FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.8

Historia matematyki, Konferencje

Piotr Błaszczyk

Nota o rozprawie Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen**

1. W XVII i XVIII wieku rachunek różniczkowy był rozwijany za pomocą liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych w strukturach niearchimedesowych[1]. Na przełomie XVIII i XIX wieku zaczęto stosować pojęcie granicy. W latach 60. XIX wieku Carl Weierstrass zainicjował technikę ε-δ i odpowiednio przeformułował podstawowe pojęcia analizy. W rezultacie zwolennicy nowego paradygmatu musieli odpowiedzieć na pytanie, czym są liczby stanowiące zakres zmienności ε i δ. Pewne rozwiązania w tym zakresie funkcjonowały już w salach wykładowych Berlina, Halle czy Zurychu, ale dopiero w roku 1872 opublikowano trzy prace zawierające modele liczb rzeczywistych[2]. W następnym wieku udało się ustalić ich izomorficzność, jednak w roku 1872 nie było to wcale oczywiste – z modelami tymi wiązano różne (dzisiaj wiemy, że nierównoważne) rozumienia ciągłości i co ważniejsze, liczby rzeczywiste nie były jeszcze postrzegane jako ciało uporządkowane.

Pierwsza ze wspomnianych prac to *Die Elemente der Functionenlehre* Eduarda Heinego[3]. Jej celem były kompletne, pozbawione wszelkich luk dowody znanych twierdzeń o funkcjach rzeczywistych, takich na przykład jak twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej. Heine pisał: „Ich prawdziwość opiera się [...] na nie w pełni ustanowionej definicji liczb niewymiernych, w której często uwikłane są przedstawienia geometryczne, a mianowicie wytworzenie linii poprzez ruch". Z uwagi na teorię funkcji, konieczna okazała się „definicja" liczb rzeczywistych z wyraźnie określoną arytmetyką i porządkiem oraz definicja ciągłości funkcji.

*Note on Richard Dedekind's memoir *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

[1] Liczby nieskończenie małe nazywano „infinitezymalami", albo liczbami „infinityzemalnymi" i stąd pochodzi nazwa „analiza infinitezymalna" występująca w rozprawie Dedekinda.

[2] Pierwszą konstrukcję liczb rzeczywistych zawiera artykuł Ch. Méray, Remarques sur la nature des quantités déjinies par la condition de servir de limites à des variable données, *Revue des Sociétés savantes, Sciences mathém. phys. et naturelles* 2, IV, 1869, 281–289. Praca ta nie została odnotowana przez matematykę niemiecką i nie wpłynęła na opisywaną tu historię.

[3] E. Heine, Die Elemente der Functionenlehre, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 74, 1872, 172–188; cytowane za: E. Heine, Elementy Teorii Funkcji, tł. J. Pogonowski, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 4, 2014, 153–166.

Druga z tej serii to publikacja Georga Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*[4]. Ta praca w pierwszym rzędzie była poświęcona pewnemu twierdzeniu o szeregach trygonometrycznych, które zostało wyrażone za pomocą zupełnie nowego pojęcia – pochodnej zbioru. Cantor przyznaje w artykule, że liczby rzeczywiste zajmują go o tyle, o ile musi ustanowić bijekcję między nimi a linią prostą. Powiązanie to traktował – przynajmniej w deklaracjach – jedynie jako retoryczny zabieg i pisał, że „można myśleć o wielkościach liczbowych jako przyporządkowanych punktom prostej. Dla poglądowości (choć nie należy to do istoty rzeczy) posługujemy się tym przedstawieniem w dalszym ciągu i gdy mówimy o punktach mamy zawsze przed oczyma wartości, przez które są one podane". Znamienne jest jednak, że nie zrezygnował z reprezentacji geometrycznej liczb nawet za cenę osobliwego aksjomatu: „każdej wielkości liczbowej odpowiada ustalony punkt prostej, którego współrzędna jest równa owej wielkości liczbowej". To pokazuje, jak trudno było w roku 1872 oddzielić liczby rzeczywiste od reprezentacji geometrycznej.

Trzecia wreszcie, to wydana w formie książki rozprawa Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[5]. Ta praca nie została skierowana do pisma naukowego; w przekonaniu autora miała charakter bardziej filozoficzny niż matematyczny, jej celem było „odnaleźć czysto arytmetyczne i w pełni precyzyjne podstawy dla zasad analizy infinitezymalnej". Dedekind odkrył, że jedno, odpowiednio wybrane twierdzenie może spełnić rolę owych podstaw i pozwoli wyeliminować z dowodów „wyobrażenia geometryczne":

„Jakże często mówi się, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi, a jednak nigdzie nie przedstawia się wyjaśnienia tej ciągłości i nawet najbardziej precyzyjne przedstawienia rachunku różniczkowego nie opierają swoich dowodów na ciągłości lecz albo apelują mniej lub bardziej świadomie do wyobrażeń geometrycznych lub sugerowanych przez geometrię, albo zależą od takich twierdzeń, które same nigdy nie są dowodzone na sposób arytmetyczny".

Taką podstawową rolę może pełnić twierdzenie: „każda wielkość, która wzrasta stale, lecz nie w sposób nieograniczony, musi zbliżać się do pewnej wartości granicznej":

„Należy do nich na przykład przywołane wyżej twierdzenie, a dokładne badania przekonały mnie, że to twierdzenie, lub jakiekolwiek z nim równoważne, w pewien sposób może być uważane za wystarczającą podstawę dla analizy infinitezymalnej".

Dedekind nie poprzestaje na tych uwagach i chce pokazać, że to „podstawowe twierdzenie" wynika z „definicji ciągłości":

„Chodziło tylko jeszcze o to, aby wykryć jego [tj. wyżej podanego twierdzenia] właściwe źródło w elementach arytmetyki i przez to jednocześnie uzyskać rzeczywistą definicję istoty ciągłości".

[4]G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* 5, 123–132; zob. także G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*, tł. J. Pogonowski, "Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" 8, 2016, 169–177.

[5]R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872. Dalej cytowana za *Ciągłość i liczby niewymierne*, tł. J. Pogonowski, w niniejszym tomie.

Oceniając plan rozprawy, z perspektywy współczesnej aksjomatyki liczb rzeczywistych, otrzymujemy następujący obraz: „podstawowe twierdzenie” to zasada supremum (ZS), „istota ciągłości” to zupełność w sensie Dedekinda (DC), czyli: Żaden przekrój liczb rzeczywistych nie wyznacza luki. Na gruncie aksjomatów ciała uporządkowanego ZS jest równoważna DC, zatem „istota ciągłości” nie ma wyróżnionej pozycji. Podejście Dedekinda jest jednak odmienne: przyjmuje on, że najważniejszym pojęciem rachunku różniczkowego jest ciągłość i podstawy tej dziedziny należy wyprowadzić z „istoty ciągłości”.

