Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Zbigniew Powązka

Z badań nad wprowadzeniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych

Abstract. This article presents the author's research results concerning the teaching of introductory notions and theorems of mathematical analysis. The research was carried out among the first-year students of mathematics.

The main objects of the research were:

– the observation of the degree of assimilation of the basic notions and theorems by the students;

– the investigation of the students' progress in proving theorems and constructing suitable examples and counterexamples.

The final part of the article presents the research conclusions concerning the teaching of mathematical analysis of the first-year students of mathematics.

1. Wstęp

Analiza matematyczna należy do podstawowego kanonu przedmiotów na wszystkich typach studiów matematycznych. Znajduje ona zastosowania w różnych działach matematyki, a sukces w jej studiowaniu może w istotny sposób zależeć od matematycznego przygotowania ze szkoły średniej. Wprowadzona w roku 2002 reforma edukacji w szkołach ponadgimnazjalnych spowodowała zmniejszenie zakresu pojęć matematycznych potrzebnych do studiowania analizy matematycznej. Fakt ten stwarza określone wyzwania dla wykładowców tego przedmiotu i zwiększa trudności tak zwanego progu między szkołą ponadgimnazjalną a wyższą uczelnią. W związku z tym zagadnienia omawiane na zajęciach z analizy matematycznej, tempo wykładu, jak również stopień ogólności podawanego materiału powinny być związane z zasobem wiedzy wyniesionej przez studentów przyjętych na I rok studiów.

Zgodnie z obowiązującym planem studiów (http://www.ap.krakow.pl/mat/sprawydyd/PlanPrg) zajęcia z analizy matematycznej na pierwszym roku studiów w obu semestrach były prowadzone w wymiarze 2 godzin wykładu i 4 godzin ćwiczeń tygodniowo. Z zamieszczonego tam minimum programowego tego przedmiotu obowiązującego w roku 2003 wynika, że celem kursu jest przyswojenie przez studentów elementarnych działów analizy matematycznej, tzn. rachunku różniczkowego i całkowego funkcji rzeczywistej (jednej lub wielu zmiennych). Wybór materiału pozwala uwypuklić związki z innymi działami matematyki, takimi jak geometria, topologia, algebra, rachunek prawdopodobieństwa. Zatem w trakcie wykładu i ćwiczeń z tego przedmiotu należy z jednej strony wyposażyć studenta w podstawowe pojęcia niezbędne do studiowania matematyki, a z drugiej zapoznać go za podstawowymi metodami dowodzenia oraz sposobami przeprowadzania niezbędnych rachunków, takich jak obliczanie granic ciągów i funkcji, obliczanie pochodnych oraz całkowanie różnych typów funkcji.

Dla studiowania matematyki konieczne jest możliwie szybkie wdrażanie myślenia abstrakcyjnego, oderwanego od konkretnych modeli. Nie da się go jednak rozwijać bez sensownej podbudowy z analizy klasycznej. Bez niej studenci nie dysponują bowiem niezbędnymi pojęciami i przykładami, które można następnie uogólniać.

Konstrukcja zajęć z każdego przedmiotu matematycznego na wszystkich poziomach edukacji powinna opierać się na dobrze przemyślanych i odpowiednio sformułowanych celach nauczania matematyki. W literaturze z zakresu dydaktyki matematyki znaleźć można różne podejście do tych celów (Krygowska, 1977b, s. 47-65, 1981; Turnau, 1990, s. 28-37). W swej praktyce i na użytek tej pracy przyjmuję za podstawę cele sformułowane przez Z. Krygowską (1986). Autorka zdefiniowała trzy poziomy celów nauczania. Są nimi:

1. cele dotyczące podstawowych wiadomości i umiejętności w dziedzinie matematyki;
2. cele dotyczące postaw i zachowań specyficznych dla aktywności matematycznej oraz elementów metodologii matematyki;
3. cele związane z kształtowaniem postaw i zachowań intelektualnych funkcjonujących poza aktywnością matematyczną, rozwijane przez transfer postaw i specyficznych zachowań do innych dziedzin wiedzy.

Wynikają z nich następujące istotne komponenty wiedzy przekazywanej przez nauczyciela:

– treści nauczania, określone w programie przedmiotu, rozumiane tu jako wiadomości podawanie słuchaczom;
– umiejętności, rozumiane tu jako techniki intelektualne, czyli metody podejścia do aktywnego rozwiązywania problemów, w tym również metody dowodzenia i sposoby rozwiązywania typowych zadań, odkrywanie analo-

gii między pojęciami, konstruowanie przykładów i kontrprzykładów (por. Nowak, 1989, s. 144);

– język, rozumiany tu jako zespół reguł i symboli, w którym formułuje się definicje i twierdzenia teorii oraz opisuje się przy ich pomocy zagadnienia pokrewne.

W czasie prowadzenia zajęć (wykładu i ćwiczeń) dokonuje się w umyśle słuchaczy proces poznawczy. J. Kozielecki uważa, że:

> człowiek jest pewnym układem poznawczym, który przetwarza informacje (information processing system). Przyjmuje informacje ze świata zewnętrznego, czyli spostrzega, koduje je w pamięci trwałej, wreszcie operuje tymi informacjami czyli myśli.
>
> (Kozielecki, 1976, s. 183)

Powstaje wtedy w umyśle słuchacza swoisty obraz wykładanej teorii, złożony z obrazów poszczególnych pojęć w niej występujących. Przez obraz pojęcia (concept image) rozumiemy tu pewne schematy myślowe, reguły postępowania, intuicje i fakty przyjęte za prawdziwe w wyniku logicznej analizy lub zaakceptowane jako obowiązujące, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami. (Bugajska-Jaszczołt, 2001; Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Przeniosło, 2001; Tall, Vinner, 1981)

Adekwatność obrazów poszczególnych pojęć z tymi pojęciami zależy od możliwości poznawczych i motywacji poszczególnych odbiorców oraz dydaktycznych umiejętności prowadzących zajęcia.

Proces ten można przyrównać do serii zdjęć wykonanych spontanicznie w różnych okolicznościach tym samym aparatem przez osoby posiadające niejednakowe umiejętności fotograficzne. Dopiero po obróbce tych fotografii, przy zastosowaniu stosownych technik, otrzymujemy obrazy o możliwie wysokiej jakości.

Podczas studiowania przedmiotu, jak również przy spiralnej koncepcji nauczania, w wyniku powracania do poszczególnych pojęć w różnym stopniu ogólności może ukształtować się w świadomości studenta właściwy obraz pojęcia. Proces ten jest jednakże długi. O tym, czy rzeczywiście nastąpił, możemy dowiedzieć się przez badanie skuteczności uczenia, do której W. Nowak zalicza: wiedzę werbalną, techniki intelektualne, strategie poznawcze, postawy i techniki motoryczne (Nowak, 1989, s. 145).

W. Nowak (1989, s. 145) cytując prace psychologa J. Lompschera twierdzi, że na wiedzę werbalną składają się cztery rodzaje wiadomości. Są one ściśle uzależnione od siebie i nawzajem się przenikają. Należą do nich:

– znajomość faktów (treści),
– znajomość sposobów działania (np. algorytmów),
– znajomość przepisów działania (np. reguł postępowania),
– znajomość kryteriów oceny.

Badania tego psychologa wskazują na wyraźne związki między wiadomościami i umiejętnościami.

Przez techniki intelektualne rozumie się tu za E. Wittmannem (Wittmann, 1975, s. 39-40; Krygowska, 1981, s. 47-52):

– klasyfikowanie,
– porządkowanie,
– specyfikowanie,
– posługiwanie się analogiami,
– formalizowanie.

Wśród strategii poznawczych wyróżnia się (Krygowska, 1981, s. 50):

– argumentowanie – rozumiane tu jako uzasadnianie, logiczne porządkowanie rozumowań zgodne z definicją pojęć lub z założeniami twierdzeń, kontrolowanie poprawności rozumowań i dowodów, odrzucanie błędnych hipotez przez konstruowanie kontrprzykładów;
– twórczą postawę w stosunku do zadań i problemów – charakteryzującą się przekształcaniem sytuacji problemowej, jej przedłużaniem, odkrywaniem nowych możliwości, wychodzeniem poza posiadane informacje, samodzielnym poszukiwaniem dróg rozwiązania problemów;
– matematyzowanie sytuacji, w szczególności sytuacji rzeczywistych z otaczającego świata.

Opierając się na psychologii działania stwierdzić należy za Z. Krygowską (1977a, s. 85), że *źródłem abstrakcyjnych operacji matematycznych w procesie poznawczym jest w pierwszym rzędzie działający podmiot*, którym w naszym przypadku są studenci. Zatem aktywna postawa w zdobywaniu wiedzy, umiejętnie kierowana i inspirowana przez prowadzących zajęcia, w najskuteczniejszy sposób prowadzi do osiągania przez studentów pożądanych efektów dydaktycznych. Trafnie charakteryzuje ten proces A. Sierpińska jako:

> budowanie stałego wzajemnego oddziaływania między uczniem a sytuacjami problemowymi, oddziaływania dialektycznego, w którym angażowałby swoją poprzednią wiedzę, poprzednie koncepcje, poddawał rewizji, modyfikował, uzupełniał lub odrzucał w celu wykształcenia nowych koncepcji.
>
> (Sierpińska, 1985)

Wynika stąd postulat prowadzenia zajęć w inny niż klasyczny sposób, w którym student jedynie biernie rejestruje, a następnie odtwarza podane treści.

Jak pokazują przeprowadzone przeze mnie badania wśród studentów I semestru studiów matematycznych w Akademii Pedagogicznej w Krakowie, każda z wyróżnionych przez J. Lompschera składowych wiedzy werbalnej sprawia studentom I roku określone trudności. Pewną pomocą w tworzeniu poprawnych obrazów opracowywanych pojęć mogą być właściwie użyte kalkulatory lub komputery wyposażone w stosowne programy (np. Derive, Mathematica). One jednak przede wszystkim przyspieszają rachunki lub demonstrują wykresy. Nie zastąpią zatem dowodów zaobserwowanych prawidłowości. Z tym jest najtrudniej. Dużą przeszkodę stanowią tu również ciągle reformowany program edukacji szkolnej, w wyniku którego kandydaci na studentów rokrocznie dysponują mniejszym doświadczeniem w posługiwaniu się dedukcją.

W roku akademickim 2003/2004 prowadziłem wykład i ćwiczenia z analizy matematycznej na I roku matematyki. W trakcie tych zajęć podjąłem badania dotyczące:

– stopnia opanowania przez studentów podstawowych pojęć i twierdzeń,
– kształtowania się umiejętności dowodzenia twierdzeń,
– konstruowania stosownych przykładów i kontrprzykładów.

W niniejszym artykule pragnę opisać wyniki moich badań. Narzędziem badawczym były, obok naturalnej obserwacji postaw studentów, analiza wytworów ich działania wykonana na podstawie prac z egzaminu pisemnego po I semestrze, obserwacja indywidualna podczas rozmowy egzaminacyjnej oraz ankieta sondażowa dotycząca przygotowania ze szkoły średniej do studiowania matematyki, a także zainteresowań i trudności napotkanych w zgłębianiu treści z analizy matematycznej. Duża grupa studentów poddana egzaminowi po pierwszym semestrze (145 osób) i ankietowanych na początku drugiego semestru (70 osób) pozwala na sformułowanie pewnych hipotez badawczych.

2. Cele i zadania pracy

Badania prowadzone były w czasie, gdy w szkole podstawowej i gimnazjum wdrażano już reformę edukacji. Jednym z jej celów jest odejście od tradycyjnego nauczania, polegającego na przekazywaniu tzw. wiedzy encyklopedycznej na rzecz rozwijania aktywności poznawczej i twórczej u dzieci i młodzieży. Aby jednak nauczyciele mogli realizować takie nauczanie, sami muszą zdobyć stosowne doświadczenie. Jak pisze B. Nowecki:

> Nauczyciel, który ma „wszechstronnie rozwijać każdego ucznia na każdym przedmiocie", bez wyposażania go w „wiedzę encyklopedyczną", musi poznać taki sposób pracy z uczniami z autopsji, musi sam przeżyć ten proces. Obowiązkiem organizatorów [prowadzących różnego typu studia nauczycielskie] jest mu to umożliwić.
>
> (Nowecki, 2004)

Obserwacja większości zajęć, prowadzonych w wyższych uczelniach, a także w wielu jeszcze szkołach podstawowych, gimnazjach i ponadgimnazjalnych pokazuje, że nauczanie jest tradycyjne, tzn. nauczani otrzymują od prowadzącego zajęcia pewną ilość wiadomości, przyswajają je nierzadko „na pamięć" bez głębszego zrozumienia, następnie zdają egzamin i w efekcie końcowym zapominają zdecydowaną większość wyuczonych treści.

Celem niniejszych badań wstępnych była próba takiej organizacji zajęć, aby ograniczyć podawanie encyklopedycznej wiedzy na rzecz rozbudzania zainteresowań i motywacji do samodzielnego rozwijania działalności poznawczej. Jest oczywiste, że każdy wykład musi zawierać sporo nowych treści. Nie da się bowiem operować pojęciami bez znajomości ich definicji i wzajemnych związków między nimi. Istotne jest jednak właściwe kształtowanie tych pojęć w świadomości słuchacza. Odbywa się ono w wyniku procesów myślowych, które zachodzą w świadomości studenta. Z. Krygowska bardzo mocno akcentuje ten fakt:

> myślenie w dziedzinie matematyki nie jest kontemplacją, ale dynamicznym systemem – ostrzej niż w innych dziedzinach – sprecyzowanych w świadomości operacji.

Z tego powodu uważa autorka, że:

> jest dużo słuszności w lapidarnym stwierdzeniu (...) „matematyka – to w mniejszym stopniu wiedzieć, co umieć działać".
>
> (Krygowska, 1977a, s. 85)

Jak słusznie zauważa B. Nowecki, takie nauczanie wymaga

> konstrukcji planów studiów, programów nauczania, doboru metod pracy ze studentami, organizacji zajęć, zapewnienia odpowiedniej literatury i innych materiałów dydaktycznych, konsultacji indywidualnych i zbiorowych, podejmowania prób własnych ze strony słuchaczy itp.
>
> (Nowecki, 2004)

W moich badaniach byłem związany planem studiów i programem nauczania. Pozostałe, wspomniane wyżej, komponenty mogłem kształtować według własnej koncepcji. Została ona opisana szczegółowo w paragrafach 4 i 5. Posłużyłem się tu zasadami, które sformułowała Z. Krygowska (1975) w wyniku międzynarodowych dyskusji na temat nauczania matematyki (por. także Nowecki, 2004). Cytuję:

> Można z tych dyskusji wyłowić następujące jądro:
> 1. Wiadomości racjonalne i bardzo oszczędnie wybrane (...) treści bardzo dobrze i w sposób przemyślany zintegrowane. Sprawności również racjonalnie ograniczone, ale umożliwiające swobodne posługiwanie się posiadanymi wiadomościami (...).
> 2. Rozumienie formalnego charakteru matematyki jako nauki o wieloznacznych schematach i tym samym rozumienie stosunku matematyki do innych dziedzin rzeczywistości.
> 3. Rozumienie prostych pojęć metodologicznych jak definicja, twierdzenie, warunek, dowód itp.
> 4. Elementarne, podstawowe doświadczenia w matematycznym działaniu (abstrahowanie, schematyzowanie, matematyzowanie, dedukowanie, odkrywanie prostych wniosków ilościowych i jakościowych i opisywanie ich w matematycznym języku, kodowanie i posługiwanie się symboliką, graficznymi schematami, rzeczywistymi i pomyślanymi modelami, racjonalne organizowanie danych problemu itp.).

5. Umiejętność poprawnego wyrażania własnych, matematycznych myśli (definiowanie w określonym języku pojęć intuicyjnie ujętych, jasne przedstawianie ogniw rozumowania, formułowanie pytań czy problemów itp.).
6. Opanowanie najprostszych elementów techniki uczenia się matematyki (umiejętność czytania tekstu matematycznego, kontrolowanie rezultatów własnej pracy, poszukiwanie i poprawianie błędów w tej pracy, ostrożność i krytycyzm w ocenianiu wyników itp.).

(Krygowska, 1975)

Przystępując do realizacji wspomnianego wyżej celu, sformułowano następujące zagadnienia badawcze:

1. Jakie było przygotowanie studentów do studiowania matematyki, w szczególności analizy matematycznej i jakie były ich motywacje do studiowania matematyki (paragrafy 3 i 6.2.1).
2. W jaki sposób zmieniona koncepcja prowadzenia zajęć pomogła studentom w poznawaniu treści i metod analizy matematycznej, (paragrafy: 6.2.2, 6.2.3, 6.2.5).
3. Na jakie trudności napotkali studenci w pierwszym semestrze studiów matematycznych, a w szczególności podczas studiowania analizy matematycznej (paragrafy: 6.1, 6.2.4, 6.2.6).
4. Na ile wykorzystywali poleconą im literaturę przedmiotu (paragraf 6.2.7).

3. Charakterystyka badanych

W tej części pracy przedstawiona zostanie analiza populacji studentów, przystępujących do egzaminu po I semestrze I roku studiów, ze względu na ich osiągnięcia z analizy matematycznej uzyskane w trakcie ćwiczeń oraz wyniki egzaminu.

Ponadto zaprezentowane zostaną także opinie studentów, uzyskane we wspomnianej wyżej ankiecie sondażowej, na temat ich motywacji do podjęcia studiów na kierunku matematyka (pytanie 3) oraz ich doświadczeń i preferencji w stosunku do działów matematyki w szkole średniej (pytanie 2).

W wyniku rekrutacji w roku 2003 na I rok studiów matematycznych w Akademii Pedagogicznej w Krakowie przyjęto 188 osób. W tabeli 1 podano, jakie szkoły ukończyli ci studenci.

Z przedstawionych danych wynika, że zdecydowana większość studentów, to absolwenci liceów ogólnokształcących. Nie omawiamy tu osiągnięć, jakie uzyskali podczas egzaminu wstępnego, gdyż zostały one już opublikowane (por. Ciesielska, Czaplińska, Powązka, 2004).

W tabeli 2 podano wyniki, jakie osiągnęli studenci na koniec pierwszego semestru z analizy matematycznej. Wynika z niej, że z ogólnej liczby 188 słuchaczy zaliczenie uzyskało w terminie 167 osób, a w sesji jeszcze 11 osób. Zatem jedynie 10 studentów nie zaliczyło tego przedmiotu i musiało przerwać studia na kierunku matematyka.

Tabela 1. Rodzaj szkół średnich ukończonych przez studentów

Rodzaj szkoły	Liczba studentów	Procent ogółu przyjętych
Liceum ogólnokształcące	172	91,46%
Liceum techniczne lub technikum	8	4,26%
Technikum lub liceum ekonomiczne	5	2,66%
Absolwenci po tzw. „nowej maturze” w roku 2002	1	0,53%
Osoby studiujące drugi kierunek	2	1,06%
RAZEM	188	100,00%

Tabela 2. Wyniki egzaminu z analizy matematycznej po I semestrze

Lp.	Ocena	Zaliczenie		Egzamin pisemny		Egzamin ustny	
		przed sesją	w sesji	I termin	II termin	I termin	II termin
1.	ndst	29		80	4	46	6
2.	dst	74		49	29	53	30
3.	+dst	19	11	5	7	22	14
4.	db	31		11	10	17	
5.	+db	14				6	
6.	bdb					1	
RAZEM		167	11	145	50	145	50

Egzamin w pierwszym terminie zdało na ocenę pozytywną 99 osób, a w sesji poprawkowej jeszcze 44 studentów. Zatem rezultat uzyskany na egzaminie można uznać za zadawalający, gdyż łącznie 143 słuchaczy zdało ten egzamin (na 188 wszystkich, którzy zaczynali studia).

