Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Maciej Major, Barbara Nawolska

Aktywności matematyczne studentów inspirowane grami Penneya

Abstract. This paper proposes a way to adapt theories of countable probabilistic spaces in order to use them to educate mathematical students trained to be teachers. It presents many examples of how to develop students' mathematical activities using stochastic games called Penney games. Introducing chance games delivers the opportunity of creating and examining probabilistic spaces. The fairness of games is a problem that inspires and motivates mathematicians to formulate problems and tasks of a probabilistic and general mathematical character.

Współczesna dydaktyka matematyki kładzie nacisk na rozwijanie aktywności matematycznej w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Aktywność, o której mowa, nie może sprowadzać się wyłącznie do rozwijania technik rachunkowych, wyuczania definicji, twierdzeń i technik ich stosowania oraz do opanowywania i stosowania schematów rozwiązywania typowych zadań. Zdaniem Z. Krygowskiej:

> współczesna dydaktyka eksponuje inny rodzaj aktywności, aktywność twórczą, czynny i świadomy udział uczącego się w odkrywaniu pojęć, wzorów, twierdzeń, dowodów, w schematyzowaniu sytuacji, w ich matematyzowaniu, ogólnie w rozwiązywaniu problemów bardzo zróżnicowanych, obejmujących całość materiału. Chodzi zatem o aktywność typowo matematyczną
>
> (Krygowska, 1982, s. 13)

W literaturze naukowej matematykę przedstawia się bardzo często jako **produkt aktywności matematycznej**. Jest to efekt pracy wielu pokoleń matematyków, obejmujący różne teorie zawierające bogactwo abstrakcyjnych pojęć, twierdzeń, metod i schematów działania, specyficzny język itp. Dydaktyka matematyki przeciwstawia temu **matematykę w stadium tworzenia, matematykę jako aktywność** obejmującą: matematyczną heurystykę, tworzenie pojęć i ich definiowanie, odkrywanie twierdzeń, także na drodze indukcyjnej, sposoby weryfikacji tez, specyfikacje, uogólnianie itp. W zakres tej działalności wlicza się historyczną genezę matematycznych struktur, analizę ich rozwoju i transformacji języka (por. Duda, 1982).

Matematyka jako szczególna aktywność jest rozwiązywaniem problemów, w zakres którego wchodzi: formułowanie matematycznego zadania, poszukiwanie narzędzi jego rozwiązywania wśród już znanych matematycznych pojęć i metod względnie odkrywanie dopiero tych narzędzi, rozwiązywanie problemu, weryfikacja poprawności kolejnych etapów rozwiązywania, poszukiwanie prostszych dróg rozwiązania (np. przez przejście do innego modelu), uogólnianie problemu, odkrywanie analogii, wnioskowania przez analogie itd. (zob. np. Legutko, 1987).

Istotą „matematyki sytuacji" jest prowokowanie uczenia się przez wykorzystywanie różnych typów sytuacji problemowych. W niniejszej pracy prezentujemy pewną problematykę stwarzającą okazję do rozwijania aktywności matematycznych studentów.

Niżej wyróżniamy pewne rodzaje aktywności składających się na ogólną aktywność matematyczną, wymienione w pracach Z. Krygowskiej (1982; 1985; 1986), S. Turnaua (1978), W. Nowak (1989, s. 209), a występujące przy rozwiązywaniu problemów zaproponowanych w tej pracy:

1. Dostrzeganie i formułowanie problemów. Odczytywanie tekstu (opisu sytuacji, zadania, rozwiązania, opisu ogólnego rodzaju sytuacji, zadania lub metody postępowania).
2. Konstruowanie i definiowanie nowych pojęć (także ich odkrywanie jako narzędzi rozwiązywania problemów), weryfikacja poprawności definicji, formułowanie kryteriów tej poprawności.
3. Odkrywanie, formułowanie i dowodzenie twierdzeń (sugerowanych np. przez własności odkryte w konkretnych przykładach).
4. Rozwiązywanie problemów w sytuacjach nietypowych, dobór różnych środków i metod argumentacji.
5. Schematyzacja (przedstawienie rysunkowe, opis werbalny skierowany na matematyzację, opis symboliczny sytuacji realnej lub fikcyjnej). Matematyzacja sytuacji pozamatematycznych.
6. Działania prowadzące do dostrzeżenia i wykorzystania analogii sytuacji lub zadania z poznaną wcześniej sytuacją lub rozwiązanym wcześniej zadaniem, dobór środków uzasadniających te analogie.
7. Ogólny opis dostrzeżonej wcześniej wspólnej struktury kilku sytuacji lub zadań, bądź wspólnej metody postępowania.

W pracy podajemy przykłady rozwijania aktywności matematycznych studentów z wykorzystaniem pewnych gier stochastycznych. W rozdziale 2 przybliżamy problematykę wspomnianych gier, w rozdziale 3 ukazujemy różnorodne aktywności inspirowane grami Penneya, a w rozdziale 4 przedstawiamy wyniki badań dotyczących możliwości wykorzystania tych gier do aktywizowania matematycznego studentów.

W akademickich ujęciach prawdopodobieństwo wraz z przestrzenią probabilistyczną określane jest aksjomatycznie. Ta definicja pozwala natychmiast organizować fazę dedukcji, nie daje jednak narzędzi do rachunków. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia odbywa się już nie na podstawie definicji, ale – w zależności od zadania – za pomocą algorytmów, które nie bardzo wiadomo jak się mają do samej definicji.

Praca bazuje na pewnym dydaktycznym ujęciu teorii przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych, adresowanym do studentów matematyki sekcji nauczycielskich (Płocki, 1997a; 1997b; 2004; Major, Nawolska, 1999). Skończone przestrzenie probabilistyczne (w tym przestrzenie klasyczne) stanowią tylko mały fragment tego ujęcia rachunku prawdopodobieństwa. Proponujemy zatem inną definicję prawdopodobieństwa. W odróżnieniu od definicji aksjomatycznej definicja ta podaje wzór na prawdopodobieństwo każdego zdarzenia w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej. W niektórych przypadkach prawdopodobieństwo zdarzenia jest z definicji sumą szeregu. Sum tych szeregów często nie potrafimy znajdować na gruncie analizy matematycznej. W tej pracy proponujemy pewne narzędzia pozwalające znajdować sumy szeregów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa.

Problematyka zadań dobrana jest tak, aby pojęcie prawdopodobieństwa zdarzenia mogło być prezentowane jako narzędzie rozwiązywania konkretnych problemów i to narzędzie możliwe do odkrywania na zajęciach ze studentami oraz z uczniami na lekcji w szkole. W tym sensie rozwiązywanie wielu zadań, które proponujemy w tej pracy, staje się ilustracją procesu stosowania matematyki.

Silne motywacje do intelektualnego wysiłku inspirowane są przez liczne paradoksy, które ujawniają się w trakcie rozwiązywania zadań.

1. Czekanie na serie orłów i reszek – gry Penneya

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. *Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω nazywamy każdą funkcję p określoną na zbiorze Ω, nieujemną i taką, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(\omega_j) = 1.$$

Parę (Ω, p) nazywamy *ziarnistą* (*dyskretną*) *przestrzenią probabilistyczną.*

Niech (Ω, p) będzie przestrzenią probabilistyczną ziarnistą. Jeżeli Ω jest zbiorem możliwych wyników pewnego doświadczenia losowego, a funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie może zakończyć się tym wynikiem, to tę przestrzeń nazywamy *modelem proba-*

bilistycznym wspomnianego doświadczenia. Taka przestrzeń opisuje wówczas (modeluje) to doświadczenie losowe. Mówimy, że jest ona *zgodna* z tym doświadczeniem losowym.

Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$. *Prawdopodobieństwem* w przestrzeni (Ω, p) nazywamy każdą funkcję $P\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną następująco:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Liczbę $P(A)$ nazywamy *prawdopodobieństwem zdarzenia* A. *Przestrzenią probabilistyczną* nazywamy także trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, gdzie $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$, P zaś jest prawdopodobieństwem na $\mathcal{Z}$ w sensie powyższej definicji.

Rzut monetą (symetryczną) może zakończyć się wypadnięciem reszki lub orła. Wypadnięcie reszki będziemy kodować literą r, zaś wypadnięcie orła literą o. Przy tej umowie $\{o, r\}$ jest zbiorem jednakowo możliwych wyników rzutu monetą.

Wynik k-krotnego rzutu monetą kodujemy k-wyrazową wariacją zbioru $\{o, r\}$. Jej j-ty wyraz jest kodem wyniku j-tego rzutu.

Każdy wynik k-krotnego rzutu monetą nazywamy *serią orłów i reszek*. Liczbę k nazywamy *długością serii*. Ciąg $rorr$ przedstawia serię orłów i reszek o długości 4, ciąg or jest serią orłów i reszek o długości 2. Do serii orłów i reszek zaliczamy także wyniki o i r pojedynczego rzutu monetą jako serie o długości 1.

Niech a będzie serią orłów i reszek o długości k. Jeśli w serii a zamienimy jednocześnie każdą literę o na r i każdą literę r na o, to uzyskamy nową serię b o długości k. Takie serie a i b nazywamy *dualnymi*. Serie $oorrr$ i $rrooo$ są dualne. Dualne są także serie ooo i rrr.

Niech a i b będą ustalonymi seriami orłów i reszek o długości k. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki k ostatnich rzutów utworzą albo serię a, albo serię b, nazywamy *czekaniem na jedną z serii a, b orłów i reszek* i oznaczamy δ_{a-b}.

Ciąg ω, którego wyrazami są elementy zbioru $\{o, r\}$ jest wynikiem czekania δ_{a-b} wtedy i tylko wtedy, gdy: ω jest ciągiem co najmniej k-wyrazowym i takim, że:

1° podciąg k jego ostatnich wyrazów tworzy serię a albo serię b,

2° żaden podciąg k kolejnych wcześniejszych wyrazów nie jest serią a, ani nie jest serią b.

Oznaczmy zbiór tak określonych wyników doświadczenia δ_{a-b} symbolem Ω_{a-b}. Jeśli $\omega \in \Omega_{a-b}$ i ω jest ciągiem n-wyrazowym, to ω jest szczególnym wynikiem

n-krotnego rzutu monetą, a więc jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{2})^n$. Wynika stąd, że modelem[1] czekania δ_{a-b} jest para (Ω_{a-b}, p_{a-b}), gdzie p_{a-b} jest funkcją określoną wzorem:

$$p_{a-b}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla } \omega \in \Omega_{a-b}$$

i gdzie $|\omega|$ oznacza liczbę wyrazów ciągu ω, czyli jego długość.

Z doświadczeniem losowym δ_{a-b} zwiążmy dwa zdarzenia przeciwne:

$$A = \{\textit{czekanie } \delta_{a-b} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } a\},$$
$$B = \{\textit{czekanie } \delta_{a-b} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } b\},$$

które oznaczamy $A = \{\ldots a\}$ i $B = \{\ldots b\}$, a ich prawdopodobieństwa odpowiednio przez $P(\ldots a)$ i $P(\ldots b)$.

Jeśli $P(\ldots a) = P(\ldots b)$, to serie a i b nazywamy *jednakowo dobrymi* i oznaczamy $a \approx b$.

Jeśli $P(\ldots a) > P(\ldots b)$, to serię a nazywamy *lepszą* od serii b i oznaczamy $a \gg b$.