Prześledźmy drogę do tej „istoty” i jej związek z podstawami rachunku różniczkowego.

2. Rozprawa *Ciągłość i liczby niewymierne* zbudowana jest z *Przedmowy* i siedmiu paragrafów:

§1. Własności liczb wymiernych
§2. Porównanie liczb wymiernych z punktami linii prostej
§3. Ciągłość linii prostej
§4. Stworzenie liczb niewymiernych
§5. Ciągłość dziedziny liczb rzeczywistych
§6. Rachowanie na liczbach rzeczywistych
§7. Analiza infinitezymalna

W *Przedmowie* Dedekind pisze o motywacji swoich badań i krótko omawia prace Heinego i Cantora: *Die Elemente der Functionenslehre* oraz *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* O pierwszej z nich pisze:

„W istocie zgadzam się co prawda w zupełności z treścią tej rozprawy, bo przecież nie może być inaczej, ale szczerze wyznam, że moje przedstawienie wydaje się prostsze w formie i bardziej precyzyjne w ujęciu zasadniczej kwestii”.

Natomiast rozprawę Cantora tak komentuje:

„Pobieżne przejrzenie tej pracy pozwala na stwierdzenie, że aksjomat 2 w jej §2, pomijając zewnętrzną postać sformułowania, w pełni zgodny jest z tym, co poniżej w §3 oznaczam jako istotę ciągłości”.

Znaczące jest, że i Heine, i Cantor jako aksjomat ciągłości podali warunek, który współcześnie nazywamy zupełnością w sensie Cauchy’ego[6]. W rozprawie Dedekinda natomiast ciągłość wyraża zdanie DC. Warunek Dedekinda jest pełnym – jeśli tak wolno powiedzieć – aksjomatem ciągłości, natomiast zupełność w sensie Cauchy’ego dopiero w koniunkcji z aksjomatem Archimedesa stanowi aksjomat ciągłości. Zależności te rozpoznano na początku XX wieku, gdy sformułowano aksjomaty liczb rzeczywistych. Dedekind nie widział różnicy między jego charakterystyką ciągłości, a tą podaną przez Heinego czy Cantora.

A oto przegląd kolejnych paragrafów[7].

---

[6]Zob. P. Błaszczyk, Nota o rozprawie Eduarda Heinego Elemente der Functionenlehre, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 6, 2014, 139–152 oraz P. Błaszczyk, Nota o Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen Georga Cantora, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 8, 2016, 155–166.

[7]Szczegółową analizę rozprawy Dedekinda, ze wskazaniem wszystkich niejawnych założeń dotyczących liczb wymiernych i rzeczywistych przedstawiliśmy w: P. Błaszczyk, *Analiza filo-*

3. W pracach Heinego i Cantora przyjmowano, że liczby wymierne są zrozumiałe same przez się, to zaś, co wymaga wyjaśnienia, to liczby niewymierne. Takie podejście jest zaznaczone w tytule *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, ale faktycznie w rozprawie wygląda inaczej. Paragraf pierwszy poświęcony jest liczbom wymiernych i już tu podejście Dedekinda okazuje się bardzo oryginalne. Liczby wymierne są określone jako zbiór z porządkiem, zamknięty na cztery działania $(R, +, -, \cdot, \div, <)$[8]. Dedekind nie zatrzymuje się przy własnościach działań, jak przemienność czy rozdzielność, podkreśla jedynie ich *zamkniętość* i przechodzi do charakterystyki porządku $<$, a ta okazuje się wyjątkowo rozbudowana w porównania z innymi pracami tego okresu[9]. Tak więc porządek spełnia prawo trychotomii, jest przechodzi[10], gęsty, a ponadto każda liczba wymierna dzieli oś $(R, <)$ na dwie klasy A_1, A_2, które są nieskończone i takie że

$$A_1 \cup A_2 = R, \quad \text{oraz} \quad (\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)(x < y).$$

4. Podobieństwo między liczbami wymiernymi a linią prostą opiera się na porównaniu struktur porządkowych. Prosta jest rozumiana jako para $(L, \prec)$, gdzie porządek $\prec$, „lewy–prawy”, spełnia prawo trychotomii, jest przechodni, gęsty, a ponadto każdy punkt dzieli prostą na dwa nieskończone i takie podzbiory P_1, P_2, że

$$P_1 \cup P_2 = L, \quad \text{oraz} \quad (\forall x \in P_1)(\forall y \in P_2)(x \prec y).$$

Dalej Dedekind szkicuje funkcję zanurzającą R w L, która zachowuje porządek:

„Ta analogia między liczbami wymiernymi a punktami linii prostej staje się, jak wiadomo, rzeczywistą odpowiedniością, jeśli wybierzemy na prostej ustalony punkt początkowy lub zerowy o oraz wybierzemy jakąś określoną jednostkę długości dla mierzenia odcinków”.

Oznaczając odcinek jednostkowy jako e, funkcja ta jest odwzorowaniem między strukturami $(R, <, 0, 1)$ oraz $(L, \prec, o, e)$. Wybór odcinka e pozwala przyporządkować najpierw liczbom całkowitym, a następnie – na podstawie twierdzenia VI.9 z *Elementów* Euklidesa – wszystkim liczbom postaci $\frac{n}{m}$ punkty na linii prostej.

4.1 Przejście do paradygmatu czysto arytmetycznego następuje w paragrafie trzecim. Otwiera go następujące zdanie:

---

zoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007, s. 20–68.

[8]Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą R, tak jak w rozprawie Dedekinda, w przypadku liczb rzeczywistych oraz przekrojów także powtarzamy oznaczenia z pierwszego wydania rozprawy. Dedekind jest pod tym względem konsekwentny: liczby wymierne R oraz ich przekroje, jak (A_1, A_2), oznacza czcionką prostą, liczby rzeczywiste oraz ich przekroje – tymi samymi literami, ale czcionką gotycką, odpowiednio $\mathfrak{R}$ oraz $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Dodajmy wreszcie, że w roku 1872 rozprawa była drukowana czcionką gotycką. Wszystko to jest o tyle ważne, że pewne subtelne rozróżnia, dla których Dedekind nie miał pojęć matematycznych, zostały oddane w warstwie oznaczeń literowych.

[9]W podręczniku autorstwa Hermanna Grassmanna, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Enslin, Berlin 1861, podana jest definicja porządku liniowego oraz jego zgodność z dodawaniem. To jedna praca z tego okresu, o której wiemy, że podobnie jak rozprawa Dedekinda, zauważa rolę porządku liniowego w arytmetyce.

[10]Te dwa warunki, tj. prawo trychotomii oraz przechodniość, są równoważne liniowości porządku.

„Najważniejszy jednakże jest teraz fakt, że na prostej L jest nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej".