Na początku drugiego semestru poproszono studentów o wypełnienie ankiety (załącznik nr 1). Ankieta była anonimowa. Wypełniło ją 70 studentów. Z odpowiedzi na pytanie 1 tej ankiety wynika, że w tej liczbie znalazło się 27 absolwentów klas matematycznych z liceów ogólnokształcących (grupa I), 28 osób z klas licealnych o profilu ogólnym (grupa II) oraz 15 studentów z różnego typu techników i klas licealnych o profilu biologiczno-chemicznym (grupa III).

Odpowiedzi na pozostałe pytania ankiety będą w ciągu dalszym analizowane w każdej z tych grup.

Rysunek 1 przedstawia odpowiedź na pytanie 2 ankiety. W pytaniu tym studenci wskazywali swoje preferencje w stosunku do poszczególnych działów matematyki szkolnej. Na tym rysunku na osi poziomej oznaczono liczbami od 1 do 13 następujące działy:

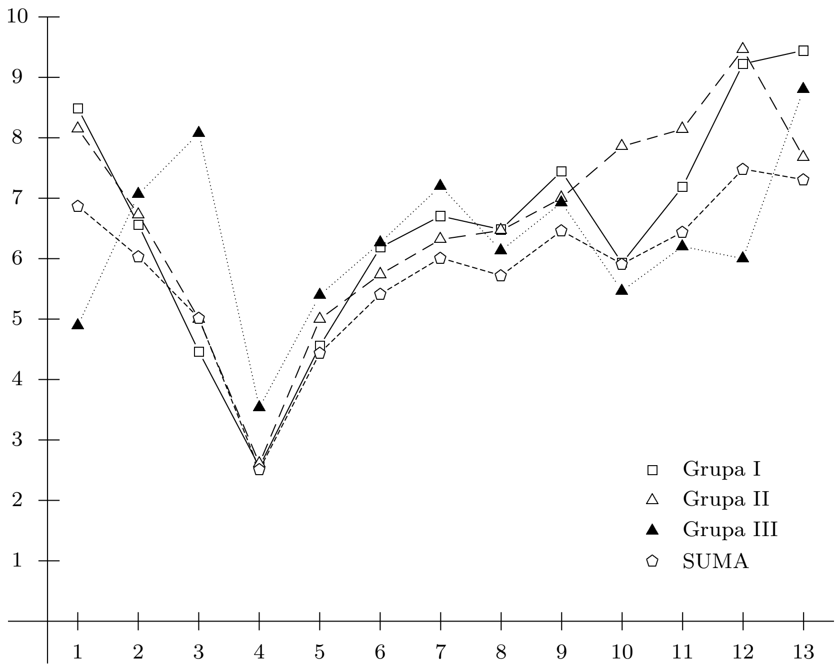
1 – elementy logiki,
2 – badanie własności funkcji bez użycia pochodnej,
3 – badanie funkcji z wykorzystaniem rachunku różniczkowego,
4 – równania i nierówności liniowe i kwadratowe,
5 – równania i nierówności z wartością bezwzględną,
6 – równania i nierówności wielomianowe i wymierne,
7 – równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne,
8 – ciągi arytmetyczne i geometryczne,
9 – badanie granic ciągów liczbowych,
10 – geometria analityczna,
11 – planimetria,
12 – stereometria,
13 – rachunek prawdopodobieństwa.

Na osi pionowej zaznaczono średnią liczbę punktów, jakie przypisywali studenci poszczególnym działom z zachowaniem zasady, że im mniejsza liczba, tym bardziej ulubione zagadnienia.

Na tym wykresie przedstawiono trzy łamane prezentujące uzyskane wyniki w poszczególnych grupach badanych oraz czwartą (oznaczoną nazwą „suma”, która przedstawia wyniki uzyskane w całej grupie badanych. Analizując te wyniki zauważamy, że działy 4, 5, 6, 7 i 8 są jednakowo lubiane przez wszystkie grupy badanych (w przedziale $[4,8]$ wykresy niewiele odchylają się od siebie). Zasadnicze różnice pojawiają się w przedziale $(8,13]$ i nieco mniejsze w przedziale $[1,4)$. Spróbujmy zastanowić się nad przyczynami takiej sytuacji.

Na tym wykresie przedstawiono trzy łamane prezentujące uzyskane wyniki w poszczególnych grupach badanych oraz czwartą (oznaczoną nazwą „suma”, która przedstawia wyniki uzyskane w całej grupie badanych. Analizując te wyniki zauważamy, że działy 4, 5, 6, 7 i 8 są jednakowo lubiane przez wszystkie grupy badanych (w przedziale $[4,8]$ wykresy niewiele odchylają się od siebie). Zasadnicze różnice pojawiają się w przedziale $(8,13]$ i nieco mniejsze w przedziale $[1,4)$. Spróbujmy zastanowić się nad przyczynami takiej sytuacji.

Działy 4, 5, 6, 7 i 8, to typowe działy rachunkowe związane z ćwiczeniem umiejętności stosowania algorytmów do rozwiązywania problemów. Najbardziej ulubione przez wszystkich respondentów są równania oraz nierówności pierwszego lub drugiego stopnia z jedną niewiadomą, a następnie równania i nierówności z wartością bezwzględną. Wyniki uzyskane w poszczególnych grupach są nieco zróżnicowane, ale jest to zrozumiałe, gdyż w klasach matematycznych zagadnienia te omawia się dokładniej niż w klasach o profilu ogólnym lub biologiczno-chemicznym czy w technikum. Zapewne ankietowani mieli tu na myśli proste zadania bez dyskutowania równań i nierówności z parametrem. Jak wskazują bowiem badania J. Czaplińskiej (2003a), z tego typu równaniami ci sami respondenci mieli duże trudności.



Rysunek 1

Nie dziwią także preferencje studentów w stosunku do równań i nierówności wielomianowych, wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych oraz do badania wykresów funkcji przy pomocy pochodnej. Ten materiał jest w dużej mierze związany z wykonaniem sporej ilości w miarę prostych rachunków, co jest dla młodzieży łatwiejsze od zagadnień wymagających przeprowadzania rozumowań (np. badanie własności funkcji bez użycia pochodnej). W tym zagadnieniu należy posłużyć się formalnymi definicjami poszczególnych własności funkcji i często zastosować rozumowanie pojęciowe, a nie algorytmiczne (Turnau, 1990, s. 59-61). Zauważmy, że na maturze nie pojawiają się już zadania z zastosowaniem pochodnych, część młodzieży z grupy trzeciej, mająca zapewne niewiele okazji do stosowania tego aparatu, uważa go za trudny i nielubiany.

Interesujący jest rozrzut preferencji w pozostałych, wymienionych wyżej zagadnieniach. Najbardziej nielubianym działem jest stereometria w pierwszej i drugiej grupie badanych, czego nie potwierdzają ankietowani z grupy trzeciej. Fakt ten można tłumaczyć np. tym, że w klasach matematycznych lub o profilu ogólnym rozwiązuje się dużo trudniejsze zadania stereometryczne niż w pozostałych typach szkół.

Absolwenci klas matematycznych oraz respondenci z grupy trzeciej ujawnili również swoje pozytywne nastawienie do geometrii analitycznej. Może nieco dziwić odmienne stanowisko uczniów z klas o profilu ogólnym, ale wobec stosunkowo niedużej liczb osób, można potraktować to jako błąd statystyczny.

Ciekawe są również różne preferencje dotyczące rachunku prawdopodobieństwa. Nie ma on w całej populacji bardzo złych notowań, chociaż ankietowani z klas matematycznych zdecydowanie nie lubią tego działu. Nic też dziwnego, że zadania egzaminacyjne z tych działów nie wypadają najlepiej (por. Major, 1996).

Respondenci nie lubią na ogół elementów logiki matematycznej. Zaskakują natomiast preferencje tego działu przez uczniów z trzeciej grupy.

Ankieta ujawniła również fakt, że zbliżająca się reforma egzaminu maturalnego wpływa na obniżanie się poziomu merytorycznego zajęć z matematyki w szkole średniej. Na 70 osób biorących udział w ankiecie, 18 słuchaczy nie poznało w szkole elementów logiki matematycznej, 4 osoby nie zajmowały się badaniem własności funkcji elementarnych bez użycia pochodnej, 9 studentów nie poznało podstaw rachunku różniczkowego, 2 studentów nie poznało sposobów obliczania granic ciągów oraz dwu respondentów nie rozwiązywało równań i nierówności wielomianowych i wymiernych. Należy przypuszczać, że w latach następnych problem ten będzie się nasilał.

W odpowiedzi na pytanie 3 ankiety studenci ujawnili również swoje motywacje wyboru kierunku studiów.

Można podzielić je na następujące grupy:

a) Motywy tkwiące w samej matematyce.

   Zaliczam do nich zainteresowania wywołane różnymi problemami, jak również zaskakującymi i interesującymi sposobami ich rozwiązywania oraz fascynację logiczną budową przedmiotu, dzięki której, jak pisze jeden z respondentów, *nie trzeba bezsensownie zapamiętywać treści bez ich zrozumienia, ale można je wyprowadzić i uzasadnić.*

   Pojawiły się wśród zainteresowań również takie, które były związane z rozwiązywaniem zadań jako przygotowanie do różnych konkursów matematycznych. Zaliczam je do tej grupy, gdyż zadania konkursowe w istotny sposób wykraczają poza program szkolny.

b) Motywy tkwiące w nauczaniu matematyki na poziomie szkolnym.

Wymienić tu należy częste stwierdzenie studentów (18 osób), że *matematyka nie stwarzała im trudności* lub *umieli ją lepiej niż inne przedmioty*. Niektórzy z respondentów ocenili za właściwe swoje przygotowanie ze szkoły średniej do studiów matematycznych. Jedna z absolwentek liceum ekonomicznego napisała, że wybrała studiowanie matematyki, ponieważ była dobra z tego przedmiotu w swej klasie. Z grona 70 respondentów, 25 osób deklarowało, że bardzo lubi matematykę, ale nie zawsze uzasadniali z jakich powodów. Warto odnotować wypowiedzi, które uzasadniały swój matematyczny sentyment zamiłowaniem do rozwiązywania wielu zadań. Nie ujawnili, niestety, jakiego typu zadania mieli na myśli. Analiza odpowiedzi na pytania ankiety potwierdza zatem słuszność stwierdzenia Z. Krygowskiej (1977c, s. 3) że *uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań.*

Pojawiło się również wyjaśnienie w pewnym sensie negatywne: *nie lubię innych przedmiotów, lubię matematykę.*

c) Motywy tkwiące w aspiracjach studentów dotyczących ich przyszłego życia zawodowego.

Stosunkowo niewielka grupa ankietowanych (16 osób) wybrała studia na uczelni pedagogicznej, gdyż chce w przyszłości uczyć matematyki. Powołują się tu oni niekiedy na wzorce swych nauczycieli lub rodziców. Trzy osoby przyznaje się nawet do swych rodzinnych powiązań z wybranym zawodem. Wśród nich są osoby, które przyznają się do pomocy innym, młodszym od siebie w uczeniu się matematyki. Są jednak i tacy, którzy wiążą z wybranym kierunkiem studiów nadzieję na dobrą pracę poza szkołą. Ale należy odnotować tu stwierdzenie: *chcę być matematykiem, ale nie nauczycielem.*

d) Motywy wynikające z osobowości studenta.

Pragnę tu wymienić kilka stwierdzeń świadczących o pewnej dojrzałości ich autorów. Zaliczam do nich między innymi deklarowaną chęć rozwijania swoich umiejętności matematycznych, chęć sprawdzenia własnych możliwości i wiadomości oraz stwierdzenie o ścisłości własnego umysłu. Obok tych wypowiedzi znalazły się i takie, które deklarują realizację marzeń o studiowaniu matematyki, jak również pewnego buntu w stosunku do podstawowej umiejętności, jaką jest czytanie. Student pisze: *nie lubię czytać i uczyć się z książek, a w matematyce tego nie trzeba robić.*

4. Organizacja i przebieg badań

Badania, o których mowa w paragrafie pierwszym tej pracy, były prowadzone na I roku matematyki w roku akademickim 2003/04. Złożyły się na nie:

– metody prowadzenia zajęć z analizy matematycznej,
– bieżąca kontrola postępów studentów,
– egzamin pisemny i ustny,
– ankieta sondażowa.

Metody prowadzenia przedmiotu i egzaminowania nie odbiegały od tradycji akademickiej, ale jak się okaże w dalszej części tej pracy, zawierały elementy, które miały pomóc studentom w wyrównaniu różnic w przygotowaniu ze szkoły średniej oraz we wdrożeniu do samodzielnego studiowania i własnej twórczej pracy studenta.

Jak już wspomniano powyżej, zajęcia były prowadzone w wymiarze 2 godzin wykładu i 4 godzin ćwiczeń tygodniowo (por. www.ap.krakow.pl/mat/sprawydyd/PlanPrg). W związku z dużą ilością studentów zajęcia prowadzone były w auli, mogącej pomieścić ponad 200 osób. Ponieważ sala ta nie jest całkowicie przygotowana do prowadzenia wykładu z użyciem tablicy, postanowiłem dostarczać studentom scenariusz wykładu zawierający podstawowe definicje i twierdzenia oraz odsyłacze do literatury. Studenci otrzymali w sumie 11 scenariuszy. Dwa przykładowe znajdują się w załączniku nr 2. Materiały te miały pomóc w sporządzaniu własnych notatek z wykładu, a także w przygotowaniu do egzaminu.

Ćwiczenia były prowadzone w siedmiu grupach. Nie jest oczywiście możliwe, aby wszystkie grupy były prowadzone przez tę samą osobę. Dla zapewnienia więc w miarę porównywalnego sposobu prowadzenia zajęć pozostał jedynie stały kontakt wykładowcy z prowadzącymi ćwiczenia, polegający na systematycznej wymianie doświadczeń. Przeciętnie dwa razy w miesiącu wymienialiśmy z prowadzącymi zestawy zadań i problemów, opracowywanych na zajęciach w poszczególnych grupach. Zestawy były opracowywane zarówno przez prowadzących ćwiczenia jak i wykładowcę. W związku z dużą liczbą uczestników zespołu przedmiotowego (7 osób), każdy z nas przygotował co najmniej jedną listę zagadnień do wybranego tematu. Listy te stanowiły podstawę do budowania w każdej grupie listy zadań i problemów przeznaczonych dla studentów. Nie były one zawsze jednakowe dla całego roku, ale zawsze zawierały wspólne elementy dotyczące zagadnień podstawowych dla realizacji programu wykładu. Prowadzący ćwiczenia otrzymywali również scenariusze wykładu. W ten sposób staraliśmy się równolegle rozwijać niezbędne aktywności u studentów i panować nad poziomem oraz tempem opracowywanego materiału. Ponieważ prowadzącymi ćwiczenia byli doświadczeni nauczyciele akademiccy, pozostawiłem im swobodę w doborze form prowadzenia zajęć i liczby kartkówek. Umówiliśmy się jedynie, że studenci napiszą dwa dłuższe sprawdziany oraz co najmniej trzy kilkunastominutowe kartkówki ze znajomości definicji i twierdzeń z wykładu. Sporadycznie hospitowałem zajęcia najmłodszych kolegów. Jak wykazała ankieta, mimo tych zabiegów niektórzy studenci narzekali na przeznaczenie zbyt małej ilości czasu na ćwiczeniach na niektóre pojęcia (por. 5.2). Mogło to jednak wynikać ze słabego przygotowania studentów do studiowania matematyki.

Ważnym etapem w opisywanych badaniach był egzamin. Składał się on z części pisemnej i ustnej. W części pisemnej (tematy zamieszczono w załączniku nr 5) sprawdzane były podstawowe umiejętności niezbędne w studiowaniu matematyki, a w szczególności analizy matematycznej takie, jak:

a) poprawne posługiwanie się definicją (np. kresu zbioru, granicy ciągu liczbowego),
b) sporządzanie wykresów funkcji (ze szczególnym uwzględnieniem funkcji definiowanych przy pomocy wartości bezwzględnej),
c) stosowanie twierdzeń (np. do obliczania granic ciągów liczbowych),
d) przeprowadzanie prostych rozumowań z wykorzystaniem poznanych twierdzeń (np. twierdzenia o indukcji),
e) konstruowania przykładów i kontrprzykładów (np. przy uzasadnianiu pojęcia symbolu nieoznaczonego).

Studenci rozwiązywali 6 zadań w czasie dwu jednostek lekcyjnych. Dokładne omówienie tematów znajduje się w następnym paragrafie tej pracy.

W trakcie egzaminu ustnego studenci odpowiadali na pytania dotyczące wykładanego materiału. Każdy z nich dostawał trzy pytania, przy czym jedno losował z listy zamieszczonej w aneksie (załącznik nr 6). Dwa pozostałe zadawałem osobiście po usłyszeniu odpowiedzi na pierwsze pytanie. Dotyczyły one przede wszystkim powiązania lub przedłużania faktów z wylosowanego pytania z pozostałym materiałem wykładowym. Studenci, przygotowując się do odpowiedzi na wylosowane pytanie, mieli obowiązek przygotować dowód twierdzenia występującego w temacie pytania. Rozmowa egzaminacyjna trwała około 30 minut.

Na początku letniego semestru zwróciłem się do studentów z prośbą o wypełnienie ankiety sondażowej. Zawarte w niej pytania dotyczyły opinii studentów na temat ich przygotowania ze szkoły średniej do studiowania analizy matematycznej, sposobu prowadzenia wykładu i ćwiczeń z analizy matematycznej, trudności w studiowaniu przedmiotu oraz opinii o dostarczanych im materiałach dydaktycznych.

5. Metody i narzędzia badawcze

Podstawową metodą badawczą zastosowaną w opisywanych badaniach była metoda obserwacji. Polegała ona na tym, że prowadzący wykład, po dokładnym zapoznaniu się z różnymi sposobami realizacji materiału oraz analizie potencjalnie posiadanej wiedzy studentów, zdecydował się na pewien sposób ogólności i poziom abstrakcji wykładu, dostosowany jego zdaniem, do możliwości intelektualnych studentów. Zaproponował do swego wykładu stosowną literaturę (podręcznik i zbiory zadań).

Następnie wykładowca obserwował reakcje słuchaczy, ich frekwencję i aktywność na wykładzie i ćwiczeniach, utrzymywał ścisły kontakt z prowadzącymi ćwiczenia w celu orientacji w postępach i trudnościach studentów. Celem odsubiektywizowania obserwacji w prowadzonej przez siebie grupie ćwiczeń przeprowadzał krótkie kartkówki i dłuższe kolokwia (tematy wraz z punktacją w załączniku nr 4). Na podstawie analizy wyników tych prac mógł się orientować się w postępach studentów. Prace pisemne zajęły jednak niewielką część czasu ćwiczeń. Najwięcej czasu na tych zajęciach przeznaczono na dyskusję ze studentami i poszukiwanie przez nich rozwiązań dostarczonych im zadań i problemów. Uczestnicy ćwiczeń otrzymywali wcześniej listy zagadnień, a na zajęciach dobrowolnie („na ochotnika") referowali swoje wyniki. Mogli również korzystać z cotygodniowych konsultacji u wykładowcy i prowadzących ćwiczenia. W ten sposób wykładowca starał się aktywizować słuchaczy do studiowania i samodzielnego poszukiwania dróg rozwiązywania problemów. Podobnie prowadzone były zajęcia w pozostałych grupach.