W zbiorze serii orłów i reszek o długości k określone zostały zatem dwie relacje: $\approx$ i $\gg$, które nie są przechodnie (zob. Major, Nawolska, 1999, § 4.7.4, s. 136-150).

Niech a, b i c będą ustalonymi seriami orłów i reszek o długości k. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki k ostatnich rzutów utworzą albo serię a, albo serię b, albo serię c nazywamy *czekaniem na jedną z serii a, b, c orłów i reszek* i oznaczamy δ_{a-b-c}.

Ciąg ω, którego wyrazami są elementy zbioru $\{o, r\}$ jest wynikiem czekania δ_{a-b-c} wtedy i tylko wtedy, gdy: ω jest ciągiem co najmniej k-wyrazowym i takim, że:

1° podciąg k jego ostatnich wyrazów tworzy jedną z serii a albo b, albo c,

2° żaden podciąg k kolejnych wcześniejszych wyrazów nie jest ani serią a, ani serią b, ani serią c.

Zbiór tak określonych wyników doświadczenia δ_{a-b-c} oznaczamy symbolem Ω_{a-b-c}. Jeśli $\omega \in \Omega_{a-b-c}$ i ω jest ciągiem n-wyrazowym, to jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{2})^n$. Modelem czekania δ_{a-b-c} jest para $(\Omega_{a-b-c}, p_{a-b-c})$, gdzie p_{a-b-c} jest funkcją określoną następująco:

$$p_{a-b-c}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla } \omega \in \Omega_{a-b-c}\,.$$

[1] Zob. (Płocki, 2004, rozdział 2).

Z doświadczeniem δ_{a-b-c} zwiążmy układ zupełny trzech zdarzeń:

$$A = \{\textit{czekanie } \delta_{a-b-c} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } a\},$$
$$B = \{\textit{czekanie } \delta_{a-b-c} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } b\},$$
$$C = \{\textit{czekanie } \delta_{a-b-c} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } c\}.$$

Wprowadźmy oznaczenia $A = \{\dots a\}$, $B = \{\dots b\}$ oraz $C = \{\dots c\}$. Niech $P(\dots a)$, $P(\dots b)$ i $P(\dots c)$ oznacza dalej prawdopodobieństwo zdarzeń, odpowiednio A, B i C .

Jeśli w przestrzeni probabilistycznej, będącej modelem doświadczenia δ_{a-b-c} , jest $P(\dots a) = P(\dots b)$, to serie a i b nazywamy *jednakowo dobrymi* i oznaczamy $a \approx b$, jeśli zaś $P(\dots a) > P(\dots b)$, to serię a nazywamy *lepszą* od serii b i oznaczamy $a \gg b$.

W zbiorze serii orłów i reszek $\{a, b, c\}$ określone zostały zatem dwie nowe relacje: $\approx$ i $\gg$ (oznaczamy je tymi samymi symbolami jak w przypadku relacji związanej z czekaniem δ_{a-b}).

Niech a i b będą seriami orłów i reszek o długości k. W grze z udziałem dwu graczy G_a i G_b przeprowadza się doświadczenie δ_{a-b} . Jeśli zakończy się ono uzyskaniem serii a, to zwycięża gracz G_a; jeśli zakończy się uzyskaniem serii b, to zwycięża gracz G_b . Tego typu grę losową zaproponował Walter Penney (1974). Nazywamy ją *grą Penneya* i oznaczamy g_{a-b} .

W grze Penneya g_{a-b} zwycięży gracz G_a wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie zdarzenie $A = \{\dots a\}$. Zwycięstwo gracza G_b jest równoznaczne z zajściem zdarzenie $B = \{\dots b\}$.

Jeśli $P(\dots a) = P(\dots b)$, to gra jest sprawiedliwa, serie a i b dają graczom równe szanse na zwycięstwo. Ten fakt tłumaczy nazwę *serie jednakowo dobre.* Mamy wtedy $P(\dots a) = \frac{1}{2}$ i $P(\dots b) = \frac{1}{2}$.

