmu może zaburzyć rozumienie pojęcia, jest niezwykle istotnym wnioskiem, szczególnie z punktu widzenia przygotowania studenta do pracy w przyszłym zawodzie nauczyciela.

Dobrze też spojrzeć na problematykę omawianej tu pracy licencjackiej przez pryzmat korzyści jakie daje uczniom praca z nauczycielem (studentem), który przyjmuje postawę badacza i prowadzi z udziałem ucznia badania dydaktyczne. W omówionym przykładzie problematyka była ściśle związana z istotą samej matematyki i jej metodologii – dotyczyła pojęcia matematycznego (pola figury geometrycznej), którego właściwe kształtowanie wiąże się nie tylko ze sprawą rozumienia wielu zagadnień matematycznych przez uczniów, ale też z umiejętnością prowadzenia przez nich różnorodnych rozumowań, w tym – mających wpływ na formowanie się matematycznego myślenia – rozumowań o charakterze dowodowym. Wagę takich zagadnień podkreśla m.in. S. Turnau (2001), który w kontekście nauczania matematyki w liceum zwraca uwagę na obowiązek podejmowania przez nauczyciela (w ramach nauczania) działań mających na celu wprowadzanie uczniów w świat dedukcji:

> „(...) poznanie przez uczniów dedukcji jako metody ustalania, co jest matematyczną prawdą, trzeba uwzględnić wśród zadań stojących przed nauczycielem matematyki" (Turnau, 2001, s. 29).

W swojej refleksji nad elementami myślenia matematycznego, w szczególności dedukcji, w świetle szkolnego nauczania matematyki, autor sugeruje zmianę w podejściu do „nauki dowodzenia". Chodzi między innymi o to, aby analizowanie, uczenie się i tworzenie dowodów zastąpić tłumaczeniem dostrzeżonych własności oraz stopniowym jego ulepszaniem (Turnau, 2001). W świetle tej propozycji należy – według autorów niniejszego artykułu – odpowiednio wykorzystywać w nauczaniu

każdą taką sytuację matematyczną (czy też problem), która może sprzyjać rozwijaniu matematycznego myślenia uczniów. Do takich niewątpliwie należą te związane z tematyką pól figur geometrycznych. Stwarzają one bowiem szansę takiego postępowania, w którym można wykorzystać metodę uzmienniania stałych – metodę, która wspomaga wprowadzanie uczniów w proces dowodzenia twierdzeń. Trudno więc w tym kontekście nie dostrzec wartości jaką niesie ze sobą nauczanie przez takiego nauczyciela, który właściwie rozumie i stosuje w swojej praktyce zawodowej zabiegi dydaktyczne mające na celu rozwijanie matematycznego myślenia swoich uczniów.

Zaprezentowane tu zagadnienia to tylko jedne z wielu jakie mogą być dyskutowane przez studentów – przyszłych nauczycieli. Każdy temat ujęty w podstawie programowej kształcenia ogólnego wybranego poziomu edukacyjnego, w stosunku do którego student zyskuje uprawnienia, wart jest rozważenia i analizowania przez przyszłego nauczyciela matematyki. To bowiem czyni go pełniej przygotowanym do wykonywania zawodu, do którego kształci się również poprzez przygotowanie pracy dyplomowej na wybrany temat. Możliwość pisania tego typu pracy z dydaktyki matematyki daje jej autorowi niepowtarzalną szansę zdobycia niezbędnych do nauczania doświadczeń, zanim jeszcze przekroczy próg szkoły w charakterze nauczyciela matematyki. Student – przyszły nauczyciel, który na etapie studiów nie znajdzie się – choć epizodycznie – w roli badacza, może nie zdawać sobie sprawy z wagi poruszonych w tym artykule zagadnień. Nie podejmując w związku z tym refleksji nad swoimi późniejszymi (podejmowanymi już w ramach nauczania) zabiegami dydaktycznymi, może mieć trudności z odpowiednim organizowaniem procesu nauczania-uczenia się matematyki.