Ważnym sprawdzianem osiągnięcia pożądanych wyników nauczania były egzaminy: pisemny i ustny. Dostarczyły one szeregu interesujących spostrzeżeń dotyczących tak realizacji przedmiotu, jak również sposobu studiowania i przyswajania przez studentów wykładanego materiału. Potwierdzeniem tych obserwacji była wspomniana wyżej ankieta sondażowa.

Omówimy teraz poszczególne narzędzia badawcze.

5.1. Tematyka i organizacja wykładu

Zgodnie z obowiązującym w 2003 roku programem analizy matematycznej (www.ap.krakow.pl/mat/sprawydyd/PlanPrg) należało omówić w pierwszym semestrze następujące zagadnienia:

- liczby rzeczywiste (aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych, zbiory ograniczone i nieograniczone, kresy zbioru, twierdzenie o indukcji, nierówność Bernouliego, aksjomat ciągłości i jego konsekwencje, nieograniczoność zbioru liczb naturalnych, istnienie cechy liczby rzeczywistej);
- odwzorowania (pojęcie funkcji, dziedzina, przeciwdziedzina, obraz i przeciwobraz zbioru przez funkcję, parzystość, nieparzystość i okresowość funkcji, ograniczoność i nieograniczoność, surjekcja, injekcja i bijekcja, składanie i odwracanie funkcji, funkcje cyklometryczne, ciągi i podciągi, przeliczalność i nieprzeliczalność wybranych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych);
- teoria granic (pojęcie granicy właściwej i niewłaściwej ciągu liczbowego, zbieżność, monotoniczność i ograniczoność ciągu, działania w zbiorze ciągów zbieżnych do granicy skończonej lub do nieskończoności, twierdzenie o trzech ciągach, liczba e, ciągi Cauchy'ego i ich własności, twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, granice jednostronne i granica górna i dolna ciągu

liczbowego, definicja Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji, działania na granicach funkcji, symbole nieoznaczone);
- ciągłość funkcji (pojęcie funkcji ciągłej w punkcie i w zbiorze, działania na funkcjach ciągłych, własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych i spójnych).

Przy każdym z czterech podstawowych tematów wykładu podano w nawiasie najważniejsze treści, które pojawiły się w danym temacie. Opierając się na badaniach dydaktyków matematyki (Nowecki, 1985; Sierpińska, 1985) wiele starań na wykładzie poświęcono kształtowaniu podstawowych pojęć analizy matematycznej. Bez właściwego rozumienia tych pojęć nie jest bowiem możliwe osiągnięcie zadowalających efektów w dalszym studiowaniu analizy matematycznej i innych działów matematyki. Dobre zrozumienie pojęć realizuje się nie tylko w czasie analizowania przykładów i kontrprzykładów, lecz także podczas poznawania ich własności i dowodzenia różnych twierdzeń z nimi związanych. Stąd też prezentowano studentom podstawowe metody dowodzenia twierdzeń, oparte na korzystaniu z:

- aksjomatów zbioru liczb rzeczywistych (w szczególności aksjomatu ciągłości),
- definicji poszczególnych pojęć (np. własności funkcji, granicy ciągu i funkcji, ciągłości funkcji),
- innych twierdzeń (np. twierdzenia o indukcji, własności wartości bezwzględnej).

Dużo uwagi poświęcono również kształtowaniu poprawnego języka matematycznego, zapisywaniu definicji, twierdzeń i dowodów z użyciem symboliki matematycznej i reguł logiki (poprawne używanie kwantyfikatorów i ich zaprzeczanie). Z tego również powodu wykładowca dostarczał studentom scenariusz wykładu zawierający definicje i twierdzenia omawiane w czasie zajęć.

Realizując postulat poglądowości w nauczaniu oraz w celu budzenia właściwych intuicji posługiwano się również wykresami funkcji wyświetlanymi przy pomocy grafoskopu. Na podstawie analizy wykresów formułowano hipotezy dotyczące własności tych funkcji, które następnie dowodzono.

Jako lekturę podstawową do wykładu zaproponowany został podręcznik T. Krasińskiego (2003). Zakres prezentowanego tam materiału jak i stopień ogólności prowadzonych rozważań jest, moim zdaniem, dobrze dostosowany do możliwości studentów I roku. Obok tej książki słuchacze korzystali z szerokiej oferty klasycznych podręczników z analizy. W pewnych fragmentach wykładu korzystano również z podręcznika R. Rudnickiego (2002).

Zauważmy, że w świetle powyższych uwag oraz celów przeprowadzonych badań sam wykład można uznać jako narzędzie badawcze. Podobne uwagi będą dotyczyły prowadzonych ćwiczeń.

5.2. Organizacja ćwiczeń

Jak już wspomniano powyżej, ćwiczenia były prowadzone w siedmiu grupach, z których jedną prowadził wykładowca. Na początku semestru ustalono zbiory zadań polecane studentom. Wśród nich szczególnie zalecono przygotowany między innymi na potrzeby tego eksperymentu zestaw zadań autorstwa E. Wachnickiego i Z. Powązki (2002). Książka ta jest dorobkiem wieloletniej pracy autorów nad wdrażaniem studentów w technikę dowodzenia twierdzeń z analizy matematycznej. Zadania tam zawarte są zadaniami wieloetapowymi, tzn. każde z nich jest sformułowane w kilku podpunktach, przy czym wynik lub sposób rozwiązania problemu z podpunktu poprzedniego jest potrzebny w rozwiązaniu problemu z podpunktu następnego. Ponadto do wszystkich zadań zamieszczono pełne rozwiązania, co umożliwia czytelnikowi zapoznanie się z techniką dowodu. W aneksie (załącznik nr 3) na przykładowych listach zadań i problemów znajdują się przykładowe zadania z tego zbioru, zwanego w dalszej części pracy skryptem. Skrypt ten, obok zadań łatwych, zawiera problemy trudniejsze, dlatego studenci najczęściej używali go jako materiału dla swoich referatów.

Obok tej książki używano również wybranych fragmentów ze zbioru A. Chronowskiego, H. Kąkola, Z. Powązki (1998). Książka ta jest zbiorem zadań z podstaw analizy matematycznej i została napisana dla uczniów klas matematycznych i słuchaczy kolegiów nauczycielskich. Obok standardowych zadań rachunkowych zawiera dużą liczbę zadań badających rozumienie pojęć. Te fragmenty nadają się znakomicie dla studentów pierwszego roku studiów matematycznych.

Poza tym prowadzący ćwiczenia korzystali z klasycznych zbiorów zadań z analizy matematycznej (Krysicki, Włodarski, 1974; Banaś, Wędrychowicz, 1997).

Każda z grup otrzymywała od prowadzącego listę zagadnień do przygotowania na ćwiczenia. Lista taka zawiera pewną liczbę zadań rachunkowych i kilka problemów, których rozwiązanie wymagało od studentów samodzielnego i twórczego działania. W razie występowania trudności mogli zwracać się o pomoc do prowadzących ćwiczenia lub wykładowcy. Na ogół rozwiązanie tych problemów można było znaleźć w pierwszym lub drugim zbiorze wspomnianym wyżej. Studenci, którzy znaleźli rozwiązanie problemu, referowali je na ćwiczeniach. Ten sposób pracy uważam za szczególnie kształcący. Wymaga on bowiem od studenta twórczej aktywności i daje mu szansę odczucia satysfakcji w sytuacji uzyskania rozwiązania. Problemy na listach były tak dobierane, by każdy ze studentów mógł znaleźć zadanie, które potrafił rozwiązać. Oto przykładowe tematy list:

L-1 – indukcja matematyczna,

L-2 – kresy zbioru,

L-3 – powtórzenie własności funkcji elementarnych,

L-4 – składanie i odwracanie funkcji,
L-5 – własności funkcji,
L-6 – definicja granicy ciągu,
L-7 – wyznaczanie granic ciągów liczbowych,
L-8 – definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie,
L-9 – definicja Heinego granicy funkcji w punkcie,
L-10 – obliczanie granic funkcji.

W załączniku nr 3 zamieszczono dwie przykładowe listy zadań (L-2, L-5).

Prowadzący ćwiczenia stosowali różne sposoby oceny pracy studentów na zajęciach. Najczęstszym były trzy krótkie kartkówki z definicji i twierdzeń z wykładów oraz dwa dłuższe sprawdziany. W aneksie (załącznik nr 4) zamieszczono dwa przykładowe zestawy zadań na sprawdzian – jeden dotyczący własności wartości bezwzględnej i własności funkcji elementarnych, drugi dotyczący podsumowania pracy pierwszego semestru.

Na zaliczenie semestru wpływ miały trzy komponenty:

– punkty zdobyte z kartkówek i sprawdzianów,
– aktywność studenta na zajęciach mierzona liczbą dobrowolnych wystąpień w czasie ćwiczeń,
– obecność na ćwiczeniach.

Zauważmy na koniec, że w czasie zajęć na ogół nie odpytywano na oceny, a w zamian organizowano sytuacje problemowe i dyskusje typu „burza mózgów", w których każdy mógł zmierzyć się z próbą rozwiązania. Osoby unikające udziału w tych dyskusjach miały kłopoty z uzyskiwaniem zaliczenia z ćwiczeń.

5.3. Egzamin pisemny i przykładowe pytania z egzaminu ustnego

Egzamin pisemny został przeprowadzony w dwu grupach. Tematy zadań konstruowano w ten sposób, aby były porównywalne pod względem stopnia trudności i sprawdzały te same wiadomości i umiejętności (por. załącznik nr 5). Aby zapewnić wszystkim studentom jednakowe szanse na tym egzaminie, tematy zostały ułożone kolegialnie przez wszystkich prowadzących zajęcia.

Z egzaminu wyeliminowano zagadnienia, które nie we wszystkich grupach były opracowane dokładnie. Tabela 3 podaje zestawienie umiejętności, które autorzy tematów chcieli sprawdzić tym egzaminem.

Egzamin ustny został zorganizowany w następujący sposób. Każdy ze zdających losował jedno z 30 zagadnień (por. załącznik nr 6). W trakcie oczekiwania na rozmowę z egzaminatorem miał przygotować dowód twierdzenia związanego z tematem pytania. Studenci wiedzieli dokładnie, dowody których twierdzeń będą obowiązywały na egzaminie, ponieważ w scenariuszu wykładów dostarczanych studentom zostało to zaznaczone. Po zreferowaniu swego zagadnienia egzaminowany otrzymywał kolejne dwa pytania zadawane przez wykładowcę. Jeżeli pytanie wylosowane dotyczyło ciągów liczbowych, to pytanie dodatkowe dotyczyło zawsze przeniesienia tego zagadnienia w teorię funkcji. Dla przykładu, student wylosował pytanie o działaniach na granicach ciągów (np. suma) i udowodnił twierdzenie, że jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne odpowiednio do liczb a, b, to suma $(a_n + b_n)$ zmierza do liczby $a + b$. Jako pytania dodatkowe otrzymał pytania o odpowiednie twierdzenie dla granicy funkcji oraz o granicę sumy, gdy a i b są nieskończonościami.

Tabela 3. Umiejętności sprawdzane przez egzamin pisemny

Nr zadania	Badane umiejętności
1	a) posługiwanie się definicją przeciwobrazu zbioru b) sporządzanie wykresów funkcji z wartością bezwzględną c) rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną d) redagowanie tekstu rozwiązania i sformułowanie odpowiedzi
2	a) posługiwanie się definicją kresu dolnego i górnego zbioru b) znajomość faktu, że liczba największa lub najmniejsza w zbiorze jest stosownym kresem tego zbioru c) rozwiązywanie nierówności wymiernych
3	a) stosowanie twierdzeń do obliczania granic ciągów (działania arytmetyczne w zbiorze ciągów zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o iloczynie ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego) b) obliczanie sumy ciągu arytmetycznego oraz geometrycznego c) znajomość wzorów uproszczonego mnożenia d) poprawne korzystanie z definicji liczby e
4	a) znajomość definicji tego symbolu b) konstruowanie potrzebnych przykładów
5	a) znajomość definicji granicy ciągu b) zaprzeczanie zdań zawierających kwantyfikatory c) konstruowanie stosownych przykładów
6	a) znajomość twierdzenia o indukcji b) dowodzenie przy pomocy tego twierdzenia c) umiejętność szacowania

Wśród pytań egzaminacyjnych, obok zagadnień szczegółowych dotyczących konkretnego pojęcia lub twierdzenia, zdarzały się również pytania przekrojowe, np. monotoniczność, ograniczoność i zbieżność. Odpowiadający na to pytanie na ogół wiedzieli, że każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Niektórzy umieli nawet udowodnić, że granicą tego ciągu jest kres górny zbioru wartości ciągu, gdy ciąg jest rosnący i kres dolny tego zbioru, gdy ciąg jest malejący. Otrzymywali wtedy pytanie:

> *Załóżmy, że funkcja f określona i ciągła w przedziale otwartym (a, b) jest rosnąca. Ile wynosi granica tej funkcji przy x zbieżnym do krańców dziedziny?*

Pytanie to, jak się okazało, sprawiło studentom dużą trudność. W większości przypadków nie potrafili wykorzystać definicji Heinego granicy funkcji i udowodnionego twierdzenia o granicy ciągu monotonicznego i ograniczonego mimo faktu, że znali poszczególne przesłanki. Świadczy to o szufladkowym sposobie uczenia się i o braku refleksji nad związkiem między pojęciami występującymi w wykładzie.

Pragnę tu zwrócić uwagę jeszcze na inne spostrzeżenie. Jednym z twierdzeń, którego dowód, jak się wydawało, nie powinien sprawiać większych trudności, było twierdzenie, że każdy ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony. W dowodzie wybiera się dowolne otoczenie granicy i stwierdza, że poza tym otoczeniem znajduje się skończona liczba wyrazów ciągu. Można zatem tak poszerzyć to otoczenie, aby należały do niego wszystkie wyrazy tego ciągu. Egzaminowani na ogół zadawalali się tą informacją i zaledwie kilku potrafiło podać efektywny sposób poszerzenia tego otoczenia. Sądzę, że ten przykład świadczy o pamięciowym i bezkrytycznym sposobie przyswajania materiału, wyniesionym ze szkoły średniej.

5.4. Zagadnienia badane przez ankietę sondażową

W drugim semestrze zwrócono się do studentów z prośbą o wypełnienie ankiety. Jej celem było wysondowanie opinii studentów na następujące tematy:

- wyniesione ze szkoły średniej zainteresowania różnymi działami matematyki (pytania 1 i 2),
- motywację wyboru kierunku studiów (pytanie 3),
- przygotowanie ze szkoły średniej do studiowania analizy matematycznej (pytania 4 i 5),
- tempo opracowania podstawowych pojęć na zajęciach (pytania: 5, 6, 7, 9),
- zainteresowanie treściami analizy matematycznej (pytanie 8),
- trudności w studiowaniu podstawowych pojęć i twierdzeń analizy matematycznej (pytania: 10, 11, 12, 13, 14, 15),
- umiejętność posługiwania się technikami rachunkowymi przy rozwiązywaniu standardowych problemów z analizy matematycznej (pytanie 16),

– korzystanie z literatury przedmiotu (pytania: 17, 18, 19, 20),
– trudności w studiowaniu matematyki (pytania 21 i 22).

Odpowiedzi na pytania 1–3 zostały opracowane w paragrafie 2 niniejszej pracy. Odpowiedzi na pozostałe pytania zostaną opisane w paragrafie następnym.

6. Analiza wyników badań

Niniejszy paragraf został podzielony na dwie części. W pierwszej zostaną poddane analizie rozwiązania zadań egzaminu pisemnego w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie, w jakim stopniu studenci wykazali się umiejętnościami, które miały sprawdzać te zadania. W części drugiej tego paragrafu scharakteryzujemy odpowiedzi na pytania ankiety.

6.1. Rozwiązania zadań egzaminu pisemnego

W paragrafie tym przedstawimy uwagi na temat rozwiązań zadań oraz zaprezentujemy, w jaki sposób radzili sobie z nimi egzaminowani.

Zadanie 1 wymagało skorzystania z definicji przeciwobrazu danego zbioru przez zadaną funkcję. Ponieważ funkcja ta została zdefiniowana przy pomocy wartości bezwzględnej, dla wyznaczenia szukanego zbioru należało rozwiązać stosowną nierówność. Przewidując różne trudności studentów oraz ewentualne błędy, polecono studentom wykonanie stosownego rysunku.

Tabela 4 prezentuje informacje o liczbie poprawnych rozwiązań i rodzajach popełnionych błędów. Wynika z niej, że 34% studentów rozwiązało to zadanie poprawnie, a 45% osób udzieliło poprawnej odpowiedzi, w tym 23% nie widzi potrzeby uzasadnienia odpowiedzi odczytanej z rysunku. Zauważmy również, że 68% egzaminowanych potrafiło poprawnie wykonać wykres funkcji z wartością bezwzględną, ale aż 20% studentów nie rozwiązało tego zadania.

Wśród błędów należy wymienić błędy w stosowaniu definicji wartości bezwzględnej, przeciwobrazu zbioru i określeniu przedziału domkniętego oraz błędy w sporządzaniu wykresu funkcji zadanej wielonormowo.

W zadaniu 2 należało wyznaczyć kresy danego zbioru. W grupie A trzeba było najpierw zauważyć, że dla $n = 2$ wyrażenie nie ma sensu. Ponieważ ciąg był zadany przy pomocy funkcji homograficznej, nieokreślonej w $n = 2$, więc kresami zbioru wartości ciągu mogą być wartość dla $n = 1$ lub $n = 3$ lub granica tego ciągu. Ponieważ ciąg ten dla $n = 1$ przyjmuje wartość -2, dla $n = 3$ wartość 5, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-4} = \frac{3}{2}$, więc oba kresy są odpowiednio największą lub najmniejszą liczbą w zbiorze wartości. Sytuacja była odmienna w grupie B. Tam kresem górnym była wartość ciągu dla n = 3, a kresem dolnym granica tego ciągu.

Tabela 4. Rezultaty zadania 1

Lp.	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
1.	Poprawne rozwiązanie	50
2.	Poprawny wykres i rozwiązanie odczytane z wykresu	13
3.	Poprawny wykres przez rozważanie przypadków lub przez stosowanie przekształceń geometrycznych, brak rozwiązania zadania	25
4.	Poprawny wykres i pomylone pojęcie przeciwobrazu z pojęciem obrazu zbioru	10
5.	Błędnie stosowana definicja wartości bezwzględnej	4
6.	Błędny wykres mimo poprawnie zastosowanej definicji wartości bezwzględnej	3
7.	Błędny wykres i poprawnie wyznaczony przeciwobraz zbioru	3
8.	Błąd w definicji przeciwobrazu (nierówność ostra lub równość zamiast nierówności słabej)	7
9.	Brak rozwiązania	30
	RAZEM	145

Wyniki pracy studentów prezentuje tabela 5. Rozwiązujący stosowali dwie zasadnicze drogi rozwiązywania tego zadania:

a) stosując definicje kresów zbioru;

b) badając monotoniczność ciągu, na tle którego zbudowany jest dany zbiór.

Byli i tacy, którzy mimo zbadania monotoniczności ciągu, nie wykorzystywali tej wiadomości i badali ponownie kres z definicji.

Wśród błędów należy wymienić błędy w stosowaniu definicji wartości bezwzględnej, przeciwobrazu zbioru i określeniu przedziału domkniętego oraz błędy w sporządzaniu wykresu funkcji zadanej wielonormowo.