Jeśli $P(\dots a) > P(\dots b)$, to seria a daje graczowi G_a w grze Penneya większe szanse na zwycięstwo, niż seria b daje jego przeciwnikowi. Ten fakt tłumaczy zwrot *seria a jest lepsza od serii b.* Mamy wówczas $P(\dots a) > \frac{1}{2}$ i $P(\dots b) < \frac{1}{2}$. Gra Penneya nie jest wówczas sprawiedliwa.

Rozstrzyganie sprawiedliwości gry Penneya, sprowadza się do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń A i B w nieskończonej przestrzeni probabilistycznej (Ω_{a-b}, p_{a-b}). W dalszej części pracy pokażemy, jak w przypadku pewnych serii orłów i reszek można te rachunki upraszczać.

W analogiczny sposób określamy grę Penneya g_{a-b-c} z udziałem trzech graczy G_a, G_b, G_c, w której przeprowadza się doświadczenie δ_{a-b-c} .

Czekanie δ_{a-b} albo δ_{a-b-c} jest jednorodnym łańcuchem Markowa (por. Płocki, 1997a, s. 318-339). Wystarczy uwzględniać w analizie i opisie każdego z tych doświadczeń tylko możliwe *stany czekania.* W każdym przypadku wśród stanów znajduje się tzw. *stan początkowy*, który oznaczamy przez s. W przypadku doświadczenia $d_{orr-rrr}$ stany tworzą zbiór $W = \{s, o, or, orr, r, rr, rrr\}$. Stany orr oraz rrr są tzw. *stanami pochłaniającymi*. Czekanie kończy się wraz z osiągnięciem jednego ze stanów orr lub rrr.

Określmy macierz $Q = [p(j \to k)]$ dla $j, k \in W$, gdzie $p(j \to k)$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu j do stanu k po jednym rzucie monetą (a więc w jednym kroku). Para (W, Q) prezentuje graf stochastyczny (por. Płocki, 1997a, s. 281-282).

Elementy zbioru W, tj. stany, przedstawiamy jako punkty płaszczyzny i nazywamy *węzłami*. Węzeł reprezentujący stan j oznaczamy przez $\boxed{j}$, j jest etykietą tego węzła[2]. Stan s nazywamy *początkowym*. Węzeł reprezentujący stan początkowy oznaczamy przez ⓢ i nazywamy *startem*. Jeśli $p(j \to k) > 0$, to parę $j \to k$ nazywamy *krawędzią grafu* i przedstawiamy na płaszczyźnie jako zorientowany odcinek (prostej lub krzywej) o początku w węźle $\boxed{j}$ i końcu w węźle $\boxed{k}$, a liczbę $p(j \to k)$, wpisujemy obok krawędzi $j \to k$. Jeśli $p(j \to j) > 0$, to krawędź $j \to j$ nazywamy *pętlą*. Jeśli $p(j \to j) = 1$, to węzeł $\boxed{j}$ nazywamy *brzegowym*, albo *metą*. Węzeł brzegowy reprezentuje *stan pochłaniający*. Pętle $j \to j$, dla których $p(j \to j) = 1$ pomijamy. Zbiór węzłów brzegowych nazywamy *brzegiem grafu* i oznaczamy przez $\mathcal{B}$. Ciąg krawędzi prowadzących od węzła startowego do pewnego węzła brzegowego $\boxed{w_b}$ nazywamy *trasą*. Symbolem $\{s \rightsquigarrow w_b\}$ oznaczamy zbiór wszystkich tras prowadzących z węzła ⓢ do węzła brzegowego $\boxed{w_b}$.