Argument Dedekinda sprowadza się do stwierdzenia, że w elementarnej geometrii znane są *długości*, czyli odcinki, niewspółmierne z odcinkiem jednostkowym, skąd wynika, że funkcja określona w poprzednim punkcie nie jest surjekcją. W tym celu przywołuje on potoczne opinie na temat wielkości niewspółmiernych odkrytych przez Greków. Dzisiaj wiemy, rozumowania te były oparte na algorytmie ἀνθυφαίρεσις (Euklides, *Elementy*, X.2) i na przykład z faktu, że przekątna oraz bok kwadratu nie są współmierne nie wynika od razu, że „Jeśli odłożymy taką długość [jak np. przekątna kwadratu o boku e – P.B.] od punktu o na prostej, to otrzymamy punkt końcowy, który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej". Aby takie wnioskowanie było „ścisłe", należy przywołać twierdzenie dotyczące ułamków łańcuchowych: Ułamkom nieskończonym odpowiadają liczby rzeczywiste niewymierne, skończonym – wymierne[11].

Zrazu wydaje się, punktów na prostej jest po prostu więcej: „prosta L jest nieskończenie bogatsza w indywidua punktowe niż dziedzina R liczb wymiernych w indywidua liczbowe". Odpowiednio, na osi $(R, <)$ jest mniej punktów, co Dedekind identyfikuje jako „istnienie luk":

„Powyższe porównanie dziedziny R liczb wymiernych z linią prostą doprowadziło do rozpoznania w tej pierwszej istnienia luk, niezupełności lub nieciągłości, podczas gdy linii prostej przypisujemy zupełność, brak luk lub ciągłość. Na czym właściwie polega owa ciągłość? Wszystko zawarte musi być w odpowiedzi na to pytanie i tylko przez nią uzyska się naukową podstawę dla badania *wszystkich* dziedzin ciągłych".

W następnym akapicie pojęcie to zyska techniczny sens i ciągłość zostanie zdefiniowana jako brak luk; Dedekind trochę patetycznie pisze nawet o *istocie ciągłości*: „Istotę ciągłości odnajduję [...] w następującej zasadzie":

„Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki".

Jakkolwiek zdanie to traktuje o „linii prostej", to z dalszego przebiegu rozprawy wynika, że chodzi w nim o dowolny zbiór liniowo uporządkowany $(X, <)$, gdzie porządek $<$ jest gęsty. Klasy, o których tu mowa – oznaczmy je jako A, B – tworzą przekrój $(X, <)$, co znaczy

$$A \cup B = X, \quad \text{oraz} \quad (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x < y).$$

Biorąc pod uwagę to, co dzieje się „na styku" zbiorów A, B, są cztery możliwości, przedstawione na poniższym rysunku.

[11] Zob. W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1977. Zauważmy jednak, że twierdzenia o ułamkach łańcuchowych zakładają arytmetykę liczb rzeczywistych zapoczątkowaną w rozprawie Dedekinda.

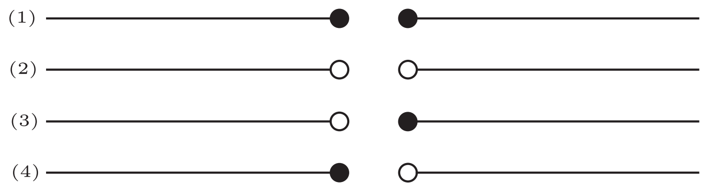

Fig. 1. Przekroje zbioru liniowo uporządkowanego

Czarne kropki w przypadku (1) oznaczają, że w klasie A istnieje element największy i w klasie B istnieje element najmniejszy. Z uwagi na gęstość, w zbiorze $(X, <)$ nie istnieją przekroje tego typu, co więcej, można pokazać, że gęstość porządku jest równoważna warunkowi, iż żaden przekrój nie jest typu (1).

Białe kropki w przypadku (2) oznaczają, że ani w klasie A nie ma elementu największego, ani w klasie B nie ma najmniejszego. Przekroje tego typu to luki (w technicznym sensie).

Przypadek (3) obrazuje taki przekrój, że w klasie A nie ma elementu największego, a w klasie B jest element najmniejszy. W przypadku (4) w klasie A jest element największy, a w klasie B nie ma elementu najmniejszego.

Definicja ciągłości sprowadza się do stwierdzenia, że każdy przekrój zbioru $(X, <)$ jest typu (3) albo (4).

Spójrzmy teraz na rewers ciągłości – nieciągłość. W §4 Dedekind wskazuje, że oś liczb wymiernych $(R, <)$ jest nieciągła:

„W tej własności, iż nie wszystkie przekroje [osi $(R, <)$ – P.B.] są wytworzone przez liczby wymierne zasadza się niezupełność lub nieciągłość dziedziny R wszystkich liczb wymiernych".

Przekrój „wytworzony przez liczbę wymierną" q jest postaci

$$A_1 = \{c \in R : c < q\}, \quad A_2 = \{c \in R : c \geq q\},$$

lub

$$A_1 = \{c \in R : c \leq q\}, \quad A_2 = \{c \in R : c > q\}.$$

W pierwszym przypadku jest on typu (3), w drugim – typu (4). Porządek liczb wymiernych jest gęsty, więc na osi $(R, <)$ nie ma przekrojów typu (1). Nieciągłość liczb wymiernych polega więc na tym, że istnieją przekroje typu (2) (zob. Fig. 2). Nieskończenie wiele przekrojów tego typu wskaże Dedekind w §4.

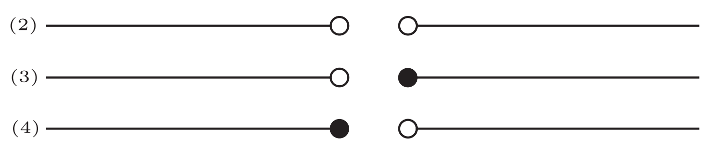

Fig. 2. Przekroje osi liczb wymiernych

4.2 Kluczowe dla filozoficznej wymowy rozprawy jest następne zdanie:

„Jeśli teraz chcemy, a to właśnie jest nasze życzenie, oddać na sposób arytmetyczny wszystkie zjawiska na prostej, to liczby wymierne do tego nie wystarczą, a stąd jest bezwarunkowo konieczne, aby instrument R, który został skonstruowany poprzez stworzenie liczb wymiernych, uczynić istotnie subtelniejszym poprzez stworzenie nowych liczb tego rodzaju, by owa dziedzina liczbowa uzyskała tę samą zupełność, lub, jak chcemy teraz powiedzieć, tę samą *ciągłość*, co linia prosta".