W zadaniu 2 należało wyznaczyć kresy danego zbioru. W grupie A był nim zbiór wartości ciągu zdefiniowanego przy pomocy funkcji homograficznej, nieokreślonej w $n = 2$. Kresami tego zbioru mogły być więc tylko dwie z liczb: a_1, lub a_3, lub granica rozważanego ciągu. Ponieważ ciąg ten dla $n = 1$ przyjmuje wartość -2, dla $n = 3$ wartość 5, a $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-4} = \frac{3}{2}$, zatem kresami są odpowiednio największa lub najmniejsza liczba w zbiorze wartości. Sytuacja była odmienna w grupie B. Tam kresem górnym była wartość ciągu dla n = 3, a kresem dolnym granica tego ciągu.

Wyniki pracy studentów prezentuje tabela 5. Rozwiązujący stosowali dwie zasadnicze drogi rozwiązywania tego zadania:

a) stosując definicje kresów zbioru;

b) badając monotoniczność ciągu, na tle którego zbudowany jest dany zbiór.

Byli i tacy, którzy mimo zbadania monotoniczności ciągu, nie wykorzystywali tej wiadomości i badali ponownie kres z definicji.

Tabela 5. Rezultaty zadania 2

Lp.	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
1.	Poprawne rozwiązanie	32
2.	Poprawne rozwiązanie bez uwzględnienia faktu, że liczba największa lub najmniejsza w zbiorze jest stosownym kresem	24
3.	Poprawnie wskazane oba kresy, lecz błąd w stosowaniu definicji jednego z nich	1
4.	Poprawnie wskazane oba kresy bez uzasadnienia	3
5.	Poprawnie wskazane oba kresy, lecz błędy w rozwiązywaniu nierówności	2
6.	Poprawnie wskazane oba kresy, ale dowód tylko jednego z nich	9
7.	Poprawnie wskazany jeden z kresów i błędy rachunkowe przy sprawdzaniu stosownego warunku	4
8.	Poprawnie wskazany jeden kres wraz z dowodem i zmiana tematu zadania przy badaniu drugiego kresu	17
9.	Poprawnie wskazany jeden kres wraz z dowodem i błędne rozumienie zbioru wartości ciągu	1
10.	Poprawnie wskazany tylko jeden kres wraz z dowodem i brak dalszych rozważań	5
11.	Poprawnie wskazany jeden kres wraz z dowodem i błędnie wyznaczony drugi kres	18
12.	Poprawnie napisana definicja kresu zbioru i błędnie wyznaczony kres niezwiązany ze zbiorem wartości ciągu	12
13.	Brak rozwiązania	17
	RAZEM	145

Zauważmy, że 39% studentów rozwiązało to zadanie poprawnie, choć więcej niż połowa osób z tej grupy zastosowała tylko definicję i nie wykorzystała faktu, że liczba największa lub najmniejsza w zbiorze jest odpowiednio kresem górnym lub dolnym tego zbioru. Ponadto 10% studentów podało poprawną odpowiedź dowodząc tylko istnienie jednego z kresów lub popełniając błędy w stosowaniu definicji w jednym z przypadków, albo nie przeprowadzając żadnego rozumowania. Prawie 12% egzaminowanych nie podjęło próby rozwiązania tego zadania. Pozostali podali rozwiązania częściowe, poprawnie wskazując jeden z kresów.

Umiejętność obliczania granic ciągów liczbowych sprawdzało zadanie 3. Zawierało ono cztery przykłady ciągów zbieżnych do granicy skończonej. W przykładzie a) należało skorzystać z twierdzenia o iloczynie ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego. Przykład b) wymagał zastosowania wzorów na sumę ciągów arytmetycznego i geometrycznego.

Jak się okazało (tabela 6), największą trudnością było ustalenie ilości wyrazów podanych ciągów. Do obliczenia granicy w przykładzie c) wystarczyła znajomość wzorów uproszczonego mnożenia i twierdzenia o włączaniu liczby pod znak pierwiastka kwadratowego oraz twierdzeń o działaniach w zbiorze ciągów zbieżnych. Wyniki uzyskane przez studentów w przykładach 3 a), b), c) prezentuje tabela 6.

Najciekawszym pod względem liczby różnych sposobów rozwiązania był przykład 3 d). Dotyczył on twierdzenia o granicy ciągu $(a_n)^{b_n}$, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy skończonej, a ciąg (b_n) do nieskończoności i badana granica nie jest potęgowym symbolem nieoznaczonym. Jak się okazało (tabela 7), duża liczba studentów usiłowała wykorzystać tu twierdzenie o granicy ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ rozkładając funkcję wymierną w podstawie potęgi w postaci sumy liczby 1 i ułamka, który nie był zbieżny do zera. Znalazła się jednak spora grupa studentów, którzy zaproponowali następujące metody rozwiązania:

- korzystając z kryterium Cauchy'ego zbieżności ciągów do liczby 0;
- stosując twierdzernie o trzech ciągach, po uprzednim stwierdzeniu, że granica ciągu (a_n) jest liczbą z przedziału $(0,1)$;
- korzystając z twierdzenia, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $a \in \mathbb{R}$ i ciąg (b_n) do nieskończoności oraz $(a_n)^{b_n}$, nie jest symbolem potęgowym nieoznaczonym, to granica ta jest równa $\lim_{n\to+\infty} a^{b_n}$;
- stosując twierdzenie o ilorazie granic i po uprzednim wyłączeniu z mianownika i licznika stosownego wyrażenia, przekształcając do postaci $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Analizując wyniki tabel 6 i 7 możemy stwierdzić, że zadania a) i c) zostały rozwiązane poprawnie przez dużą liczbę studentów (70% przykład a) i 88% przykład c)). Równocześnie procent słuchaczy, którzy nie podjęli próby rozwiązania tych zadań, wynosił odpowiednio 18% i 5%. Również procent osób, które nie podjęły próby rozwiązania przykładów b) i d), był porównywalny (28% dla przykładu b) i 15% dla przykładu d)). Jednakże dla tych dwu ostatnich zadań procent poprawnych odpowiedzi był niewielki (16% dla b) i 37% dla d)). W obu tych zadaniach spora liczba rozwiązujących (44% w przykładzie b) i 36% w d)) popełniła klasyczne błędy świadczące o braku dwu podstawowych umiejętności:

Tabela 6. Wyniki pracy studentów – zadanie 3 a) - 3 c)

Przykład	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
a)	Poprawne rozwiązanie	80
	Poprawne rozwiązanie bez uzasadnienia z jakiego twierdzenia skorzystano	4
	Poprawna odpowiedź bez rachunków lub komentarza	12
	Poprawne rozwiązanie, luki w komentarzu	6
	Poprawnie obliczona granica tylko jednego ciągu	2
	Zaczęto poprawnie, brak obliczenia granicy	6
	Błędnie obliczono granicę ilorazu	5
	Błędnie zastosowano twierdzenie o granicy iloczynu	4
	Brak rozwiązania	26
	RAZEM	145
b)	Poprawne rozwiązanie	15
	Poprawne przekształcenia brak obliczenia granicy lub granica obliczona błędnie	7
	Poprawne rozwiązanie, brak komentarza	1
	Błędnie obliczono liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego	64
	Nie umie zastosować wzoru na sumę ciągu arytmetycznego	12
	Pomylono ciąg arytmetyczny z ciągiem geometrycznym	1
	Błędy rachunkowe	4
	Brak rozwiązania	41
	RAZEM	145
c)	Poprawne rozwiązanie	114
	Poprawne rozwiązanie, bez komentarza	13
	Błędnie stosowany wzór uproszczonego mnożenia	8
	Zaczęte poprawnie	3
	Brak rozwiązania	7
	RAZEM	145

- wyznaczenia liczby wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym znane były pierwszy i ostatni wyraz ciągu oraz jego różnica;
- sprawdzania założeń przed zastosowaniem twierdzenia o granicy ciągu $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, gdzie (a_n) jest ciągiem zbieżnym do $+\infty$.

Tabela 7. Wyniki pracy studentów – zadanie 3 d)

Przykład	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
d)	Poprawne rozwiązanie	42
	Poprawne rozwiązanie bez podania twierdzenia, z którego skorzystano	6
	Poprawne rozwiązanie luki w komentarzu	5
	Zaczęte poprawnie, brak przejścia granicznego	9
	Błędnie zastosowano z twierdzenia o granicy ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	52
	Błędnie zastosowano warunek Cauchy'ego	1
	Błędy rachunkowe	4
	Błędny zapis	4
	Brak rozwiązania	22
	RAZEM	145

W obu przypadkach studenci postąpili formalnie. W pierwszym pamiętali ogólny wzór na sumę ciągu arytmetycznego i nie zastanawiali się nawet, ile jest wyrazów w ciągu rozważanym w zadaniu. W drugim, bazując zapewne na doświadczeniu zdobytym po wykonaniu dużej liczby zadań wymagających skorzystania z granicy ciągu $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, nie odczuwali potrzeby zbadania spełnienia założeń w rozważanej sytuacji.

Mamy tu do czynienia ze znanym i opisanym w literaturze (np. Ćwik, 1984; Krygowska, 1956; Turnau, 1990) zjawiskiem zdegenerowanego formalizmu.

Zadanie 4 miało na celu sprawdzenie, czy studenci posiadają następujące umiejętności:

a) znajomość definicji symbolu $\infty-\infty$ lub $0\cdot\infty$,

b) konstruowanie potrzebnych przykładów.

Studenci w uzasadnieniu nieoznaczoności symbolu powinni byli podać cztery przykłady par ciągów (a_n) i (b_n) zbieżnych równocześnie do $+\infty$ albo $-\infty$, względnie jeden do zera, a drugi do dowolnej nieskończoności, przy których odpowiednio ciąg (a_n-b_n) lub $(a_n\cdot b_n)$ spełniał warunek:

– był zbieżny do granicy skończonej,

– był zbieżny do $+\infty$,

– był zbieżny do $-\infty$,

– był ciągiem rozbieżnym.

Tabela 8 podaje wyniki uzyskane przez studentów podczas rozwiązywania tego zadania. Wynika z nich, że znikoma liczba studentów (1%) odpowiedziała w oczekiwany przez autorów sposób oraz 33% egzaminowanych nie podjęło próby rozwiązania tego zadania. Zauważmy też, że 15% piszących podało jedynie dwa z czterech przykładów, a zatem uzasadniła odpowiedź, że rozważane ciągi nie mogą mieć granicy. Natomiast 18% podało tylko trzy z czterech oczekiwanych przykładów. Może to świadczyć o tym, że wiedzieli o konieczności zbudowania wszystkich czterech par ciągów, ale nie potrafili podać brakującego przykładu. Był to na ogół przykład w przypadku, gdy stosowny ciąg jest rozbieżny.

Tabela 8. Wyniki pracy studentów – zadanie 4

Lp.	Wyniki prac studentów	Liczba prac
1.	Poprawne rozwiązanie	2
2.	Podano tylko dwa przykłady	22
3.	Podano tylko trzy przykłady	23
4.	Podjęto próbę opisania symbolu bez podania stosownych przykładów	4
5.	Podano przykłady, ale nie wyliczono ich granic	16
6.	Podano przykłady, ale popełniono błędy w obliczaniu granic	9
7.	Zamieszczono tekst nie na temat	20
8.	Pomylono symbol różnicy z iloczynem	1
9.	Brak rozwiązania	48
	RAZEM	145

W zadaniu 5 studenci mieli przeprowadzić dowód faktu, że dany ciąg jest rozbieżny. Autorom zadania to wydawało się, że nie jest on trudny, gdyż na pierwszy rzut oka było widoczne, że ciąg ma dwa różne punkty skupienia. Świadomie zażądano, aby dowód tego faktu przeprowadzić korzystając z definicji granicy ciągu. Chciano bowiem sprawdzić umiejętność prowadzenia pewnego typu rozumowań (np. dowód nie wprost).

Uzyskane wyniki prezentuje tabela 9. Wynika z niej, że jedynie 10% egzaminowanych rozwiązało zadanie zgodnie z poleceniem w temacie. Znacznie większa liczba studentów (22%) rozwiązała problem w oparciu o twierdzenie, że jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy g, to każdy podciąg tego ciągu jest zbieżny do tej samej granicy.

Tabela 9. Wyniki pracy studentów – zadanie 5

Lp.	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
1.	Poprawne rozwiązanie z wykorzystaniem definicji granicy ciągu	14
2.	Poprawne rozwiązanie z wykorzystaniem twierdzenia o podciągach	32
3.	Poprawne rozwiązanie z wykorzystaniem warunku Cauchy'ego	1
4.	Próba dowodu z wykorzystaniem warunku Cauchy'ego	11
5.	Próba dowodu z wykorzystaniem definicji granicy ciągu	16
6.	Rozwiązanie niekompletne	2
7.	Brak rozwiązania	69
	RAZEM	145

Natomiast tylko jednej osobie udało się przeprowadzić poprawny dowód rozbieżności ciągu w oparciu o warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu. Ponieważ warunki te są równoważne definicji, rozwiązanie te uznano za poprawne.

Odnotujmy również, że 48% piszących nie podjęło próby rozwiązania tego zadania. Fakt ten wydaje się przemawiać za tym, że wiele osób nie osiągnęło jeszcze umiejętności samodzielnego dowodzenia nawet dość prostych twierdzeń.

Zadanie 6 dotyczyło ciągu zadanego rekurencyjnie. Należało udowodnić jego ograniczoność. Celem tego zadania była umiejętność zastosowania twierdzenia o indukcji do rozwiązania tego problemu. Studenci zastosowali dwa sposoby podejścia do rozwiązania tego zadania:

- zbadanie monotoniczności badanego ciągu (dowód indukcyjny),
- postawienie stosownej hipotezy odnośnie ograniczoności i jej dowód indukcyjny.

Rezultaty prac studenckich przedstawia tabela 10. Zadanie to okazało się trudne dla studentów, gdyż 61% nie podjęło próby rozwiązania, a jedynie 19%

rozwiązało je poprawnie. Mimo dużej ilości ćwiczeń okazuje się, że twierdzenie o indukcji, intuicyjnie dość oczywiste, sprawia studentom sporo kłopotu (por. Krygowska, 1977a, s. 146-152).

Przy każdym z zadań podano punktację (załącznik nr 5). Egzamin uważano za zdany, gdy student otrzymał minimum 11 punktów. Wyniki tego egzaminu przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 10. Wyniki prac studentów – zadanie 6

Lp.	Wyniki pracy studentów	Liczba prac
1.	Poprawne rozwiązanie	15
2.	Poprawnie brak komentarza	12
3.	Zaczęte poprawnie	11
4.	Zaczęte poprawnie – błędy w przekształceniach	4
5.	Błędy w stosowaniu twierdzenia o indukcji	14
6.	Brak rozwiązania	89
	RAZEM	145

6.2. Analiza wyników ankiety sondażowej

Jak już wspomniano w paragrafie 4, ankieta miała pomóc w sformułowaniu hipotez badawczych odnośnie do kilku problemów. Problem przygotowania ze szkoły średniej oraz motywacji w wyborze kierunku studiów (pytania 1-3) został omówiony w paragrafie 2. W tym paragrafie opisane zostaną odpowiedzi na pozostałe pytania. Zostaną one połączone w grupy związane z odpowiedzią na postawione w paragrafie 5.4 problemy badawcze.

6.2.1. Przygotowanie ze szkoły średniej do studiowania analizy matematycznej

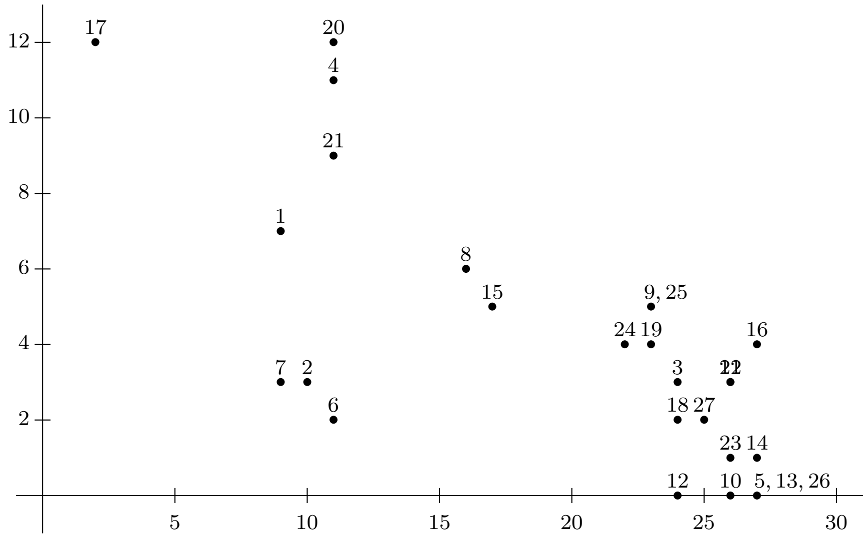
Jako pierwszy rozważymy problem przygotowania ze szkoły średniej do studiowania analizy matematycznej (pytania 4 i 5, por. załącznik nr 1). W pytaniach tych podano studentom listę 27 zagadnień wchodzących w tematykę wykładu. W pytaniach 4 i 5 pytano, które z tych treści pojawiły się w szkole średniej i które z nich sprawiły badanym trudności. Każdemu z tych haseł przyporządkowano dwie liczby. Pierwsza z nich oznacza ilość osób, które poznały to pojęcie w badanej grupie respondentów, a druga liczbę osób z tej grupy, która miała trudności z tym zagadnieniem. Otrzymane odpowiedzi przedstawimy w postaci swoistej „mapy treści z analizy matematycznej”. Została ona umieszczona w układzie współrzędnych. Na osi poziomej tego układu zaznaczono liczby prezentujące znajomość pojęcia lub twierdzenia w rozważanej grupie badanych, a na osi pionowej liczby informujące o trudnościach, jakie to pojęcie lub twierdzenie sprawiło badanym. Na rysunkach 2-4 przedstawiono wykresy dla poszczególnych grup badanych. Liczbami od 1 do 27 oznaczono następujące treści:

1. zbiory ograniczone i nieograniczone,
2. kresy zbioru,
3. twierdzenie o indukcji,
4. ciągłość zbioru liczb rzeczywistych,
5. funkcja,
6. obraz zbioru,
7. przeciwobraz zbioru,
8. ograniczoność i nieograniczoność funkcji,
9. składanie funkcji,
10. różnowartościowość funkcji,
11. wartość bezwzględna,
12. funkcja odwrotna,
13. funkcja wykładnicza,
14. funkcja logarytmiczna,
15. funkcje cyklometryczne,
16. ciągi liczbowe,
17. podciąg ciągu,
18. zbieżność ciągu do granicy skończonej,
19. granice niewłaściwe,
20. ciągi Cauchy'ego i ich własności,
21. granica dolna i górna ciągu,
22. granica funkcji w punkcie,
23. granice jednostronne,
24. symbole nieoznaczone,
25. ciągłość funkcji,
26. pochodna funkcji,
27. zastosowanie pochodnej do badania przebiegu zmienności funkcji.

Wobec przyjętych umów, np. punkt 7 na rys. 2 o współrzędnych $(9,3)$ oznacza, że wśród 27 absolwentów klas matematycznych pojęcie przeciwobrazu 9 osób uznało za znane ze szkoły średniej, a 3 osoby stwierdziły, że pojęcie to sprawiło im trudność.

Treści zawarte pod numerami 26 i 27 dotyczące pochodnej i jej zastosowania do badania przebiegu funkcji nie należały wprawdzie do wykładu z analizy w pierwszym semestrze, ale były jeszcze omawiane w szkole średniej w klasach matematycznych, a nawet w klasach o profilu ogólnym. Chcieliśmy zorientować się, na jakie przygotowanie z zakresu tych tematów można liczyć w przyszłości.