Literatura

Braun, M., Mańkowska, A., Paszyńska, M.: 2014, *Matematyka z kluczem. Podręcznik do matematyki dla klasy piątej szkoły podstawowej*, Część 1, Nowa Era, Warszawa.

Braun, M., Mańkowska, A., Paszyńska, M.: 2015, *Matematyka z kluczem. Podręcznik do matematyki dla klasy czwartej szkoły podstawowej*, Część 2, Nowa Era, Warszawa.

Ciosek, M., Legutko, M., Turnau, S., Urbańska, E.: 2005a, *Matematyka dla Ciebie. Podręcznik dla klasy czwartej szkoły podstawowej*, Nowa Era, Warszawa.

Ciosek, M., Legutko, M., Turnau, S., Urbańska, E.: 2005b, *Matematyka dla Ciebie. Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej*, Nowa Era, Warszawa.

Czajkowska, M.: 2015, Postawy nauczycieli matematyki wobec zmian w edukacji, *Society and Education. Instytut Studiów Międzynarodowych i Edukacji Humanum* **18**(3), 81–94.

Konior, J.: 2005, Niektóre nurty działalności Profesor Anny Zofii Krygowskiej oraz Jej koncepcja dydaktyki matematyki, *Dydaktyka Matematyki* **28,** Roczniki PTM, 65–77.

Koszyk, S.: 2012, Pole prostokąta i uogólnianie rozumowania w świetle analizy lekcji w klasie piątej szkoły podstawowej. Nieopublikowana praca licencjacka, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Kraków.

Krygowska, Z.: 1972, *Geometria dla klasy II liceum ogólnokształcącego*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Legutko, M.: 2001, O podręczniku matematyki, *Dydaktyka Matematyki* **23,** Roczniki PTM, 18–24.

Major, J., Olik-Pawlik, B., Ratusiński, T., Zaręba, L.: 2016, Wybrane uwagi na temat roli zadań matematycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 101–118.

Mnich, W.: 1980, Aktywności matematyczne jako kryterium doboru zadań w nauczaniu matematyki. Nieopublikowana rozprawa doktorska, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Kraków.

Moszner, Z.: 2004, Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki, *Dydaktyka Matematyki* **26,** Roczniki PTM, 255–264.

Narodowej, M. E.: 2008, Podstawa programowa z komentarzami. Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum. Matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka, Warszawa.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Siwek, H.: 1998, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa.

Turnau, S.: 1978, *Rola podręcznika szkolnego w kształtowaniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy panadpoczątkowej,* Praca monograficzne WSP w Krakowie, vol. 30, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Turnau, S.: 2001, O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole (rozszerzony tekst wystąpienia), *Dydaktyka Matematyki* **23,** Roczniki PTM, 25–33.

Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie: 2017a, Program studiów wyższych rozpoczynających się w roku akademickim 2017/2018. Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Studia wyższe na kierunku Matematyka, stopień pierwszy. Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Kraków. Pobrano z: `http://matematyka.up.krakow.pl/pliki/planprognew/I/2017|18/stac/2pprogramoblig.pdf`.

Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie: 2017b, Program studiów wyższych rozpoczynających się w roku akademickim 2017/2018, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Studia wyższe na kierunku Matematyka, stopień drugi. Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Kraków. Pobrano z: `http://matematyka.up.krakow.pl/pliki/planprognew/II/2017|18/stac/2pprogram.pdf`.

Zaręba, L.: 2009, *Wprowadzanie studentów matematyki w badania dydaktyczne*, Vol. 2 of *Prace Monograficzne z Dydaktyki Matematyki*, Koło SNM: „Forum Dydaktyków Matematyki", Bielsko-Biała, 95–110.

Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail joanna.major@up.krakow.pl
e-mail bozena.olik-pawlik@up.krakow.pl
e-mail tadeusz.ratusinski@up.krakow.pl
e-mail lidia.zareba@up.krakow.pl