Macierz Q jest kwadratowa, jej wyrazy są liczbami nieujemnymi i suma wyrazów w każdym jej wierszu jest równa 1. Macierz Q jest więc *macierzą stochastyczną*. Grafy, o których mówimy, są szczególnymi digrafami (tj. grafami zorientowanymi), spójnymi (por. Deo, 1980, s. 548) i takimi, że każdej krawędzi przypisana jest liczba dodatnia i suma liczb przypisanych krawędziom o wspólnym początku jest równa 1.

W przypadku czekania na serie orłów i reszek jest $p(j \to k) = 0$ lub $p(j \to k) = \frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo przypisane krawędzi grafu jest prawdopodobieństwem jednego z wyników rzutu monetą. W niniejszej pracy, obok krawędzi grafu wpisujemy ten wynik zamiast jego prawdopodobieństwa.

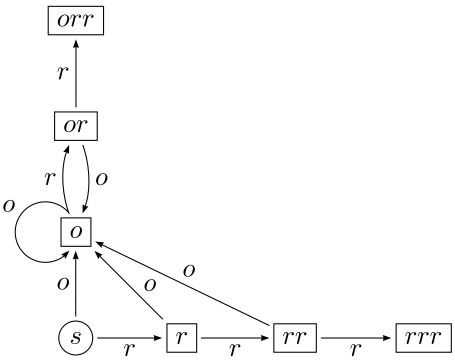
Rysunek 1 prezentuje graf stochastyczny doświadczenia $\delta_{orr-rrr}$. Graf ten można traktować jako planszę dla gry Penneya $g_{orr-rrr}$.

Niech Ω^* oznacza zbiór wszystkich tras na grafie stochastycznym (W, Q). Przypiszmy każdej trasie na grafie stochastycznym iloczyn liczb przyporządkowanych kolejnym jej krawędziom. Ten iloczyn nazywamy *wagą trasy*. Niech p^* będzie funkcją, która każdej trasie na grafie przypisuje jej wagę. Para (Ω^*, p^*) jest przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją *przestrzenią probabilistyczną*

[2]Czasami węzeł będziemy utożsamiać z jego etykietą.

indukowaną przez graf stochastyczny. Regułę, za pomocą której zostaje tu określona funkcja p^* na zbiorze tras, nazywamy *regułą mnożenia dla grafu stochastycznego*.

Zbiór $\{s \rightsquigarrow w_b\}$ jest zdarzeniem w przestrzeni (Ω^*, p^*). Prawdopodobieństwo tego zdarzenia oznaczamy $P^*(s \rightsquigarrow w_b)$.



Rysunek 1

2. Aktywności matematyczne inspirowane czekaniem na serie orłów i reszek

Formułowanie i rozwiązywanie zadań powstałych na tle gier Penneya, jest działalnością matematyczną obejmującą takie aktywności matematyczne, jak:

— przekład na język matematyki pozamatematycznych problemów powstałych na tle gry;
— konstruowanie przestrzeni probabilistycznej jako modelu pewnej sytuacji, chodzi tu o tworzenie przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych, ale także o ich redukcje do przestrzeni skończonych;
— dobór środków matematyzacji (chodzi o organizację fazy matematyzacji);
— stawianie hipotez i ich weryfikacja, w tym weryfikacja intuicyjnych ocen (także środkami statystycznymi);
— dobór środków argumentacji, w tym elementarnych narzędzi rachunków w nieskończonych przestrzeniach probabilistycznych;
— wyjaśnianie na gruncie matematyki błędów i odkrywanych paradoksów;
— formułowanie wniosków, jakie dla praktyki wynikają z wielkości wyliczonych prawdopodobieństw.

Przeanalizujmy aktywności, jakie pojawiają się w trakcie rozwiązywania jednego problemu związanego z grą Penneya $g_{orr-rrr}$. Seria orłów i reszek o długości m jest wynikiem m-krotnego rzutu monetą, a wszystkie wyniki takiego doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne. Z tego powodu, w przypadku gdy gracze czekają na serie tej samej długości, gra wydaje się sprawiedliwa. Można tu mówić o pewnej, sugerowanej przez intuicję, hipotezie H: *gra* $g_{orr-rrr}$ *jest sprawiedliwa*. Poddajmy ją najpierw weryfikacji metodami statystycznymi.