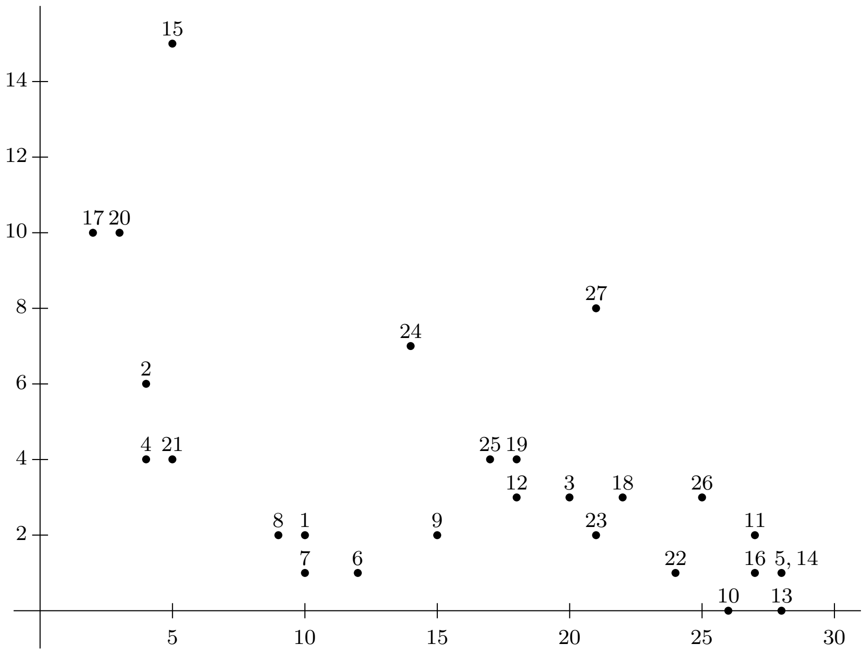
Analizując wyniki w każdej grupie badanych, należy zauważyć, że sytuacja jest nieco inna. Absolwenci klas matematycznych (rys. 2) uznali 19 z 27 treści z wykładu analizy matematycznej za znane ze szkoły średniej. Zagadnienia te nie sprawiały im w zasadzie większych trudności. Wśród nich za najbardziej kłopotliwe uznali ograniczoność i nieograniczoność funkcji (8). Jako najtrudniejsze treści, praktycznie nieznane wcześniej, wskazali ciągłość zbioru liczb rzeczywistych, zagadnienia związane z podciągami ciągu, ciągi Cauchy'ego i pojęcie granicy górnej i dolnej (4, 17, 20, 21), a do najłatwiejszych z nowo poznanych treści zaliczyli kresy zbioru, obraz i przeciwobraz zbioru (2, 6, 7).



Rysunek 2

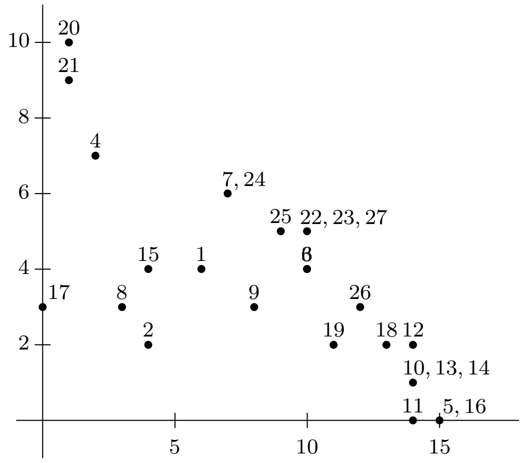
Absolwenci klas o profilu ogólnym (rys. 3) wskazali również na 12 zagadnień znanych im już wcześniej, ale za najtrudniejsze w tym zbiorze wytypowali zastosowanie pochodnych do badania własności funkcji (27). Do tematów właściwie nowych, które sprawiły im trudności, zaliczyli: funkcje cyklometryczne, podciągi i ciągi Cauchy'ego (15, 17, 20). Odnotować należy ze zdziwieniem, że ciągłość zbioru liczb rzeczywistych uznali za temat nowy, ale niezbyt trudny. Spostrzeżenie to w kontekście słabych umiejętności w dowodzeniu twierdzeń (por. 5.1) może świadczyć o sposobie uczenia się polegającym na przyswajaniu materiału na pamięć, bez głębszej refleksji merytorycznej. Do najłatwiejszych treści w tej grupie badanych zaliczono różnowartościowość funkcji i funkcję wykładniczą (10, 13), znane już w szkole średniej, a z tematów nowych: zbiory ograniczone, obraz i przeciwobraz zbioru, ograniczoność i nieograniczoność funkcji (1, 6, 7, 8).

Najsłabiej przygotowanymi merytorycznie okazali się absolwenci klas o profilu biologiczno-chemicznym oraz techników. Wskazali oni (rys. 4) również na grupę zagadnień, które uznali za łatwe i znane im ze szkoły średniej (5, 10, 11, 13, 14, 16). Wśród treści częściowo znanych do najtrudniejszych zaliczyli pojęcie granicy i granicy jednostronnej funkcji, ciągłość i zastosowanie pochodnej do badania przebiegu zmienności funkcji (22, 23, 25, 27). Duża grupa zagadnień z omawianej listy była dla trzeciej grupy respondentów zupełnie nowa. Należą tu tematy: 1, 2, 4, 7, 8, 15, 17, 20, 21, 24, przy czym do najłatwiejszych zaliczono: pojęcie funkcji, wartość bezwzględną, ciąg liczbowy (5, 11, 16). Trochę to dziwi, gdyż są to zagadnienia powszechnie omawiane w szkole średniej, a mimo to znalazły się w grupie tematów praktycznie nowych. Widocznie nie poświęcono im dostatecznie dużo czasu. Pojawienie się wśród tych haseł wartości bezwzględnej, w kontekście badań, jakie na tym roku prowadziła J. Czaplińska (2003a, 2003b), pokazuje, że studenci nie potrafią do końca poprawnie ocenić stanu swej wiedzy. Z nowych treści, które sprawiały im trudności, wskazali ciągłość zbioru liczb rzeczywistych, podciągi i ciągi Cauchy'ego (4, 20, 21).



Rysunek 3

Reasumując, możemy uznać, że spośród treści wykładu analizy nie omawianych w szkole średniej najtrudniejsze były: ciągłość zbioru liczb rzeczywistych, ciągi Cauchy'ego i granice dolna i górna ciągu. Są to istotnie tematy wymagające pewnego doświadczenia w posługiwaniu się dedukcją i operowaniem subtelniejszymi pojęciami.



Rysunek 4

6.2.2. Tempo opracowania podstawowych pojęć na zajęciach

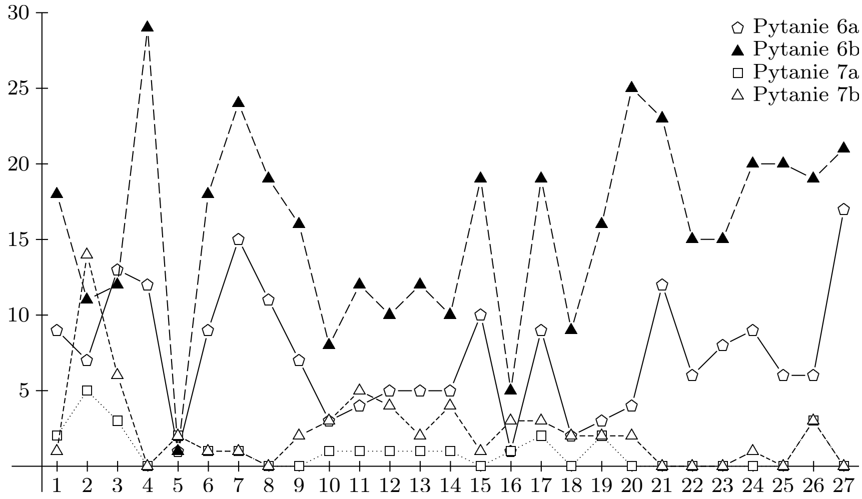
W pytaniach 6 a), b) i 7 a), b) ankietowani oceniali czas poświęcony na opracowanie na zajęciach wybranych treści analizy (27 pojęć wymienionych w paragrafie 6.2.1). Odpowiedzi prezentuje wykres na rysunku 5. Do treści, którym zdaniem studentów poświęcono zbyt mało czasu na wykładzie, zaliczono:

a) twierdzenie o indukcji,
b) przeciwobraz zbioru,
c) funkcje cyklometryczne,
d) podciągi,
e) granica dolna i górna ciągu,
f) zastosowanie pochodnych do badania własności funkcji.

Przeglądając scenariusze wykładów można stwierdzić, że treści w a), c), d) zostały opracowane wystarczająco dokładnie i miały być pogłębiane na ćwiczeniach. Pojęcie przeciwobrazu należy do wstępu do matematyki, a na wykładzie z analizy została podana jedynie definicja i używano jej w różnych sytuacjach. Natomiast badanie przebiegu funkcji nie jest tematem pierwszego semestru. Nic więc dziwnego, że nie było omawiane na wykładzie.

Równocześnie studenci ujawnili, że odczuwają niedosyt ćwiczeń w realizacji następujących treści:

– zbiory ograniczone i nieograniczone,
– ciągłość zbioru liczb rzeczywistych,
– obraz zbioru,
– funkcje cyklometryczne,
– podciągi ciągu,
– ciągi Cauchy'ego i ich własności.



Rysunek 5

Analizując odpowiedź na pytanie 7 b) odnotujmy, że poza pojęciem kresu, które zdaniem respondentów było omawiane zbyt szczegółowo, pozostałym treściom poświęcono wystarczająco dużo czasu (wykres serii 3 na rys. 5). Podobnie ma się sytuacja z ćwiczeniami. Zauważmy jednak, że pojęcie kresu jest bardzo ważnym pojęciem z analizy i gruntowne jego opracowanie może przyczynić się do dobrego zrozumienia pojęcia granicy ciągu. Poza tym w trakcie badania kresów jest okazja do powtarzania wielu zagadnień z matematyki szkolnej.

6.2.3. Zainteresowania treściami analizy matematycznej

Pedagogika uczy, że wiodącą rolę w rozwijaniu uzdolnień człowieka odgrywają zainteresowania.

> One koncentrują aktywność na określonych kierunkach działalności, angażują osobowość, a w procesie samej działalności rozwijają się zdolności (...) związane ściśle z treścią działalności.
>
> (Szewczuk, 1993)

Wynika stąd zasadność pytania 8. W odpowiedzi na nie ankietowani podali najbardziej interesujące ich treści omawianego przedmiotu (tabela 11). Przedstawiono w niej swoistą listę rankingową treści analizy interesujące studentów.

Chociaż pytania ankiety dotyczyły pierwszego semestru studiów, to na odpowiedzi (tabela 11) mógł mieć wpływ fakt, że badanie to było przeprowadzone w drugim semestrze, gdy na wykładzie i ćwiczeniach był omawiany rachunek różniczkowy. Niewykluczone, że widać tu również wpływ szkoły średniej, zwłaszcza klas matematycznych, w których omawia się wiele zagadnień z tej tematyki. Nie bez znaczenia jest również fakt, że w tej tematyce można wykorzystać komputer lub kalkulator graficzny. Jeden z respondentów, absolwent klasy o profilu matematyczno-fizycznym, stwierdził: *Ciekawią mnie wykresy komputerowe ciekawych funkcji.*

Tabela 11. Treści wykładu interesujące studentów

Treści wykładu	Klasy matemat.	Klasy o profilu ogólnym	Klasy o profilu biol.-chem. i technika	RAZEM
Pochodna funkcji	14	9	3	26
Granica ciągu, funkcji	5	6	5	16
Przebieg zmienności	5	5	1	11
Symbole nieoznaczone	1	4	6	11
Ciągi liczbowe	4	2	4	10
Kresy zbioru	1	4	4	9
Ciągłość funkcji	1	5	3	9
Indukcja matematyczna	3	3	1	7
Wartość bezwzględna	1	3	0	4
Pojęcie funkcji	1	1	1	3
Funkcje cyklometryczne	1	1	0	2
Liczby algebraiczne	1	0	1	2
Wszystkie treści	1	0	1	2
Brak odpowiedzi	3	5	3	11

Analizując dalej wyniki zamieszczone w tabeli 11, warto zauważyć, że na czołowych pozycjach znajdują się tematy związane ze stosowaniem algorytmów (np. wyznaczanie granic ciągów i funkcji lub obliczanie pochodnych). Fakt ten potwierdza uwagę zamieszczoną w paragrafie 1, że poszczególne składowe wiedzy werbalnej wzajemnie się przenikają. W obserwowanej grupie studentów wydaje się prawdopodobne, że sposoby i metody działania są szybciej przyswajane, niż fakty i procedury oceniania. Świadczyć o tym może również wypowiedź ankietowanej absolwentki liceum ekonomicznego: *ciąg i granica, ponieważ w liceum nie patrzyłam na ciąg jak na funkcję, na analizie moja wiedza o ciągach jest o wiele większa.*

Są jednak sytuacje, w których same treści mogą budzić zainteresowanie studentów. Absolwent liceum ogólnokształcącego z klasy o profilu ogólnym napisał: *Funkcje cyklometryczne zaciekawiły mnie, ale nie umiem ich.*

Zainteresowanie danym zagadnieniem może być spowodowane działalnością dydaktyczną. Oto przykład. Absolwent liceum ogólnokształcącego z klasy o profilu biologiczno-chemicznym napisał: *twierdzenie o trzech ciągach, ze względu na zabawne porównanie przez prowadzącego ćwiczenia.*

Na koniec zauważmy, że wśród ankietowanych znalazły się osoby niezainteresowane tematyką analizy lub nie umiejące jednoznacznie wskazać swych zainteresowań. Jak należało przypuszczać jest ich najmniej w pierwszej grupie ankietowanych (11%). W grupie drugiej stanowią oni prawie 18%. Najwięcej, bo aż 20%, jest ich w grupie trzeciej. O tym, że brak odpowiedzi nie musi oznaczać braku własnych preferencji odnośnie do treści, świadczyć może następująca wypowiedź absolwenta liceum o profilu ogólnym: *Nie ma takiego, ale granice i pochodne funkcji są fajne.*

6.2.4. Trudności w studiowaniu podstawowych treści z analizy matematycznej

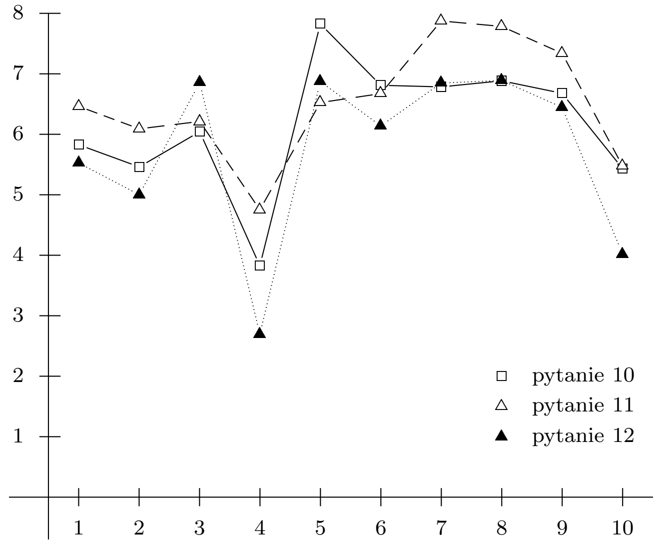
W tej części pracy omówione zostaną odpowiedzi na pytania: 9-15. Przedstawione są w nich opinie studentów na temat opanowania przez nich dziesięciu wybranych pojęć z wykładu (pytania 10, 11, 12). Dokonano również wyboru najłatwiejszych oraz najtrudniejszych, zdaniem studentów, twierdzeń, których dowody musieli przygotować na egzamin ustny (pytania 13, 14, 15). Przedstawione zostaną także opinie ankietowanych na temat języka, w którym formułowane były definicje i twierdzenia (pytanie 9).

Z rys. 6 możemy odczytać, które z wymienionych w ankiecie pojęć analizy zostały, zdaniem studentów, opanowane dobrze, a które słabo. Oto lista tych pojęć ustawiona przez nich od najłatwiejszego do najtrudniejszego (w nawiasie podano numer tego pojęcia na osi poziomej wykresu z rys. 6):

- funkcja różnowartościowa (5),
- funkcja odwrotna (6),
- ciąg liczbowy zbieżny do granicy skończonej i granica funkcji (7), (8),
- ciąg liczbowy zbieżny do nieskończoności (9),
- zbiór ograniczony, kresy zbioru (1), (3),
- zbiór nieograniczony (2),
- symbol nieoznaczony (10),
- zbiór przeliczalny (4).

Do najlepiej opracowanych na wykładzie studenci zaliczyli pojęcia: ciągu liczbowego zbieżnego do granicy skończonej (8) i granicy funkcji (7) oraz ciągu liczbowego zbieżnego do nieskończoności (9) i funkcji odwrotnej (6).

Natomiast do pojęć najsłabiej opracowanych zaliczono symbole nieoznaczone (10) i zbiory przeliczalne (4). Pojęcie kresu zbioru (5) znajduje się w środku tej listy, zaraz za pojęciem funkcji odwrotnej. Ankietowani wskazali również, że na ćwiczeniach najlepiej opanowali pojęcia: kresów zbioru (3), funkcji różnowartościowej (5), ciągu liczbowego zbieżnego do granicy skończonej (8) i ciągłości funkcji. Natomiast, podobnie jak na wykładzie, do pojęć najsłabiej opracowanych zaliczono symbole nieoznaczone (10) i zbiory przeliczalne (4). Może właśnie dlatego, mimo odesłania do literatury przedmiotu, zadanie 5 na egzaminie pisemnym wypadło słabo (paragraf 5.1).



Rysunek 6

W odpowiedzi na pytanie 13 studenci wskazali twierdzenia z kursu analizy matematycznej pierwszego semestru, których dowody nie sprawiły im trudności. W tabeli 12 podano jedynie twierdzenia wskazane przez więcej niż pięciu badanych.

Twierdzenie 1 ma prosty indukcyjny dowód oparty na nieskomplikowanym oszacowaniu. Twierdzenia o sumie i różnicy ciągów zbieżnych również nie wymagają subtelnych rozważań, zwłaszcza wtedy, gdy chce się skorzystać z jednorodności przejścia granicznego. Dowód twierdzenia 3 też jest prosty, gdyż wymaga jedynie skorzystania z definicji funkcji odwrotnej i złożenia funkcji. Mimo to zastosowanie tego twierdzenia nastręczało wielu studentom spore trudności podczas egzaminu ustnego. Trudności te były dwojakiego rodzaju:

– nieznajomość tego twierdzenia – podejmowano wtedy próbę rysowania wykresu funkcji i funkcji odwrotnej, ale nie umiano posłużyć się konstrukcją wykresu, będącego złożeniem tych funkcji;
– stosowano twierdzenie, ale mylono dziedzinę otrzymanej funkcji tożsamościowej.