Dedekind co prawda pisze, „chcemy [...] oddać na sposób arytmetyczny wszystkie zjawiska na prostej", ale w *Przedmowie* cel rozprawy został inaczej sformułowany, mianowicie: „odnaleźć czysto arytmetyczne i w pełni precyzyjne podstawy dla zasad analizy infinitezymalnej". Celem jest więc nie tyle arytmetyzacja geometrii, ile zbudowanie struktury arytmetycznej, która z uwagi na ciągłość, będzie podobna do linii prostej. Perspektywa arytmetyczna jest zresztą podkreślana w rozprawie wielokrotnie. Czytamy:

„Zwykłe jak dotąd wprowadzenie liczb niewymiernych wiąże się mianowicie bezpośrednio z pojęciem wielkości rozciągłej – które samo jednak nie jest nigdzie precyzyjnie zdefiniowane – i objaśnia liczbę jako wynik mierzenia jednej takiej wielkości przez drugą tego samego rodzaju. Zamiast tego, żądam, aby arytmetyka była rozwijana sama z siebie".

Obok ewidentnych odniesień geometrycznych, po stronie niearytmetycznej umieszcza Dedekind także antyczną teorię proporcji. Newton, a później Euler definiowali liczbę jako stosunek wielkości, przez co rozumieli pojęcia pochodzące z Księgi V *Elementów*[12]. Jednym z pojęć technicznych teorii Euklidesa było też *mierzenie*. Dedekind zaś wskazuje, że z tego pojęcia nie da się wyprowadzić definicji liczby zespolonej, a w przypisie dodaje:

„wedle mojego ujęcia, pojęcie stosunku pomiędzy dwiema wielkościami tego samego rodzaju może dopiero wtedy zostać jasno opracowane, gdy liczby niewymierne zostały już wprowadzone".

W tym miejscu ma na uwadze definicję stosunku, jako ilorazu dwóch liczb rzeczywistych. Faktycznie, współcześnie tak rozumiane jest to pojęcie, ale – powtórzmy – nie ma to związku z matematyką grecką[13].

Wątek geometryczny, w tym linii prostej, ma wyłącznie dydaktyczny charakter i jest prowadzony tylko do miejsca, w którym sformułowana zostanie zasada ciągłości. Dedekind tak charakteryzuje swoją metodę:

„Tak jak liczby ujemne oraz ułamki wymierne wprowadzane są w swobodnym akcie twórczym i jak prawa rachowania na tych liczbach muszą i mogą być sprowadzone do praw rachowania na dodatnich liczbach całkowitych, tak też należy dążyć do tego, aby liczby niewymierne zostały w pełni zdefiniowane wyłącznie poprzez liczby wymierne".

Jest też świadom, że nie można udowodnić, iż linia geometryczna jest ciągła w powyższym sensie:

„Przyjęcie tej własności linii prostej jest niczym innym jak aksjomatem, dopiero na mocy którego przyznajemy linii prostej jej ciągłość, na mocy którego wmyślamy się [hineindenken] w ciągłość linii prostej. Jeśli przestrzeń ma w ogóle jakąś realną

[12] Faktycznie, w teorii Euklidesa sens matematyczny ma tylko proporcja, a nie stosunek; zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V–VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013, s. 98–126.

[13] Zob. *ibidem*, s. 176–178.

egzystencję, to wcale *nie* musi koniecznie być ciągła; niezliczone jej własności pozostałyby takie same, gdyby była nieciągła. I gdybyśmy wiedzieli z pewnością, że przestrzeń jest nieciągła, to i tak nic nie mogłoby nas powstrzymać, gdybyśmy tego chcieli, aby w myśli uczynić ją ciągłą, poprzez wypełnienie jej luk; to wypełnienie polegałoby jednak na tworzeniu nowych indywiduów punktowych i musiałoby zostać przeprowadzone wedle powyższej zasady".

Wobec powyższego, uwaga „by owa dziedzina liczbowa [tj. liczby rzeczywiste – P.B.] uzyskała tę samą zupełność, lub, jak chcemy teraz powiedzieć, tę samą *ciągłość*, co linia prosta" nie ma sensu matematycznego: o linii prostej nie można udowodnić, że jest ciągła, natomiast w §5 Dedekind dowodzi, że porządek liczb rzeczywistych jest ciągły. Linia prosta – pomijając fakt, że jest ono bardzo niedookreślonym obiektem – nie jest wzorcem ciągłości. Ostatecznym kryterium *definicji ciągłości* jest nie to, że linia prosta posiada tak rozumianą ciągłość, ale fakt, że z *definicji ciągłości* można wyprowadzić podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego

5. Paragraf czwarty rozwija już paradygmat arytmetyczny, należy jedynie dopowiedzieć, że rozumiemy przez to strukturę, którą współcześnie nazywa się ciałem uporządkowanym. Dedekind zaczyna od definicji przekroju:

„Jeśli teraz dany jest jakikolwiek podział systemu R na dwie klasy A_1, A_2, który ma tylko *tę* własność charakterystyczną, że każda liczba a_1 w A_1 jest mniejsza od każdej liczby a_2 w A_2, to dla zwięzłości będziemy nazywać taki podział *przekrojem* i oznaczać przez (A_1, A_2)".

Na osi $(R, <)$ każda liczba wymierna wyznacza przekrój, gdy zaś dany jest przekrój (A_1, A_2) typu (3) lub (4), to jest „on wyznaczony przez ową największą lub najmniejszą liczbę wymierną" (zob. Fig. 2).

Dla rozwijanej teorii kluczowe jest stwierdzenie, że istnieją przekroje $(R, <)$ typu (2):

„istnieje też nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wytworzone przez żadną liczbę wymierną".

Spójrzmy na dowód. Niech D będzie liczbą naturalną, która nie jest kwadratem, $D = 2, 3, 5$ itd. Przekrój (A_1, A_2) definiowany jak następuje:

$$A_1 = R \backslash A_2, \quad A_2 = \{q \in R_+ : q^2 > D\}.$$

Przyjmując $y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$ dostajemy

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}, \qquad y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Gdy $x > 0$ i $x^2 < D$, to $y > x$ oraz $y^2 < D$. Zatem dla każdego $x \in A_1$, istnieje takie $y \in A_1$, że $y > x$. To oznacza, że w A_1 nie ma największej liczby. Z drugiej strony, gdy $x \in A_2$, to $y < x$ oraz $y^2 > D$. To oznacza, że w klasie A_2 nie ma najmniejszej liczby.

Opisany wyżej przekrój (A_1, A_2) został zdefiniowany za pomocą działań arytmetycznych w R. Gdybyśmy chcieli uzupełnić wszystkie szczegóły tego rozumowania, to musielibyśmy przyjąć, że liczby wymierne stanowią ciało uporządkowane $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$[14].

„W tej własności, iż nie wszystkie przekroje są wytworzone przez liczby wymierne zasadza się niezupełność lub nieciągłość dziedziny R wszystkich liczb wymiernych".

Po zidentyfikowaniu luk w $(R, <)$ Dedekind przechodzi do definicji liczby niewymiernej:

„Za każdym razem, gdy przedłożony jest przekrój (A_1, A_2), który nie jest wytworzony przez żadną liczbę wymierną, *stwarzamy* [erschaffen wir] pewną nową liczbę *niewymierną* α, którą możemy poczytywać za w pełni zdefiniowaną przez ten przekrój (A_1, A_2); będziemy mówić, że liczba α odpowiada temu przekrojowi, lub że wytwarza ten przekrój. Odtąd zatem każdemu ustalonemu przekrojowi odpowiada jedna i tylko jedna liczba wymierna lub niewymierna i uważamy dwie liczby za *różne* zawsze i tylko wtedy, gdy odpowiadają one istotnie różnym przekrojom".