Tabela 12. Twierdzenia, których dowody nie sprawiają trudności

Lp.	Twierdzenie	Liczba głosów
1.	nierówność Bernouliego	28
2.	działania w zbiorze ciągów zbieżnych (suma, różnica)	28
3.	twierdzenie o składaniu funkcji z funkcją odwrotną	25
4.	twierdzenie o trzech ciągach	24
5.	twierdzenie o jednoznaczności granicy ciągu	23
6.	zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry	14
7.	$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$	11
8.	$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$	8

Twierdzenie 4 ma również łatwy dowód oparty na dwu przesłankach: definicji granicy oraz zastosowaniu stosownej nierówności. Twierdzenia 5 i 6 to przykłady dwu twierdzeń, których dowody prowadzone były metodą „nie wprost”. Również i w nich liczba przesłanek, jakie stosuje się w dowodzie, jest niewielka. Natomiast dowody twierdzeń 7 i 8 oparte są na rutynowym zastosowaniu definicji stosownych funkcji cyklometrycznych.

Odpowiadając na pytanie 14, ankietowani stworzyli listę twierdzeń, których dowody były dla nich trudne (tabela 13). Tu również ograniczymy się tylko do twierdzeń wskazanych przez więcej niż 5 studentów.

Dowody twierdzeń wymienionych w tabeli 13 są bardziej skomplikowane od twierdzeń z tabeli 12. Wymagają subtelnych rozumowań. Większość z nich to dowody istnienia, polegające na konstruowaniu stosownych obiektów.

Oto najczęstsze trudności, które wskazali studenci odpowiadając na pytanie 15 ankiety. Przyczyny te podzielimy na następujące grupy:

a) merytoryczne – skomplikowany dowód złożony z wielu elementów, wymagający wykorzystania nowych pojęć (np. przeliczalności zbioru, ciągu Cauchy'ego, definicji Cauchy'ego granicy funkcji), innych twierdzeń lub technik (np. szacowanie, konstrukcja), długi dowód;

b) dydaktyczne – skomplikowany zapis i zbyt formalny język prowadzącego zajęcia, nieprecyzyjne wyjaśnienia dowodu, rozumowania oparte czasem na zadanych wcześniej fragmentach z literatury do samodzielnego przygotowania, luki w dowodzie przeznaczone do samodzielnego uzupełnienia przez słuchacza, za mało czasu poświęconego na omówienie dowodu;
c) subiektywne, tkwiące w studentach – luki w przygotowaniu do wykładu, niekorzystanie ze wskazanej literatury, trudności w zrozumieniu i zapamiętaniu poszczególnych etapów dowodu, trudności ze zrozumieniem planu dowodu, brak wiary w możliwości zrozumienia wykładanego materiału.

Tabela 13. Twierdzenia, których dowody sprawiają trudności

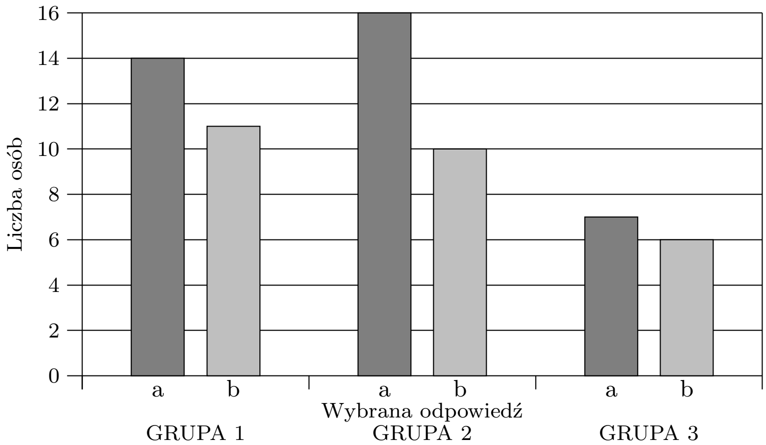
Lp.	Twierdzenie	Liczba głosów
1.	zbieżność ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	41
2.	twierdzenie Bolzano-Weierstrasa	32
3.	twierdzenie o ciągu zstępującym przedziałów	14
4.	twierdzenia o przeliczalności pewnych zbiorów	14
5.	twierdzenie o równoważności definicji Cauchy'ego i Heinego	7
6.	konsekwencje aksjomatu ciągłości	7
7.	każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny	7

Jest rzeczą niewątpliwą, że na zrozumienie wykładu lub ćwiczeń duży wpływ ma sposób formułowania definicji i twierdzeń. Zagadnieniu temu poświęcone było pytanie 9, w którym studenci wypowiadali się na temat sposobu wypowiadania definicji i twierdzeń.

Z rys. 7 wynika, że w każdej grupie ankietowanych:

a) najbardziej zrozumiały jest zapis słowny,
b) niespełna połowa preferuje zapis symboliczny.

W materiałach przygotowywanych do wykładu pojawiały się na ogół obie formy zapisu.



Rysunek 7

6.2.5. Umiejętność rozwiązywania standardowych problemów

W tym fragmencie pracy opiszemy odpowiedzi na pytanie 16. Dotyczyło ono umiejętności posługiwania się technikami rachunkowymi przy rozwiązywaniu podstawowych problemów z analizy matematycznej.

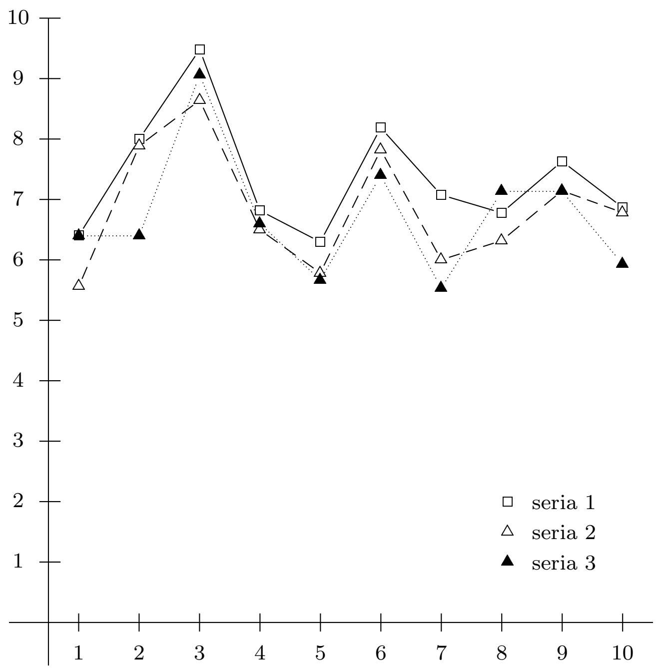
Na rys. 8 przedstawiono odpowiedzi na to pytanie w poszczególnych grupach badanych. Na osi poziomej układu współrzędnych na tym rysunku liczbami od 1 do 10 zaszyfrowano następujące zagadnienia:

1 – wyznaczanie kresów zbioru,
2 – rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną,
3 – wyznaczanie dziedziny funkcji,
4 – wyznaczanie obrazów zbioru,
5 – wyznaczanie przeciwobrazów zbioru,
6 – badanie różnowartościowości funkcji,
7 – odwracanie funkcji,
8 – badanie monotoniczności ciągu,
9 – wyznaczanie granic ciągów,
10 – wyznaczanie granic funkcji.

Na osi pionowej tego układu znajdują się średnie liczby punktów, które ankietowani w każdej grupie przyporządkowali poszczególnym czynnościom.

Z wykresów przedstawionych na tym rysunku wynika, że najłatwiejszą czynnością dla studentów w każdej z grup badanych, jest wyznaczanie dziedzin funkcji (3). Zapewne kojarzą z tą umiejętnością rozwiązywanie prostych układów nierówności. Następnymi umiejętnościami są: badanie różnowartościowości funkcji (6) i wyznaczanie granic ciągów (9). Te trzy umiejętności zostały wyniesione przez większość studentów ze szkoły średniej. Równocześnie ankietowani ujawnili, że umiejętność rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną (2) nie jest opanowana na porównywalnym poziomie przez wszystkich studentów. Absolwenci klas licealnych o profilu biologiczno-chemicznym oraz absolwenci techników nie opanowali tej umiejętności na należytym poziomie. Z uwagi na fakt, że biegłe posługiwanie się wartością bezwzględną jest ważną umiejętnością przy studiowaniu analizy matematycznej, ćwiczenia z analizy matematycznej należy rozpoczynać od tego tematu.

Do umiejętności, które zdaniem studentów każdej z grup, sprawiają im trudności, należą: wyznaczanie przeciwobrazów zbiorów (5), odwracanie funkcji (7) oraz wyznaczanie granic funkcji (10). Opinia studentów potwierdza trudności, jakie ujawnili przy rozwiązaniu zadania 1 podczas egzaminu pisemnego (por. 5.1).



Rysunek 8

6.2.6. Korzystanie z literatury przedmiotu

Studiowanie wymaga samodzielnej działalności i ustawicznego pogłębiania treści poznanych na wykładzie i ćwiczeniach. Umiejętności tej nie wynoszą na ogół absolwenci ze szkół średnich. Jak to wynika z opisanych już wyżej opinii (pytanie 15, paragraf 6.2.5), wolą materiał podany bez luk i odsyłania do literatury. W tej części pracy omówione zostaną odpowiedzi na pytania 17–20.

Jak odpowiadali studenci na pytanie o materiały, z których korzystali podczas przygotowania do zajęć, pokazuje tabela 14. Przez materiały pomocnicze rozumie się tu przede wszystkim scenariusze wykładów dostarczane przez wykładowcę oraz listy zadań i problemów otrzymywane na ćwiczeniach.

Tabela 14. Materiały do zajęć

Rodzaj materiałów	Grupa I	Grupa 2	Grupa 3	Ogółem
Podręcznik	19	23	13	55
Zbiór zadań	13	19	10	42
Materiały pomocnicze	24	25	14	63
Notatki własne	26	27	13	66

Jak się należało spodziewać, na pierwsze miejsce wysuwają się materiały przygotowywane przez prowadzących zajęcia i notatki własne. Odnotujmy również, że 79% badanych korzystało z różnych podręczników z analizy i jedynie 60% sięgało po różne zbiory zadań. Poniżej podano spis najczęściej używanych podręczników, w nawiasie wskazano liczbę ankietowanych, którzy je wymienili:

1. T. Krasiński, *Analiza matematyczna. Funkcje jednej zmiennej* (33);
2. A. Birkholc, *Analiza matematyczna dla nauczyciela* (5);
3. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy* (2);
4. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy* (2);
5. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej* (2).

Wśród zbiorów zadań ankietowani wymienili zbiory:

1. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. Część 1* (36);
2. E. Wachnicki, Z. Powązka, *Problemy analizy matematycznej w zadaniach. Część 1* (18);
3. J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej* (13);
4. A. Chronowski, H. Kąkol, Z. Powązka, *Granica i ciągłość funkcji* (5).

Zwróćmy uwagę również na fakt, że pojawili się wśród ankietowanych i tacy, którzy nie wymienili ani jednego podręcznika, a jedynie ograniczyli się do notatek własnych i materiałów otrzymywanych od prowadzących zajęcia. Zważywszy, że w ankiecie uczestniczyło jedynie 70 ze 145 osób, można przypuszczać, że umiejętność samodzielnego studiowania nie jest jeszcze należycie rozwinięta w całej populacji studentów I roku. Wielce charakterystyczna w tej mierze może być cytowana w paragrafie 3 wypowiedź o awersji do czytania książek.

Odpowiadając na pytanie 18, respondenci ocenili w skali od 1 do 5, w jakim stopniu scenariusze wykładów pomogły w zrozumieniu i opanowaniu przedmiotu. Absolwenci klas matematycznych ocenili te materiały na 4,48, absolwenci klas o profilu ogólnym na 4, a absolwenci pozostałych szkół na 3,98. Wynika stąd, że trud włożony w przygotowanie tych materiałów nie został zmarnowany. Można również zaryzykować stwierdzenie, że w zadowalający sposób pomogły studentom w pracy nad lepszym przyswojeniem treści.

W ramach przygotowań do opisanego wyżej badania opracowany został zbiór zadań wydany w formie skryptu (Wachnicki, Powązka 2002). Jak już wspomniano wcześniej, skrypt ten zawiera zadania łatwiejsze, nadające się do wykorzystania w czasie zajęć z analizy, oraz trudniejsze, przeznaczone do referowania na specjalistycznych zajęciach. Procent wykorzystania zadań z tego skryptu w każdej z badanych grup przedstawia tabela 15.

Tabela 15. Procent wykorzystania skryptu

Badani	Nie pomogły	Częściowo pomogły	Pomogły
Grupa 1	41%	18%	41%
Grupa 2	30%	44%	26%
Grupa 3	40%	27%	33%
RAZEM	37%	31%	32%

Z tabeli 15 wynika, że 37% badanych nie używało zadań ze skryptu, chociaż do każdego z nich dołączone jest pełne rozwiązanie. Pozostała część ankietowanych podjęła próbę studiowania tych rozwiązań. Dla 32% ogólnej liczby respondentów zadania te i ich rozwiązania stały się ważnym narzędziem szkoleniowym w procesie dowodzenia twierdzeń, a 31% stwierdza, że korzystała z tego zbioru niekiedy.

Pytanie 20 miało na celu sprawdzenie, w jaki sposób studenci przygotowywali się do egzaminu. Uzyskane odpowiedzi prezentuje tabela 16. Ankietowani ujawnili, że do egzaminu przygotowywali się przede wszystkim z własnych notatek z wykładu. Na drugim miejscu plasują się materiały dostarczane im w czasie zajęć, dopiero potem podręczniki i zbiory zadań. Ponadto pojawiły się jeszcze inne źródła informacji. Były to notatki z ćwiczeń lub ze szkoły średniej oraz pomoc koleżeńska.

Dane liczbowe i odpowiedzi w ankiecie wskazują na fakt, że duża liczba badanych studentów korzysta więcej niż z jednego źródła informacji. Są jednak i tacy, którzy nie używają np. podręcznika lub notatek z wykładu. Hipotezę tę sugerują dane liczbowe, ale nie ma gwarancji, czy ankietowani zmęczeni długością ankiety odpowiadali na pytania w do końca przemyślany sposób.

Tabela 16. Przygotowanie do egzaminu

Rodzaj materiałów	Grupa 1	Grupa 2	Grupa 3	Ogółem
Podręcznik	16	16	8	40
Zbiór zadań	13	14	5	32
Materiały pomocnicze	19	15	9	43
Notatki własne	25	23	12	60
Inne	3	5	1	9

6.2.7. Trudności w studiowaniu matematyki

Ostatnie dwa pytania ankiety (21, 22) dotyczą refleksji na temat zajęć w pierwszym semestrze studiów. Ankietowani wskazywali przedmioty ich zdaniem najłatwiejsze i najtrudniejsze oraz próbowali uzasadnić te opinie.

Do najłatwiejszych przedmiotów zaliczono geometrię elementarną (41% ankietowanych). W uzasadnieniu podkreślono, że merytorycznie tematyka wykładu jest bliska szkole średniej. Wykład i ćwiczenia są prowadzone przejrzyście, z dużą dbałością o to, by słuchacze zrozumieli przedstawiany materiał. Możliwość posłużenia się rysunkiem pomaga w zrozumieniu teorii.

Na drugim miejscu ulokowała się analiza matematyczna (40% respondentów). W uzasadnieniu swego wyboru studenci podkreślili, że przedmiot jest również dobrze osadzony w matematyce szkolnej, ma wiele ciekawych aspektów i prowadzony jest przystępnie.

Niewielkie (10%) zainteresowanie zdobył wstęp do matematyki. Ci, którzy go wskazali jako najłatwiejszy przedmiot, podkreślali jego logiczną budowę i ciekawe zadania rozwiązywane na ćwiczeniach.

Do najtrudniejszych przedmiotów ankietowani zaliczyli przede wszystkim algebrę (47%). Podkreślano przy tym, że materiał jest bardzo odległy od matematyki szkolnej i abstrakcyjny. Wymaga kojarzenia wielu nowych definicji i twierdzeń. Nie ułatwiał studiowania brak korelacji między wykładem a ćwiczeniami.

Drugim przedmiotem sprawiającym studentom spore trudności był wstęp do matematyki. Swe trudności studenci uzasadniali dosyć podobnie: przedmiot abstrakcyjny, wymagający logicznego myślenia, ćwiczenia sprowadzały się do dowodzenia różnych twierdzeń, wiele nietypowych zajęć.

Należy również odnotować, że 23% badanych wskazało na trudności z analizy matematycznej. Stwierdzili, że mimo iż przedmiot miał związki z matematyką szkolną, to było w nim wiele dowodów i dużo materiału do zrozumienia, trzeba było zatem poświęcić wiele czasu temu przedmiotowi.

7. Wnioski z badań

W paragrafie 2 niniejszej pracy zostały sformułowane cele i zadania szczegółowe prezentowanych badań. Próbę odpowiedzi na postawione tam pytania w świetle uzyskanych wyników zostały zawarte z paragrafie 6.

W tej części pracy podejmiemy próbę sformułowania kilku wniosków. Mają one charakter hipotetyczny, gdyż obserwacje prowadzone były w próbie 188 osób rozpoczynających studia w konkretnym okresie, tzn. w roku 2003. Formułowanie wniosków bardziej kategorycznych wymagałoby znaczącego rozszerzenia liczby badanych.

Oto te spostrzeżenia:

1. Osiągnięcia studenta pierwszego roku są w pełni zdeterminowane przez wiedzę wyniesioną ze szkoły średniej. Widzimy to wyraźnie, analizując odpowiedzi na pytania 21 i 22 ankiety (paragraf 6.2.7 i rysunki 2-4 (paragraf 6.2.1). W odpowiedziach tych znajduje potwierdzenie sformułowana przez Z. Krygowską wypowiedź:

   > Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. Stosunek ucznia do matematyki i motywacje uczenia się tego przedmiotu w dużej mierze od tego zależą.
   >
   > (Krygowska 1977, t. 3, s. 3)

   Studenci wysoko oceniali te przedmioty, które miały oparcie w programie szkoły średniej, natomiast narzekali na konieczność dowodzenia i posługiwania się myśleniem abstrakcyjnym. Widać nie robili tego w poprzednim etapie nauczania lub zajmowali się tym rzadko. Z analizy rysunków 2-4 wynika, że uczniowie klas matematycznych znali już dość dużą liczbę pojęć niezbędnych do zrozumienia kursu analizy. Z tego powodu było im na pewno łatwiej, przynajmniej w początkowym okresie studiowania omawianego przedmiotu. W znacznie trudniejszej sytuacji byli absolwenci klas o profilu ogólnym, a zwłaszcza klas o profilu biologiczno-chemicznym i absolwenci techników.

2. Nie wszyscy studenci wynieśli ze szkoły zamiłowanie do czytania i samodzielnego poszukiwania literatury na zadany temat. Umiejętność ta jest bardzo ważna przy studiowaniu matematyki, choć jak pisze J. Konior:

   > Tekst matematyczny ma specyficzną wśród innych tekstów budowę i wymaga specjalnych technik czytania (...) szkoła ma przygotowywać do samodzielnego uczenia się, nie może więc pomijać korzystania z podręcznika, w tym z tekstu matematycznego.
   >
   > (Konior, 1991)

Na umiejętność korzystania z tekstu matematycznego zwraca uwagę B. J. Nowecki:

> Jednym z ważnych źródeł wiedzy matematycznej, jaką powinien uczeń zdobyć w szkole, jest tekst matematyczny zawarty przede wszystkim w podręcznikach szkolnych. Umiejętność korzystania z tego tekstu ma znaczenie nie tylko doraźne, ograniczające się do opanowania określonych wiadomości. Jest ona jednym z ważnych celów ogólnych nauczania matematyki. Chodzi o to, by uczeń, zdobywając i rozwijając ową umiejętność, odnosił korzyść podwójną:
> – z jednej strony poznawał nowe treści,
> – z drugiej uczył się samodzielnego uczenia się matematyki za pomocą lektury tekstu matematycznego.
>
> (Nowecki, 1984)

Jak wynika z odpowiedzi na pytania 17 i 20 (paragraf 6.2.6) oraz z opisu motywacji studentów do studiowania (paragraf 3), dla niektórych studentów głównym źródłem informacji były notatki własne.

3. Wielu studentów pierwszego roku miało duże trudności w posługiwaniu się zapisem symbolicznym definicji i twierdzeń. Niezależnie od tego, jaki typ szkoły ukończyli ankietowani, ponad połowa z nich wskazała, że woli sformułowania słowne od symbolicznych z użyciem kwantyfikatorów i formuł logicznych (pytanie 9 paragraf 6.2.4). Problem ten jest znany i opisany w pracach z dydaktyki matematyki (Krygowska, 1977b, s. 27) Wynika stąd ważna wskazówka dla wykładowców, że ustalenie oceny z przedmiotu jedynie na podstawie egzaminu pisemnego nie jest wystarczające. Rozmowa ustna daje dużo lepszy obraz wiedzy studenta niż tylko sam egzamin pisemny.
4. Istotą kształcenia matematycznego jest zapoznawanie z dowodami twierdzeń. Jak pisze S. Turnau:

> Pojęcie dowodu twierdzenia i jego roli w strukturze jakiejś teorii matematycznej muszą niewątpliwie być zaliczane do tego, co nazywa się metodą matematyczną; więcej: to jeden z najistotniejszych elementów tej metody.
>
> (Turnau, 1972)

Obserwacje pokazują, że studenci łatwiej przyswajają dowody nieskomplikowane, o przejrzystej budowie logicznej, wymagające zastosowania jednej lub dwu definicji, niż dowody złożone, wymagające skomplikowanych i subtelnych rozumowań (pytania 13, 14, 15, paragraf 6.2.4). Z obserwacji indywidualnej podczas egzaminu ustnego lub ćwiczeń wynika, że radzą sobie oni z łatwiejszymi dowodami, a mają zasadnicze problemy z trudniejszymi rozumowaniami. Zdarza się również, że przy pozytywnej motywacji i pewnym wysiłku intelektualnym niektórzy z nich potrafią zrozumieć bardziej skomplikowane dowody (np. dowód twierdzenia Bolzano-Weierstrassa).

Wydaje się zatem właściwe wyróżnienie (przynajmniej na potrzeby tej pracy) pewnych grup twierdzeń ze względu na budowę ich dowodów.

Pierwszą grupę tworzą twierdzenia, których dowody są typu operacyjnego, tzn. otrzymywane w wyniku przejrzystego ciągu operacji rachunkowych opartych np. na definicji jednego pojęcia, względnie bezpośrednio wynikające z kilku twierdzeń. Do twierdzeń takich zaliczyć można: nierówność Bernouliego, działania w zbiorze ciągów zbieżnych (suma, różnica), twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o jednoznaczności granicy ciągu, dodawanie arcusów ($\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$), działania na pochodnych.

Do drugiej grupy zaliczamy twierdzenia, których dowody są typu konstrukcyjnego. W tych dowodach wykonuje się konstrukcję istniejącego obiektu lub dedukuje jego istnienie z innych twierdzeń. Do tej grupy można zaliczyć twierdzenia będące konsekwencjami aksjomatu ciągłości (np. twierdzenie o nieograniczoności zbioru liczb naturalnych, twierdzenie o istnieniu cechy liczby rzeczywistej, twierdzenie o ciągu zstępującym przedziałów domkniętych), twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.

Grupę trzecią tworzą twierdzenia, których dowody składają się z co najmniej dwu autonomicznych fragmentów. Uświadomienie sobie struktury wzajemnych związków między tymi fragmentami ułatwia opanowanie dowodu i jego odtworzenie. Do tej grupy należą np. dowód, że dana liczba jest granicą ciągu lub granicą funkcji w punkcie (wg definicji Cauchy'ego).

Dowody twierdzeń grupy pierwszej oparte są bezpośrednio na definicji pojęcia lub jej zaprzeczeniu, a sposoby postępowania dają się opisać prostymi algorytmami rachunkowymi. W dowodach twierdzeń grup drugiej i trzeciej spotykamy się na ogół z bardziej złożonymi metodami postępowania, np. z szacowaniem. Obserwacje pokazują, że dowody twierdzeń z grupy pierwszej są przyswajane przez studentów bez większych trudności. Natomiast dowody twierdzeń grup drugiej lub trzeciej, ze względu na swą budowę lub stosowane tam metody, stwarzają studentom duże trudności (pytanie 15, paragraf 6.2.4).

5. Wyniki egzaminu pisemnego (paragraf 6.2.1) wskazują, że wyróżnione przez J. Lompschera (Lompscher, 1972; Nowak, 1989) składowe wiedzy werbalnej przenikają się wzajemnie. Wydaje się, że niektórzy studenci zdobywają szybciej znajomość przepisów lub sposobów działania od znajomości faktów lub kryteriów oceny. Zjawisko to zależy zapewne od motywacji do studiowania przedmiotu. Może to być również pozostałość szkolnego uczenia się przedmiotu polegającego na rozwiązywaniu wielu typowych zadań ćwiczących biegłość posługiwania się standardowymi

procedurami rachunkowymi, takimi jak rozwiązywanie równań liniowych i kwadratowych, ich układów, wyznaczanie granic ciągów itp.

6. Analiza odpowiedzi na pytanie 16 (paragraf 6.2.4, rys. 8) sugeruje, że zadania rozwiązywane przez studentów na zajęciach z analizy matematycznej można, podobnie jak w badaniach A. Sfard i L. Lichnievski nad rozumieniem przez uczniów wyrażeń algebraicznych (Turnau, 1994), podzielić na trzy grupy:

   (a) Zadania, do rozwiązania których wystarczają jedynie umiejętności operacyjne rozumiane tu jako stosowanie klasycznych procedur rachunkowych.

   Do grupy tej należą np. zadania na wyznaczanie dziedziny funkcji, badanie jej różnowartościowości, wyznaczanie granic ciągów. Studenci rozwiązując zadania na wyznaczanie dziedziny funkcji, stosowali koniunkcję kilku elementarnych nierówności, wynikających z wykonalności działań algebraicznych. Badanie różnowartościowości sprowadzało się na ogół do rozważania równości $f(x_1) = f(x_2)$ i wnioskowania z niej o związku między liczbami x_1 oraz x_2. To wnioskowanie sprowadzało się zazwyczaj do stosowania własności funkcji elementarnych. Również większość zadań na obliczanie granicy ciągu, znajdujących się w różnych zbiorach, sprowadzało się do wykonywania standardowych algorytmów i nie wymagało bardziej skomplikowanych operacji myślowych.

   (b) Zadania, do rozwiązania których niezbędne jest rozumienie strukturalne.

   Student wykorzystuje do rozwiązania analogie i zdobyte doświadczenia, podejmuje próbę przekształcenia postawionego problemu do sytuacji umożliwiającej wykorzystanie znanego postępowania. Do grupy tej można by zaliczyć zadania na wyznaczanie kresów zbioru, wyznaczanie obrazów zbioru, odwracanie funkcji, badanie monotoniczności ciągów liczbowych, wyznaczanie granic funkcji. Powyższe zagadnienia są znacznie trudniejsze od tych, które pojawiły się w poprzedniej grupie. Do ich rozwiązania, jak pokazują wyniki egzaminu pisemnego (paragraf 6.2.1), nie wystarcza ani sama znajomość stosownej definicji (kresu zbioru, obrazu zbioru, funkcji odwrotnej, monotoniczności ciągu, granicy funkcji), ani umiejętność rozwiązywania standardowych równań i nierówności czy obliczania granic pewnych typów ciągów. Bez rozumienia struktury danego problemu i umiejętności zastosowania odpowiedniego algorytmu rozwiązanie takiego zadania skazane jest na porażkę.

   (c) Zadania, do których rozwiązania potrzebne jest rozumienie funkcyjne.

Postawiony problem jawi się tu w umyśle studenta nie jako obraz izolowanego pojęcia, ale w powiązaniu z innymi znanymi już faktami. Rozwiązujący, w wyniku posiadanego już doświadczenia, może przekształcać ten obraz i wybierać najwłaściwsze drogi rozwiązania zadania. W tej grupie znajdują się np. niektóre równania i nierówności z wartością bezwzględną, wyznaczanie przeciwobrazów zbiorów.

Opisany tu podział zadań zależy od subiektywnych umiejętności studenta oraz od jego przygotowania do studiów wyższych, czyli od profilu wykształcenia w szkole średniej (por. rys. 8).

7. Jak już wspomniano w paragrafie 1, we właściwym rozumieniu i poprawnym posługiwaniu się pojęciami abstrakcyjnymi pomaga dobra znajomość modeli tych pojęć. Spłycanie treści matematycznych w obecnych programach szkół ponadgimnazjalnych i zmniejszanie liczby godzin przeznaczonych na lekcje z matematyki powoduje w konsekwencji sprowadzanie edukacji do zaznajamiania młodzieży z podstawowymi algorytmami, często bez głębszej refleksji nad poznawanymi zagadnieniami. Tymczasem matematyka rozwija się coraz szybciej i nowe treści muszą pojawiać się w programach studiów matematycznych. Na problem ten zwracano już uwagę w 1967 roku na międzynarodowym kolokwium poświęconym korelacji matematyki z fizyką. W dokumencie z tego kolokwium napisano:

> Matematyka rozwija się coraz bardziej w kierunku ogólnej teorii o strukturach. Im zawdzięcza ogromne możliwości zastosowań (...). Znajomość i opanowanie tych struktur, posługiwanie się nimi w ujmowaniu rzeczywistości, to prawdziwe cele nauczania matematyki. Niektóre z tych struktur są tak elementarne, że byłoby słuszne posługiwać się nimi już w dzieciństwie.
>
> (Krygowska, 1977, s. 15)

Znajomość pojęć z analizy matematycznej, które przed 2002 rokiem były w programach szkolnych, w istotny sposób zależy od tego, jaki profil kończy uczeń szkoły średniej (zob. rys. 2–4). Nie jest to zapewne zjawisko społecznie niepożądane, gdyż nie wszyscy mają talent do studiowania matematyki, ale z tego faktu muszą sobie zdawać sprawę uczniowie, którzy chcą studiować matematykę.

8. Podsumowując uzyskane przez studentów wyniki pod względem realizacji założonych celów nauczania, przyjętych w paragrafie 1, należy stwierdzić na podstawie wyników egzaminu (tabela 2) i opinii studentów (paragraf 6.2.7), że na poziomie celów pierwszego poziomu, wyniki można uznać za zadawalające. Nieco gorzej było z celami drugiego poziomu (analiza matematyczna została uznana przez studentów jako drugi pod względem przystępności przedmiot matematyczny na roku pierwszym). O realizacji celów trzeciego poziomu będzie można coś powiedzieć dokładniej po podsumowaniu wyników tego roku jesienią 2004. Z obserwacji prowadzącego

zajęcia można powiedzieć, że pojawiła się niewielka grupa osób podejmująca samodzielne próby własnej działalności naukowej.

9. Stosowane metody aktywizowania studentów i przyzwyczajania ich do samodzielnego myślenia i zrozumienia przyswajanego materiału okazały się nie do końca skuteczne. Egzamin ustny ujawnił grupę osób, które uczyły się na pamięć bez zrozumienia. Problem ten pojawia się przy wielu egzaminach. Można go wyeliminować chyba jedynie przez stawiane studentom niestandardowych problemów w trakcie całego procesu edukacyjnego.
10. Umiejętne stosowanie komputerów lub kalkulatorów graficznych może spowodować wzrost zainteresowania zagadnieniami z analizy i pomóc w zrozumieniu jej pojęć (por. Kąkol, Ratusiński, 2004). Wymaga to jednak, jak się wydaje, głębszych zmian tak w programie, jak również w organizacji prowadzenia zajęć.

Podręczniki i zbiory zadań

Banaś, J., Wędrychowicz, S.: 1997, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa.

Birkholc, A.: 1977, *Analiza matematyczna dla nauczyciela*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Chronowski, A., Kąkol, H., Powązka, Z.: 1998, *Granica i ciągłość funkcji*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała.

Fichtenholz, G. M.: 1985, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Krasiński, T.: 2003, *Analiza matematyczna, Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Krysicki, W., Włodarski, L.: 1974, *Analiza matematyczna w zadaniach. Część 1*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Leja, F.: 1975, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Rudnicki, T.: 2002, *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN S.A., Warszawa.

Wachnicki, E., Powązka, Z.: 2002, *Problemy analizy matematycznej w zadaniach. Część 1*, wydano nakładem Instytutu Matematyki Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Prace cytowane

Bugajska-Jaszczołt, B.: 2001, O rozumieniu pojęcia kresu zbioru przez uczniów liceum, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 51 - 93.

Bugajska-Jaszczołt, B., Treliński, G.: 2002, Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), *XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki*, CD–ROM.

Ciesielska, D., Czaplińska, J., Powązka, Z.: 2004, Z badań nad egzaminami wstępnymi na studia dzienne na kierunek matematyka w akademii pedagogicznej w krakowie, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 35-60.

Czaplińska, J.: 2003a, Przyczynek do badań nad strategiami rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 5-68.

Czaplińska, J.: 2003b, Trudności w stosowaniu pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego, *Disputationes Scientificae Univ. Catholicae in Ružomberok* **3**(3), 3-10.

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesoe rpzwiazywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119-138.

Konior, J.: 1991, Praca z tekstem matematycznym w nauczaniu szkolnym, w: B. Rabijewska (red.), *Wybrane ćwiczenia z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 23-36.

Kozielecki, J.: 1976, *Koncepcje psychologiczne człowieka*, PIW, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1956, O niebezpieczeństwach formalizmu w nauczaniu algebry, *Matematyka* **4**, 15-26.

Krygowska, Z.: 1975, Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej, a nauczanie matematyki w szkole powszechnej, *Matematyka* **2**, 103-114.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych lat 1960-1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Lompscher, J. (red.): 1972, *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwiclung geistiger Fähigkeiten*, Volk und Wissen, Berlin.

Major, M.: 1996, Wiedza probabilistyczna maturzystów (wnioski z trzech egzaminów wstępnych na studia, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **18**, 103-137.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Nowecki, B.: 1985, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów, *Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych PAN* **20**, 29-64. Także *w:* Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 2001, Płock, 227-271.

Nowecki, B. J.: 1984, Lektura tekstu matematycznego na przykładzie zadań, *Oświata i wychowanie* **15** (Wersja B), 48-52. Także *w:* Żabowski J. (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, część II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 2001, 71-80.

Nowecki, B. J.: 2004, Dokształcanie i doskonalenie nauczycieli na studiach podyplomowych. W druku.

Przeniosło, M.: 2001, Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 95-124.

Sierpińska, A.: 1985, O niektórych trudnościach uczeniu się pojęcia granicy – na podstawie studium przypadku, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **4**, 107-167.

Szewczuk, W.: 1993, Zdolności – uzdolnienia, w: W. Pomykało (red.), *Encyklopedia pedagogiczna*, Fundacja "Innowacja", Warszawa, 991-996.

Tall, D., Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.

Turnau, S.: 1972, Problem dowodzenia w nowoczesnym nauczaniu matematyki, *Roczniki PTM, seria II, Wiadomości Matematyczne* **15**, 91-96.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Turnau, S.: 1994, Och, te równania!, *Nauczyciele i Matematyka* **10**, 27.

Ćwik, M.: 1984, Zdegenerowany formalizm w myśleniu niektórych uczniów szkoły średniej, *Matematyka* **3**, 45-84.

Wittmann, E.: 1975, *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunsweig.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl

Aneks

Załącznik 1

Ankieta sondażowa dotycząca analizy matematycznej

1. Wskaż właściwy typ szkoły, do której uczęszczałeś, zakreślając stosowną odpowiedź:
   a) liceum ogólnokształcące , klasa o profilu……….,
   b) liceum profilowane (profil………………………………),
   c) technikum.

2. Ustaw w kolejności od 1 do 13 zagadnienia matematyczne, które były szczególnie ulubione w szkole średniej. Jeżeli jakiś temat nie był realizowany, zaznacz go cyfrą 0. **Uwaga!** 1 oznacza, że dany temat był najbardziej ulubiony, a 13 – najmniej ulubiony.
   .

Temat	Liczba punktów
Elementy logiki	
Funkcje (badanie władności tworzenie wykresów bez pomocy pochodnej)	
Badanie funkcji przy pomocy pochodnej	
Równania i nierówności liniowe i kwadratowe	
Równania i nierówności wielomianowe i wymierne	
Równania i nierówności z wartością bezwzględną	
Równania i nierówności wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne	
Ciągi liczbowe (arytmetyczny i geometryczny)	
Badanie granic ciągów liczbowych	
Geometria analityczna	
Geometria płaska (planimetria)	
Stereometria	
Rachunek prawdopodobieństwa	

3. Napisz w kilku słowach, jaka była Twoja motywacja do wyboru kierunku studiów.
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

W poniższej tabeli podano najważniejsze pojęcia, które pojawiły się na wykładzie z analizy matematycznej w pierwszym semestrze. W kolumnach tej tabeli zaznacz znakiem „x” odpowiedzi na pytania 4, 5, 6, 7.

4. Które z treści kształcenia z zakresu analizy matematycznej były Ci znane ze szkoły średniej?

5. Jakie treści matematyczne (pojęcia lub twierdzenia) z analizy matematycznej sprawiają Ci najwięcej trudności?

6. Którym treściom matematycznym poświęcono Twoim zdaniem zbyt mało czasu:
   a) na wykładzie z analizy matematycznej,
   b) na ćwiczeniach z tego przedmiotu ?

7. Którym treściom matematycznym poświęcono Twoim zdaniem zbyt dużo czasu:
   a) na wykładzie z analizy matematycznej,
   b) na ćwiczeniach z tego przedmiotu ?

Treści matematyczne	Pytanie 4	Pytanie 5	Pytanie 6		Pytanie 7	
			a)	b)	a)	b)
Zbiory ograniczone i nieograniczone						
Kresy zbioru						
Twierdzenie o indukcji						
Ciągłość zbioru liczb rzeczywistych						
Funkcja						
Obraz zbioru						
Przeciwobraz zbioru						
Ograniczoność i nieograniczoność funkcji						
Składanie funkcji						
Różnowartościowość funkcji						
Wartość bezwzględna						
Funkcja odwrotna						
Funkcja wykładnicza						
Funkcja logarytmiczna						
Funkcje cyklometryczne						
Ciągi liczbowe						
Podciąg ciągu						
Zbieżność ciągu do granicy skończonej						
Granice niewłaściwe						
Ciągi Cauchy'ego i ich własności						
Granica dolna i górna ciągu						
Granica funkcji w punkcie						
Granice jednostronne funkcji w punkcie						
Symbole nieoznaczone						
Ciągłość funkcji						
Pochodna funkcji						
Zastosowanie pochodnej do badania funkcji						

8. Jakie pojęcie matematyczne na zajęciach z analizy matematycznej zaciekawiło Cię najbardziej?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

9. Zakreśl, który ze sposobów formułowania matematycznych wypowiedzi jest dla Ciebie najbardziej zrozumiały:
   a) wypowiedź słowna,
   b) wypowiedź z użyciem kwantyfikatorów i symboli logicznych.

W poniższej tabeli podano dziesięć istotnych dla kursu analizy matematycznej haseł programowych, które mogą stwarzać określone trudności. Udziel w tej tabeli odpowiedzi na pytania: 10,11, 12.