Z perspektywy ontologicznej, liczba wymierna ma dwa przedstawienia albo jest elementem R, albo przekrojem $(R, <)$ „wytworzonym" przez daną liczbę. Niektóre sformułowania rozprawy sugerują, że z liczbami niewymiernymi jest podobnie, że „wytwarzają" one przekroje osi liczb rzeczywistych $(\mathfrak{R}, <)$: „będziemy mówić, że liczba [niewymierna] α odpowiada temu przekrojowi lub że wytwarza ten przekrój". W tym przypadku nie ma jednak żadnego innego obiektu poza przekrojem $(R, <)$ typu (2). Tę odmienność próbuje Dedekind oddać zwrotem *erschaffen wir*, który jednak nie ma żadnego matematycznego znaczenia.

W zbiorze wszystkich przekrojów $(R, <)$, czyli w dziedzinie $\mathfrak{R}$, Dedekind wprowadza najpierw porządek. W tym celu formułuje kilka własności przekrojów.

1. „Przekrój (A_1, A_2) jest [...] w pełni określony, gdy znana jest jedna z obu klas, np. pierwsza A_1"[15].

2. Dwa przekroje (A_1, A_2), (B_1, B_2) są różne jeśli zbiór $A_1 \setminus B_2$ lub $B_1 \setminus A_1$ zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych. Warunek ten wynika z faktu, że istnieją dwa przekroje odpowiadające liczbie wymiernej; wtedy różnica odpowiednich klas dolnych zawiera tylko jedną liczbę; w pozostałych przypadkach różnica klas dolnych zawiera co najmniej dwie liczby wymierne, a stąd, po uwzględnieniu gęstości, wynika, że jest ich nieskończenie wiele.

Odpowiednio, dwa przekroje są równe, gdy ich klasy dolne różnią się co najwyżej jednym elementem.

3. Jeśli przekroje (A_1, A_2), (B_1, B_2) są różne (w znaczeniu opisanym wyżej), gdzie pierwszy wyznacza liczbę α, a drugi β, i zachodzi $B_1 \subset A_1$, to $\alpha > \beta$.

4. Prawo trychotomii dla przekrojów

„Jako iż wszystkie przypadki zostały wyczerpane, wynika z tego, że z dwóch

[14] Zdarza się, że streszczając rozprawę Dedekinda przekrój ten jest przestawiany w postaci $A_2 = R \setminus A_1$, $A_1 = \{q \in R_+ : q < \sqrt{2}\}$. To jest błędne ujęcie, liczba niewymierna nie może wystąpić w tej definicji, wręcz przeciwnie – liczba $\sqrt{2}$ jest definiowana jako przekrój (A_1, A_2), gdzie $D = 2$. Z drugiej strony, wiadomo, że nie można przyjąć ograniczenia, iż rozważane są jedynie przekroje definiowane przez formuły w języku teorii ciał uporządkowanych.

[15] G. Peano w roku 1899 podał zmodyfikowaną wersję konstrukcji Dedekinda, w której liczba rzeczywiste jest utożsamiana nie z przekrojem liczb wymiernych, ale tylko z klasą dolą; zob. G. Peano, Sui numeri irrazionali, *Revista di Matematica* 6, 126–140.

różnych liczb jedna koniecznie musi być większa, a druga mniejsza, co daje dwie możliwości. Trzeci przypadek jest niemożliwy".

Bardzo ciekawa jest kolejna uwaga dotycząca terminologii:

„Mieściło się to już w wyborze *komparatywu* (większy, mniejszy) na oznaczenie związku między α, β; ale wybór ten dopiero teraz, po fakcie, jest uzasadniony".

Wynika stąd, że prawo trychotomii utożsamia Dedekind z liniowością porządku. Faktycznie, prawo to wprost występuje Euklidesa i Arystotelesa w związku z porównaniem większy-mniejszy. Ale z perspektywy współczesnej wiemy, że aby porządek był liniowy musi spełniać prawo trychotomii i być przechodni.

5. Niech liczba α będzie wyznaczona przez przekrój (A_1, A_2). Wówczas dla dowolnej liczby wymiernej $c \in R$ zachodzi

$$c < \alpha \Rightarrow c \in A_1, \quad c > \alpha \Rightarrow c \in A_2. \tag{1}$$

„[J]eśli liczba α sama jest wymierna, to może ona należeć do jednej lub drugiej klasy".

W tym wnioskowaniu Dedekind wykorzystuje podwójne przedstawienie liczby wymiernej – może być ona przekrojem $(R, <)$ albo elementem R – co więcej, element R jest porównywany z przekrojem $(R, <)$. Ta dwoistość będzie wykorzystana w dowodzie kolejnej, niezmiernie ważnej własności.

6. Niech dalej α będzie wyznaczona przez przekrój (A_1, A_2), zaś β przez przekrój (B_1, B_2).

„Jeśli $\alpha > \beta$, czyli istnieje też nieskończenie wiele liczb w A_1, które nie należą do B_1, to istnieje również nieskończenie wiele takich liczb, które są jednocześnie różne od α i β; każda taka liczba wymierna c jest $< \alpha$, ponieważ należy do A_1 i jest jednocześnie $> \beta$, ponieważ należy do B_2".

Faktycznie, z (1) dostajemy

$$c \in A_1 \Rightarrow c \leq \alpha, \quad c \in A_2 \Rightarrow c \geq \alpha. \tag{2}$$

Wśród liczb wymiernych należących do $A_1 \backslash B_1$ są takie, które spełniają warunek $\alpha > c > \beta$. Stosując to samo rozumowanie do pary α, c, otrzymamy – między α i β leży nieskończenie wiele liczb wymiernych. Innymi słowy zbiór R jest gęsty w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\mathfrak{R}, <)$.

Własność ta okaże się kluczowa w dowodzie ciągłości $(\mathfrak{R}, <)$. Wiemy, że w ciele uporządkowanym warunek ten jest równoważny aksjomatowi Archimedesa; zapiszmy go w najbardziej znanej postaci:

$$(\forall x, y)(\exists n)(0 < x < y \Rightarrow nx > y).$$

W matematyce greckiej aksjomat Archimedesa funkcjonował jako definicja V.4, w matematyce nowożytnej został zidentyfikowany dopiero w roku 1885[16], u Dedekinda występuje zaś pod postacią ośrodkowości. Dodajmy, że ani Heine, ani

[16]Zob. P. Błaszczyk, Nota o rozprawie Otto Höldera Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 5, 2013, 129–144.

Cantor nie wprowadzili do swoich prac aksjomatu Archimedesa w żadnej postaci w sposób jawny.

6. Dziedzina $(\mathfrak{R}, <)$ jest liniowo uporządkowana, co oznacza, że spełnia warunki (1)–(3) przedstawione w §1. Ponadto porządek $<$ jest ciągły. Czytamy:

„Jeśli system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych rozpada się na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$ tego rodzaju, że każda liczba α_1 klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby α_2 klasy $\mathfrak{A}_2$, to istnieje jedna i tylko jedna liczba α, przez którą ten rozkład jest wytworzony".

Innymi słowy, każdy przekrój osi $(\mathfrak{R}, <)$ jest typu (3) lub (4) (zob. wyżej Fig. 2).

Dowód Dedekinda jest następujący. Przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ systemu $(\mathfrak{R}, <)$ wyznacza przekrój (A_1, A_2) systemu $(R, <)$, mianowicie:

$$A_1 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_1\}, \quad A_2 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_2\}.$$

Niech liczba rzeczywista α będzie wyznaczona przez (A_1, A_2). Zostaje pokazać, że liczba ta jest albo największa w klasie $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w klasie $\mathfrak{A}_2$, tj.

$$\beta \in \mathfrak{A}_1 \Rightarrow \beta \leq \alpha, \quad \beta \in \mathfrak{A}_2 \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Wobec trychotomii oraz własności $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{R}$, warunki te oznaczają

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in \mathfrak{A}_1, \quad \alpha < \beta \Rightarrow \beta \in \mathfrak{A}_2.$$

I właśnie te implikacje są dowodzone w rozprawie.

Niech więc $\beta < \alpha$. Z gęstości R w $\mathfrak{R}$ wynika, że między β i α leży jakaś liczba wymierna, $\beta < c < \alpha$, gdzie $c \in R$. Dalej, skoro $c < \alpha$, to $c \in A_1$ i w konsekwencji $c \in \mathfrak{A}_1$. A skoro $\beta < c$, to zachodzi także $\beta \in \mathfrak{A}_1$. Podobnie dowodzona jest druga implikacja. Ostatecznie:

„każda liczba β różna od α należy do klasy $\mathfrak{A}_1$ lub do klasy $\mathfrak{A}_2$, w zależności od tego, czy $\beta < \alpha$ czy też $\beta > \alpha$; w konsekwencji sama α jest albo największą liczbą w $\mathfrak{A}_1$ lub najmniejszą liczbą w $\mathfrak{A}_2$, tj. α jest jedną i oczywiście jedyną liczbą, przez którą wytworzony jest rozkład $\mathfrak{R}$ na klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$, co należało wykazać".

7. W paragrafie szóstym definiowana jest arytmetyka przekrojów. Dedekind pokazuje, jak działania na liczbach rzeczywistych można „sprowadzić do działań na liczbach wymiernych".

„Aby sprowadzić rachowanie na dwóch liczbach rzeczywistych α, β do rachowania na liczbach wymiernych trzeba tylko zdefiniować przez przekroje (A_1, A_2) oraz (B_1, B_2), które są wytworzone przez liczby α i β w systemie $\mathfrak{R}$, przekrój (C_1, C_2), który ma odpowiadać wynikowi rachowania γ".

Przekrój (C_1, C_2), który ma wyznaczać sumę $\alpha + \beta$ definiowany jest jak następuje:

$$C_1 = \{c_1 \in R : (\exists a_1 \in A_1)(\exists b_1 \in B_1)(c_1 \leq a_1 + b_1)\}, \quad C_2 = R \backslash C_1.$$

Tak zdefiniowane dodawanie po zawężeniu do liczb wymiernych sprowadza się do „zwykłego" dodawania:

„Nie narusza się przy tym definicji obowiązującej w arytmetyce liczb wymiernych, gdy we wszystkich przypadkach przez *sumę* $\alpha + \beta$ dowolnych dwóch liczb rzeczywistych α, β rozumie się tę liczbę γ, przez którą wytworzony jest przekrój (C_1, C_2)".

Pominiemy dalsze szczegóły, aby zwrócić uwagę na kwestię, która w ogóle nie została zauważona w omówieniach *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Otóż wprowadziwszy działania na przekrojach, Dedekind zauważa, że odpowiednie prawa, jak np. rozdzielność mnożenia względem dodawania, można otrzymać nie przez bezpośrednie sprawdzenie, a za pomocą szczególnego tricku:

„łatwo się przekonać, że wszystko tu sprowadza się do tego, aby udowodnić, że same operacje arytmetyczne posiadają pewną ciągłość [Stetigkeit]".

Dedekind przyjmuje, aby dodawanie i mnożenie potraktować jako funkcje ciągłe dwóch zmiennych:

„Jeśli liczba λ jest wynikiem rachunku na liczbach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ oraz λ leży wewnątrz przedziału L, to można podać przedziały $A, B, C, \ldots$, w których leżą, odpowiednio, liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, tego rodzaju, że wynik tego samego rachunku, w którym zamienimy liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ na dowolne liczby z przedziałów, odpowiednio, $A, B, C, \ldots$ będzie zawsze liczbą leżącą wewnątrz przedziału L".

W przypadku dodawania definicję tę można tak zapisać

$$(\forall L)(\exists A, B)(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x + y \in L),$$

przy czym L, A, B są takimi przedziałami, że $\lambda \in L$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ oraz $\lambda = \alpha + \beta$.

Korzystając z ciągłości działań oraz gęstości R w $\mathfrak{R}$ można pokazać, że odpowiednie własności w ciele liczb wymiernych „przenoszą się" na działania w ciele liczb rzeczywistych.

„Odstraszająca ociężałość związana z wyrażeniem takiego twierdzenia [jak rozdzielność mnożenia względem dodawania – P.B.] przekonuje nas, że trzeba coś uczynić, aby dopomóc językowi; w istocie, osiągnięte to może być w sposób najdoskonalszy, gdy wprowadzi się pojęcia *zmiennych wielkości*, *funkcji*, *wartości granicznej* i przy tym najbardziej celowe będzie oprzeć definicje nawet najprostszych operacji arytmetycznych na tych pojęciach; co jednak tutaj nie może być dalej rozwijane".

W §6 znajdujemy więc, po pierwsze, definicję ciągłości funkcji, po drugie, ideę, aby liczby rzeczywiste ująć jako ciało topologiczne, czyli ciało algebraiczne, w którym działania (dodawanie, mnożenie, oraz operacje $x \mapsto -x$, $x \mapsto x^{-1}$) są ciągłe[17].

8.1 W ostatnim paragrafie Dedekind wraca do pytania, jak z „istoty ciągłości" wynikają podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego:

„Należy tu na koniec objaśnić związek między naszymi dotychczasowymi rozważaniami a pewnymi głównymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej".