10. Oceń (w skali od 1 do 10) trudność pojęć podanych w tabeli.
11. W skali od 1 do 10 oceń opracowanie poszczególnych pojęć na wykładzie z analizy matematycznej.

12. W skali od 1 do 10 oceń opracowanie poszczególnych pojęć na ćwiczeniach z analizy matematycznej.

Uwaga do pytań 10 – 12: 1 oznacza, że dane pojęcie masz źle opanowane, 10 oznacza, że dane pojęcie masz dobrze opanowane.

Pojęcie matematyczne	Skala trudności		
	Pytanie 10	Pytanie 11	Pytanie 12
Zbiór ograniczony,			
Zbiór nieograniczony			
Kresy zbioru			
Zbiór przeliczalny			
Funkcja różnowartościowa			
Funkcja odwrotna			
Granica funkcji			
Ciąg liczbowy zbieżny do granicy skończonej			
Ciąg liczbowy zbieżny do nieskończoności			
Symbol nieoznaczony			

13. Wymień trzy twierdzenia z kursu analizy matematycznej (I semestr), których dowody nie sprawiły Ci żadnych trudności.
   a) ……………………………………………………………………………………
   b) ……………………………………………………………………………………
   c) ……………………………………………………………………………………

14. Wymień trzy twierdzenia z kursu analizy matematycznej (I semestr), których dowody sprawiły Ci największą trudność.
   a) ……………………………………………………………………………………
   b) ……………………………………………………………………………………
   c) ……………………………………………………………………………………

15. Wskaż, na czym polegały trudności w zrozumieniu dowodów twierdzeń z pytania 14.
   a) ……………………………………………………………………………………
   b) ……………………………………………………………………………………
   c) ……………………………………………………………………………………

16. Oceń (w skali od 1 do 10) Twoje umiejętności przy rozwiązywaniu podanych problemów

Uwaga: 1 oznacza, że danego problemu nie umiesz rozwiązać, 10 oznacza, że dany problem nie sprawia Ci żadnych trudności.

Problemy matematyczne	Skala punktowa
Wyznaczanie kresów zbioru	
Rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną	
Wyznaczanie dziedziny funkcji	
Wyznaczanie obrazów zbioru	
Wyznaczanie przeciwobrazów zbioru	
Badanie różnowartościowości funkcji	
Odwracanie funkcji	
Badanie monotoniczności ciągów	
Wyznaczanie granic ciągów	
Wyznaczanie granic funkcji	

17. Zakreśl, z jakich materiałów korzystałeś przygotowując się do zajęć z analizy:
    a) podręcznik (jaki?),
    b) zbiór zadań (jaki?),
    c) materiały pomocnicze dawane przez wykładowcę,
    d) notatki własne.
18. Oceń w skali od 1 do 5, w jakim stopniu materiały pomocnicze opracowane przez wykładowcę pomogły Ci w zrozumieniu i opanowaniu przedmiotu? ……………

Uwaga: 1 oznacza, że nie korzystałeś z tych materiałów, 5 oznacza, że korzystałeś z nich stale. ……………………………………………………………………………………….

19. Czy zadania ze skryptu (E. Wachnicki i Z. Powązka *Problemy analizy matematycznej w zadaniach)* przygotowywane do referowania pomogły Ci w zrozumieniu metod rozwiązywania problemów z analizy matematycznej?
    ………………………………………………………………………………………
    ………………………………………………………………………………………
    ………………………………………………………………………………………
20. Z jakich materiałów przygotowywałeś się na egzamin z analizy matematycznej?
    ………………………………………………………………………………………
    ………………………………………………………………………………………
21. Który z przedmiotów matematycznych z I semestru studiów był według Ciebie najłatwiejszy? Z jakiego powodu?
    ………………………………………………………………………………………
    ………………………………………………………………………………………
22. Który z przedmiotów matematycznych z I semestru studiów był według Ciebie najtrudniejszy? Z jakiego powodu?
    ………………………………………………………………………………………
    ………………………………………………………………………………………

Załącznik 2

Aksjomat ciągłości i jego konsekwencje

1. DEFINICJA 2.1

a) Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$\forall_{x \in A}\, a \leq x.$$

b) Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy ograniczonym z góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista b taka, że

$$\forall_{x \in A}\ x \leq b.$$

c) Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste a i b takie, że

$$\forall_{x \in A}\, a \leq x \leq b.$$

Definicję 2.1 c) można zapisać w równoważny sposób.
Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$\forall_{x \in A}\ |x| \leq M.$$

Symbolicznie:

$$\exists_{M>0} \forall_{x \in A}\ |x| < M.$$

2. DEFINICJA 2.2

Kresem dolnym niepustego zbioru $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy najmniejszą liczbę w zbiorze lub największą ograniczającą zbiór z dołu.
Symbolicznie:

$$a = \inf A \iff \forall_{x \in A}\, a \leq x \wedge \forall_{\varepsilon>0} \exists_{x' \in A}\, x' < a + \varepsilon.$$

3. DEFINICJA 2.3

Kresem górnym niepustego zbioru $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy największą liczbę w zbiorze lub najmniejszą ograniczającą zbiór z dołu.
Symbolicznie:

$$b = \sup A \iff \forall_{x \in A}\, x \leq b \wedge \forall_{\varepsilon>0} \exists_{x' \in A}\, x' > b - \varepsilon.$$

4. DEFINICJA 2.4

Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy nieograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest ograniczony
Symbolicznie:

$$\forall_{M>0} \exists_{x \in A}\ |x| \geq M.$$

5. Aksjomat ciągłości.

Każdy niepusty i ograniczony z dołu podzbiór zbioru **R** posiada kres dolny.

6. Aksjomat ten równoważny jest twierdzeniu:

TWIERDZENIE 1 (dowód)
Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru **R** posiada kres górny.

Wnioskiem z aksjomatu ciągłości i twierdzenia 1 jest następujące
TWIERDZENIE 2 (dowód)
Każdy niepusty i ograniczony podzbiór zbioru **R** posiada kresy.

7. TWIERDZENIE 3 (dowód)
Zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony z góry.

8. TWIERDZENIE 4
Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jedna liczba całkowita n taka, że $n \leq x < n+1$.

9. DEFINICJA 2.5
Cechą liczby x nazywamy największą liczbę całkowitą niewiększą od liczby x. Cechę liczby x oznaczamy symbolem E(x) lub [x].

10. TWIERDZENIE 5 (dowód)
W każdym przedziale $(a, b) \subset \mathbf{R}$ istnieje liczba wymierna.

11. TWIERDZENIE 6 (pewnik Archimedesa)
Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba naturalna od niej większa.

Literatura

[1] A. Birkholz – *Analiza matematyczna dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1977, roz. I par. 1.2.

Ciągi liczbowe i ich granice

1. DEFINICJA 1
Ciągiem liczbowym nieskończonym (lub krótko ciągiem liczbowym) nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą określoną na zbiorze liczb naturalnych.

2. DEFINICJA 2
a) Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rosnącym (słabo rosnącym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{n\in N}\ a_n < a_{n+1}\ \ (\forall_{n\in N}\ a_n \le a_{n+1}).$$

b) Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem malejącym (słabo malejącym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{n\in N}\ a_n > a_{n+1}\ \ (\forall_{n\in N}\ a_n \ge a_{n+1}).$$

3. DEFINICJA 3
Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{M>0}\ \forall_{n\in N}\ |a_n| < M.$$

4. DEFINICJA 4
Ciąg (a_n) nazywamy zbieżnym do granicy skończonej *g* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_n\ (n > N \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon\ ).$$

5. TWIERDZENIE 1 (dowód)
Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to tylko do jednej granicy.

6. TWIERDZENIE 2 (dowód)
Każdy ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony.

7. TWIERDZENIE 3 - działania w zbiorze ciągów zbieżnych (dowód)
Niech ciąg $a_n \to a$, $b_n \to b$ i c oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Wtedy:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = ca$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) = ab$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, przy czym $b \neq 0$.

8. TWIERDZENIE 4
Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

9. TWIERDZENIE 5 (o trzech ciągach)
Niech będą dane trzy ciągi (a_n), (b_n), (c_n). Jeżeli dla prawie wszystkich n zachodzi nierówność $a_n \le b_n \le c_n$ tzn.

$$\exists_N \forall_n \ [n > N \Rightarrow a_n \le b_n \le c_n]$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Literatura

[1] t. Krasiński – *Analiza matematyczna, Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2003,52 – 57,
[2] R. Rudnicki – *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002, roz. II par. 2.2.

Załącznik 3

lista nr 3 - kresy zbioru

1. Wyznaczyć kres dolny i górny podanych zbiorów:
a) $\{x \in R;\ 2x + 4 < 7\}$,
b) $\{x \in R;\ -3 \leq x - 1 < 7\}$,
c) $\{x \in R;\ -2 \leq \frac{2x-6}{x} < 1\}$,
d) $\{x \in R;\ x^2 - 2x + 4 < 7\}$,
e) $\{1 + \frac{3}{n};\ n \in N\}$,
f) $\{2^n;\ n \in N\}$.

Problemy:

1a) Rozważmy zbiór A = $\left\{c + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$, B = $\left\{c - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$, gdzie N oznacza zbiór liczb naturalnych różnych od zera, a *c* jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć kresy zbiorów A i B.

b) Niech *c, k* ∈ R. Wyznaczyć w zależności od wartości liczb *c* oraz *k* kresy dolny i górny zbiorów C = $\left\{c + \frac{k}{n} : n \in N\right\}$, D = $\left\{c - \frac{k}{n} : n \in N\right\}$.

2a) Zbiór A jest niepustym i ograniczonym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Ustalić i udowodnić nierówność między kresem górnym zbioru A i liczbą b spełniającą warunek b > a, gdzie a jest dowolną liczbą ze zbioru A.

b) Sformułować odpowiedni problem dla kresu dolnego zbioru A i liczby c spełniającej warunek c < a dla dowolnego a ze zbioru A.

3. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone z góry. Ustalić związki między kresami górnymi zbiorów A i B, gdy $A \subset B$ oraz między kresami zbiorów będących wynikami działań mnogościowych na zbiorach A i B.

4. Sformułować i rozstrzygnąć problem analogiczny jak w problemie **3**, gdy zbiory A i B są ograniczone z dołu.

5. Niech A i B będą dwoma niepustymi podzbiorami zbioru A. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

i) $\forall_{x \in A} \forall_{y \in B}\ x \leq y$ i $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} \exists_{y \in B}\ y - x \leq \varepsilon$,

ii) $\sup A = \inf B$.

6. Zbiór A jest niepustym i ograniczonym podzbiorem zbioru R. Zbiory

$$B = \{x + k;\ x \in A\},\quad C = \{kx;\ x \in A\},$$

gdzie *k* jest dowolną liczba rzeczywistą. Wyznaczyć kresy zbiorów B i C w zależności od kresów zbioru A.

lista nr 5 - Własności funkcji

1. Wykazać, że funkcja $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ jest nieparzysta.

2. Wykazać, że dla każdej liczby x $\in(-1,1)$ zachodzi równość

$$\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Narysować wykresy funkcji: a) y = arccos(cos x), b) y = cos(arccos x).

4. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $4\mathrm{arctg}(x^2-3x+3) = \pi$,

b) $\sin(\pi \mathrm{arctg}\, x) = \cos(\pi \mathrm{arctg}\, x)$,

c) arcsinx > arcos x,

d) $0{,}25\pi - \mathrm{arctg}\frac{2x}{x-1} > 0$,

e) $\log_{0,5}(\arcsin(3x^2+2x)) > 0$.

Problemy

1. Niech *m* oznacza dowolnie ustalona liczbę rzeczywistą. Rozważmy funkcję f_m określoną wzorem

$$f_m(x) = \sqrt{x^2+mx-m}.$$

a) Zbadać w zależności od *m* dziedzinę funkcji f_m.

b) Wykazać, że funkcja f_m jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 0$.

c) Dobrać tak wartości parametru *m* , aby funkcja f_m była rosnąca w swej dziedzinie.

2. Rozważmy funkcję *f* określona wzorem

$$f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}.$$

a) Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji *f*.

b) Dla funkcji *f* obciętej kolejno do wyznaczonych w a) przedziałów monotoniczności wyznaczyć funkcje odwrotną.

3. Niech $f:[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją słabo rosnącą.

a) Wykazać, że zbiór $A = \{x\in[0,1];\ x \le f(x)\}$ nie jest zbiorem pustym.

b) Niech a = sup A. Wykazać, że $a = f(a)$.

c) Wyznaczyć inf A.

4. Wiedząc, że funkcja *f* jest określona na zbiorze ograniczonym i niepustym, zawartym w R, zbadać, jakim zbiorem jest zbiór $f(A)$, gdy funkcja *f* jest rosnąca, a jakim, gdy jest malejąca.

Załącznik 4

Tematy kolokwium nr 1
z analizy matematycznej I rok matematyki

Zadanie 1 (3 punkty)
Narysować wykres funkcji:
a) $f(x) = |\cos x - 1|$,
b) $g(x) = ||2x-1| - 2|$,
c) $h(x) = |x|\cdot|5x+1|$.

Zadnie 2 (4 pnkty)
Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości najmniejsze:
a) $f(x) = |x\sin x| - |x|$,
b) $g(x) = |\sin x - 0{,}5| - 1$.
Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 3 (6 punkty)
W zależności od wartości parametru *a* wyznaczyć wartości najmniejsze funkcji:
a) $f(x) = |x+2| + |x - a|$,
b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - |x - a|$.

Zadanie 4 (3 punkty)
Rozwiązać równania i nierówności:
a) $|x^2 + 3x - 4| + |2x-2| = 0$,
b) $|2x + 4| = x - 1$,
c) $|x+|x-1|| < 2$,
d) $|3x-6|-2<0$.

Tematy kolokwium nr 2
z analizy matematycznej I rok matematyki

1. (2 punkty) Wyznaczyć kresy zbioru A = $\left\{\frac{2n+1}{n-2};\ n \in N,\ n > 2\right\}$.

2. (10 punktów) Obliczyć granice poniższych ciągów i podać twierdzenia, z których skorzystano:

a) $a_n = \frac{n^2+3n-4}{n^2+3n+2}$,

b) $b_n = \sqrt{n^2-2n-3} - n$,

c) $c_n = \sqrt[n]{n^2+3^n+5^n}$,

d) $d_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$,

e) $e_n = \frac{1+3+\ldots+(2n+1)}{2+4+\ldots+2^n}\cos(n\pi)$.

3. (2 punkty) Udowodnić na podstawie definicji granicy, że

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$

4.(2 punkty) Załóżmy, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy $g \neq 0$, a ciąg b_n do $-\infty$. Wykazać, że ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ jest zbieżny do 0.

5. (3 punkty) Rozwiązać równanie $\log_{0,5}(\arcsin(3x^2+2x)) = 0$.

6. (2 punkty) Narysować wykresy funkcji $f(x) = \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$ i $g(x) = \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x)$.

Załącznik 5

Tematy egzaminu pisemnego
z analizy matematycznej

Grupa A

1. (3 punkty) Dana jest funkcja f:R → R określona wzorem f(x) = ||x + 2| – 4|. Korzystając z definicji wyznaczyć przeciwobraz zbioru (-∞, 4]. Wykonać stosowny rysunek.
2. (2 punkty) Wyznaczyć kresy zbioru: A = $\left\{\frac{5n+1}{2n-4}; n \in N, n > 2\right\}$.
3. (8 punktów) Obliczyć granice poszczególnych ciągów, podając twierdzenia, z których skorzystano:
   a) $a_n = \frac{n\sqrt{n}+1}{n^3 - n^2 + \sqrt{n}} \sin(n^n)$,
   b) $b_n = \frac{1+2+3+...+(2n-1)}{1+2+...+2^n}$,
   c) $c_n = \sqrt{4n^2+2n-1} - 2n$,
   d) $d_n = \left(\frac{n^2+n}{2n^2+1}\right)^n$.
4. (2 punkty) Uzasadnić na przykładach nieoznaczoność symbolu $0 \cdot \infty$.
5. (2 punkty) Wykazać z definicji granicy, że ciąg $a_n = \frac{(-1)^n}{5}$ nie jest zbieżny.
6. (3 punkty) Rozważmy ciąg: $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$, n ∈N. Wykazać, że ciąg a_n jest ograniczony z dołu przez liczbę 2.

Grupa B

1. (3 punkty) Dana jest funkcja f:R → R określona wzorem f(x) = ||x – 2| – 4|. Korzystając z definicji wyznaczyć przeciwobraz zbioru (-∞, 4]. Wykonać stosowny rysunek.
2. (2 punkty) Wyznaczyć kresy zbioru: A = $\left\{\frac{3n+1}{2n-4}; n \in N\right\}$.
3. (8 punkty) Obliczyć granice poszczególnych ciągów, podając twierdzenia, z których skorzystano:
   a. $a_n = \frac{n\sqrt{n}+1}{n^3 - n \ - n + \sqrt{n}} \sin(n!)$,
   b. $b_n = \frac{1+2+3+...+(3n-1)}{1+3.+...+3^n}$,
   c. $c_n = \sqrt{9n^2+2n-1} - 3n$,
   d. $d_n = \left(\frac{n^2+3n}{3n^2+1}\right)^n$.

4. (2 punkty) Uzasadnić na przykładach nieoznaczoność symbolu ∞ - ∞.
5. (2 punkty) Wykazać z definicji granicy, że ciąg $a_n = \frac{(-1)^n}{4}$ nie jest zbieżny.
6. (3 punkty) Rozważmy ciąg: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$, $n \in N$. Wykazać, że ciąg a_n jest ograniczony z góry przez liczbę 2.

Załącznik 6

Zagadnienia losowane przez studentów podczas egzaminu ustnego

1. Nierówność Bernouliego.
2. Aksjomat ciągłości i twierdzenie z nim równoważne.
3. Nieograniczoność zbioru liczb naturalnych.
4. Twierdzenie o istnieniu cechy liczby rzeczywistej.
5. Twierdzenie o funkcji odwrotnej.
6. Związek między funkcjami y = arcsin oraz y = arccosx.
7. Związek między funkcjami y = arctgx oraz y = arcctgx.
8. Twierdzenie o jednoznaczności granicy ciągu.
9. Twierdzenie o związku zbieżności ciągu do granicy skończonej z ograniczonością tego ciągu.
10. Działania w zbiorze ciągów zbieżnych – suma.
11. Działania w zbiorze ciągów zbieżnych – różnica.
12. Działania w zbiorze ciągów zbieżnych – iloczyn.
13. Działania w zbiorze ciągów zbieżnych – iloraz.
14. Zbieżność ograniczoność ciągu.
15. Monotoniczność a zbieżność ciągu liczbowego.
16. Twierdzenie o trzech ciągach i przykład zastosowania tego twierdzenia.
17. Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych.
18. Twierdzenie o podciągach.
19. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.
20. Ciągi Cauchy'ego i ich związek z pojęciem zbieżności ciągu do granicy skończonej.
21. Własności ciągów zbieżnych do nieskończoności.
22. Ciągowa charakteryzacja punktu skupienia zbioru.
23. Definicja granicy funkcji w punkcie i jej własności.
24. Równoważność definicji Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji w punkcie.
25. Dziania na granicach skończonych funkcji w punkcie.
26. Granice niewłaściwe funkcji w punkcie.
27. Twierdzenie o trzech funkcjach i przykład jego zastosowania.
28. Twierdzenie o granicy funkcji złożonej.
29. Liczba e i jej znaczenie w analizie matematycznej.
30. Monotoniczność, ograniczoność i zbieżność.