Wybrane zostają dwa twierdzenia. Pierwsze brzmi"

(T1) „Jeśli wielkość x rośnie stale, ale nie ponad wszelkie granice, to zbliża się ona do wartości granicznej".

Dowód poprzedza definicja pojęcia „wielkości zbliżającej się do wartości granicznej":

[17] Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna...* , *op. cit.*, 291–300.

„Mówi się, że wartość zmienna x, która przebiega kolejne określone wartości liczbowe zbliża się do ustalonej *wartości granicznej* α, gdy x w przebiegu tego procesu ostatecznie znajdzie się między każdymi dwiema liczbami, między którymi leży sama α, lub, co jest tym samym, gdy wartość bezwzględna różnicy $x - \alpha$ staje się ostatecznie mniejsza od każdej danej, różnej od zera wartości".

O ile drugą część zdania możemy zapisać formułą

$$(\forall \varepsilon > 0)(|\alpha - x| < \varepsilon)$$

i w tym sensie jest ona zrozumiała, to pojęcie „wielkość zmienna x" wymaga interpretacji. Może być ono rozumiane albo jako ciąg liczb rzeczywistych (x_n), albo jako podzbiór liczb rzeczywistych, $X \subset \mathfrak{R}$. W pierwszym przypadku zwrot „wielkość zmienna x zbliża się do pewnej stałej granicy α" będzie interpretowany jako granica ciągu, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. W drugim – jako kres zbioru, $\alpha = \sup X$. Wówczas twierdzenie T1 będzie interpretowane odpowiednio albo jako (1) Ciąg rosnący i ograniczony z góry posiada granicę, albo (2) Zbiór niepusty i ograniczony z góry posiada supremum.

W *Stetigkeit* podany jest dowód implikacji $DC \Rightarrow ZS$, co znaczy, że musimy przyjąć interpretację drugą[18]. Jest to klasyczny, powtarzany do dzisiaj dowód. Niech więc $X \subset \mathfrak{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. Definiujemy parę zbiorów $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$:

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathfrak{R} : \exists x \in X[x \geq \alpha_1]\}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathfrak{R} : \forall x \in X[x < \alpha_2]\}.$$

Ograniczoność X oznacza, że zbiór $\mathfrak{A}_2$ jest niepusty. Para $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ jest przekrojem, na mocy DC „istnieje liczba α, która albo jest największa w klasie $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w klasie $\mathfrak{A}_2$". Z definicji zbioru $\mathfrak{A}_1$ oraz założenia, że „x rośnie" wynika, że musi być $\alpha \in \mathfrak{A}_2$. To że α jest „wartością graniczną" Dedekind opisuje krótkim zdaniem:

„Jakąkolwiek teraz weźmiemy liczbę α_1 [tj. dowolny element klasy $\mathfrak{A}_1$], to zawsze będzie ostatecznie $\alpha_1 < x < \alpha$, tj. x zbliża się do wartości granicznej α".

W podsumowaniu tego wywodu znajdujemy zdanie:

„Twierdzenie to jest równoważne z zasadą ciągłości, tj. traci ono swoją moc obowiązującą [Gültigkeit], gdy uznamy, że choćby tylko jedna liczba rzeczywista nie znajduje się w dziedzinie $\mathfrak{R}$; lub inaczej mówiąc: jeśli to twierdzenie jest prawdziwe, to także twierdzenie IV w §5 jest prawdziwe".

8.2 Drugie z wybranych przez Dedekinda twierdzeń brzmi:

(T2) „Jeśli w procesie zmiany wielkości x można dla każdej podanej wielkości dodatniej δ wyznaczyć też odpowiednie miejsce, począwszy od którego x zmienia się o mniej niż δ, to x zbliża się do wartości granicznej."

W tym przypadku zwrot „wielkość zmienna x" zinterpretujemy jako ciąg (x_n). Odpowiednio twierdzenie T2 oznacza zupełność w sensie Cauchy'ego (CC):

$$(\forall \delta \in \mathfrak{R}_+)(\exists k \forall n > k)(|x_k - x_n| < \delta) \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathfrak{R})(\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha).$$

[18] Przypomnijmy, DC to zasada *Żaden przekrój nie wyznacza luki*, ZS to zasad supremum.

To, że ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego jest interpretacją słów:

„Niech δ będzie dowolną wielkością dodatnią [tj. $\delta > 0$], wtedy na mocy założenia nadejdzie moment [$\exists k$], od którego x [x_n, gdzie $n > k$] zmienia się o mniej niż δ, tj. jeśli x w tym momencie ma wartość a, to później będzie zawsze $x > a - \delta$ oraz $x < a + \delta$ [$|x_k - x_n| < \delta$] ".

Dedekind pisze, że twierdzenie T2 jest

„odwrotne do dającego się łatwo udowodnić twierdzenia głoszącego, iż każda wielkość zmienna, która zbliża się do pewnej granicy, zmienia się ostatecznie o mniej niż jakąkolwiek liczbę dodatnią".

W przyjętej tu interpretacji oznacza to, że ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód implikacji $DC \Rightarrow CC$ podany przez Dedekinda jest dość skomplikowany, dlatego podamy jego transkrypcję na współczesną notację.

Niech więc ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego, czyli niech będzie spełnione założenie warunku CC.

1. „Odkładam na razie na bok pierwotne założenie i trzymam się wyżej udowodnionego faktu, że wszystkie późniejsze wartości zmiennej x leżą między dwiema danymi skończonymi wartościami".

Zdanie to oznacza: gdy ustalone jest $\delta > 0$, to istnieje takie $k(\delta)$, że dla $n > k(\delta)$ zachodzi $|x_{k(\delta)} - x_n| < \delta$ i dalej rozważany jest nie cały ciąg (x_n), ale prawie wszystkie wyrazy ciągu, czyli $\{x_n : n \geq k(\delta)\}$. Definicje, które niżej podamy, będą odnosiły się do zbioru $\{x_n : n \geq k(\delta)\}$, inaczej, indeksy n, j, które wystąpią niżej spełniają warunek $j, n \geq k(\delta)$.

2. „Na tym opieram podwójny podział wszystkich liczb rzeczywistych. Przyjmuję liczbę α_2 (np. $a+\delta$) do systemu $\mathfrak{A}_2$, gdy w przebiegu rozważanego procesu będzie ostatecznie $x \leqslant \alpha_2$; do systemu $\mathfrak{A}_1$ przyjmuję każdą liczbę, która nie należy do $\mathfrak{A}_2$; jeśli α_1 jest taką liczbą, to jakkolwiek daleko będzie ów proces postępował, jeszcze nieskończenie wiele razy będzie tak, iż $x > \alpha_1$".

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathfrak{R} : (\forall j \exists n > j)[x_n > \alpha_1]\}, \ \mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathfrak{R} : (\exists j \forall n > j)[x_n \leq \alpha_2]\}.$$

3. „Ponieważ każda liczba α_1 jest mniejsza od każdej liczby α_2, więc istnieje w pełni określona liczba α, która wytwarza ten przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ systemu $\mathfrak{R}$ i którą nazywam górną wartością graniczną pozostającej ciągle skończoną zmiennej x".

Przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ wyznacza liczbę α. Można pokazać, że $\alpha = \limsup x_n$.

4. „Podobnie będzie wytworzony przez zachowanie się zmiennej x drugi przekrój $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ systemu $\mathfrak{R}$: liczba β_1 (np. $a-\delta$) zostanie przyjęta do $\mathfrak{B}_1$, jeśli w przebiegu rozważanego procesu ostatecznie będzie $x \geqslant \beta_1$; każda inna liczba β_2, przyjęta do $\mathfrak{B}_2$ ma tę własność, że nigdy ostatecznie nie jest $x \geqslant \beta_2$, a więc jeszcze nieskończenie wiele razy będzie $x < \beta_2$; liczbę β, przez którą wytworzony jest ten przekrój nazywam dolną wartością graniczną zmiennej x".

$$\mathfrak{B}_1 = \{\beta_1 \in \mathfrak{R} : (\exists j \forall n > j)[x_n \geq \beta_1]\}, \ \mathfrak{B}_2 = \{\beta_2 \in \mathfrak{R} : (\forall j \exists n > j)[x_n < \beta_2]\}.$$

Przekrój $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ wyznacza liczbę β. Można pokazać, że $\beta = \liminf x_n$.

5. „Obie liczby α, β są oczywiście scharakteryzowane także poprzez następującą własność: jeśli ε jest dowolnie małą wielkością dodatnią, to zawsze mamy ostatecznie $x < \alpha + \varepsilon$ oraz $x > \beta - \varepsilon$, ale nigdy nie mamy ostatecznie $x < \alpha - \varepsilon$ i nigdy nie mamy ostatecznie $x > \beta + \varepsilon$".

$$(\forall \varepsilon \in \mathfrak{R}_+)(\exists j \forall n > j)[x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)].$$

6. „Są teraz możliwe dwa przypadki. Jeśli α i β są od siebie różne, to z konieczności jest $\alpha > \beta$, ponieważ w przeciwnym razie byłoby $\alpha_2 \geqslant \beta_1$; zmienna x oscyluje i, jakkolwiek długo trwałby rozważany proces, podlega zmianom, których wielkość przekracza wartość $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, gdzie ε oznacza dowolnie małą wielkość dodatnią".

Po pierwsze, $\alpha \geq \beta$. Z przyjętych definicji wynika, że

$$(\forall \alpha_2 \in \mathfrak{A}_2)[\alpha_2 \geq \beta_1].$$

Istotnie, rozumując nie wprost, pokażemy, że założenie $\neg(\alpha < \beta)$ prowadzi do sprzeczności. Gdy $\alpha < \beta$, to dla pewnej liczby wymiernej β_1 zachodzi $\alpha < \beta_1 < \beta$. Z warunku $\alpha < \beta_1$ wynika istnienie takiej liczby wymiernej γ, że $\alpha < \gamma < \beta_1$. Z nierówności $\alpha < \gamma$ wnosimy, że $\gamma \in \mathfrak{A}_2$ i w rezultacie dochodzimy do sprzeczności:

$$(\forall \alpha_2 \in \mathfrak{A}_2)[\alpha_2 \geq \beta_1] \wedge (\exists \alpha_2 \in \mathfrak{A}_2)[\alpha_2 < \beta_1].$$

7. „Pierwotne założenie, do którego teraz wracam, stoi jednak w sprzeczności z tą konsekwencją; pozostaje zatem tylko drugi przypadek $\alpha = \beta$, a ponieważ już dowiedziono, że, jakakolwiek mała byłaby wielkość dodatnia ε, to zawsze będzie ostatecznie $x < \alpha + \varepsilon$ oraz $x > \beta - \varepsilon$, więc x zbliża się do wartości granicznej α, czego należało dowieść".

9. Jaki jest matematyczny sens *Stetigkeit und irrationale Zahlen*? Przede wszystkim w rozprawie: (1) wprowadzono pojęcie przekroju zbioru liniowo uporządkowanego, (2) sformułowano zasadę supremum, (3) ciągłość stała się charakterystyką porządku liniowego.

Jaki jest jej filozoficzny sens? Spójrzmy na kilka stosowanych współcześnie sformułowań aksjomatu ciągłości.

(C1) Żaden przekrój Dedekinda zbioru $(\mathbb{F}, <)$ nie wyznacza luki.

(C2) Dla dowolnego, niepustego zbioru $A \subset \mathbb{F}$ ograniczonego z góry istnieje taka liczba $a \in \mathbb{F}$, że $a = \sup A$.

(C3) Dla dowolnego, niepustego zbioru $A \subset \mathbb{F}$ ograniczonego z dołu istnieje taka liczba $a \in \mathbb{F}$ taka, że $a = \inf A$.

(C4) $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym oraz dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset \mathbb{F}$ spełniającego warunek Cauchy'ego istnieje takie $a \in \mathbb{F}$, że $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

(C5) $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym oraz jeśli $\big\{A_n |\ n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathbb{F}$ jest rodziną przedziałów domkniętych takich, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $A_{n+1} \subset A_n$, to $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(C6) Dla dowolnego ograniczonego, nieskończonego zbioru $A \subset \mathbb{F}$ istnieje taki punkt $p \in \mathbb{F}$, że p jest punktem skupienia A[19], gdzie $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym.

Wszystkie wskazane wersje aksjomatu ciągłości wprost postulują istnienie pewnego punktu: supremum lub infimum zbioru, granicy ciągu, przecięcia rodziny zbiorów, punktu skupienia. Trzy pierwsze są związane z rozprawą Dedekinda, a C1 to „istota ciągłości". Warunek „nie istnieje luka" oznacza *de facto*, że każdy przekrój osi $(\mathfrak{R}, <)$ jest typu (3) lub (4).

(3) 

(4) 

Fig. 3. Przekroje osi liczb rzeczywistych

Definiując przekrój $(\mathfrak{R}, <)$ – lub niepusty i ograniczony podzbiór, lub ciąg rosnący, lub ciąg Cauchy'ego – na mocy C1 otrzymujemy pewien punkt. Dzisiaj tak właśnie definiowane są obiekty w analizie rzeczywistej: funkcje $\sqrt{\alpha}$, α^β, $\log \alpha$, czy pochodna funkcji, całka Riemanna, całka Lebesgue'a. Aksjomat C1 otworzył więc matematyce możliwość definiowania nowych obiektów. Ich istnienie wynika właśnie z aksjomatu, co z czasem doprowadziło do alternatywnych wersji rachunku różniczkowego rozwijanych w ramach różnych ruchów konstruktywistycznych.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail piotr.blaszczyk@up.krakow.pl

[19] Pojęcia topologiczne występujące w aksjomatach (C6) i (C7) związane są z topologią porządkową.