Załóżmy, że gracz G_a zwycięża, ilekroć czekanie zakończy się serią rrr, gracz G_b – gdy czekanie zakończy się serią orr. Rozważmy zdarzenia: $A = \{\ldots rrr\}$ oraz $B = \{\ldots orr\}$. Hipoteza H orzeka, że $P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$.

Powtarzajmy teraz grę dostatecznie wiele razy. Zebrane i opracowane dane statystyczne ukazują zaskakujący fakt: częstości zdarzeń A i B różnią się w sposób istotny (zdarzenie B zachodzi prawie 7 razy częściej niż A), co daje podstawy do kwestionowania hipotezy H. Odwołujemy się tym samym do rzeczywistości, ale tę działalność można także zaliczyć do aktywności o charakterze matematycznym. Dane empiryczne kreują w opisanej sytuacji matematyczne myślenie. Chodzi o wyjaśnienie na gruncie rachunku prawdopodobieństwa tego sprzecznego z intuicją faktu (zob. Penney, 1974). W pracy A. Płockiego (1998) omawiana sytuacja ilustruje organizację *refleksji a posteriori* jako specyficzną dla stochastyki formę matematycznej aktywności.

W trakcie powtarzania rzutu monetą można dostrzec istotny fakt: wypadnięcie orła przesądza o rezultacie gry (dalsze rzucanie monety jest już zbędne, bo gracz G_a został w istocie wyeliminowany z gry). Dane statystyczne inspirują tym samym matematyczne odkrycie.

W trakcie powtarzania rzutu monetą w grze Penneya trzeba stale kontrolować wyniki ostatnich rzutów, aby móc rozstrzygnąć, czy gra już się kończy i czyim zwycięstwem. Tę procedurę można racjonalizować interpretując przebieg czekania na jedną z ustalonych serii orłów i reszek jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym. Graf pełni tu rolę planszy do gry. Motywacją do konstrukcji tego grafu jest racjonalizacja zbierania danych statystycznych jako podstawy do pewnych wnioskowań stochastycznych. Wspomniana racjonalizacja gromadzenia danych jest jedną z form matematycznej aktywności w rachunku prawdopodobieństwa.

Graf stochastyczny z rys. 1 jest planszą do gry $g_{orr-rrr}$. Konstrukcja tego grafu jest specyficznym zadaniem matematycznym kreującym specyficzne formy matematycznej aktywności (chodzi o wyłanianie możliwych stanów, czyli węzłów grafu oraz określanie prawdopodobieństw przejść z jednego stanu do innego). Graf stochastyczny jest więc środkiem matematyzacji, a także argumentacji, pozwala bowiem znaleźć dla każdego z graczy prawdopodobieństwo jego zwycięstwa. Dotarcie do węzła $\boxed{o}$ eliminuje z gry gracza G_a. Z grafu wynika zatem, że $P(\ldots orr)$ jest sumą prawdopodobieństw przejść z węzła s do węzła $\boxed{o}$. Chodzi o przejścia: $s \to o$, $s \to r \to o$ i $s \to r \to rr \to o$. Prawdopodobieństwa tych przejść są odpowiednio równe $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2})^2$ i $(\frac{1}{2})^3$, a zatem $P(\ldots orr) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Powyższa argumentacja opiera się na idei redukcji grafu (z pętlami i cyklami) do grafu skończonego (por. Major, Nawolska, 1999, s. 291-293). Odkrywanie takiej idei redukcji opartej na przejściu do innej, skończonej przestrzeni probabilistycznej, jej weryfikacja na gruncie rachunku prawdopodobieństwa (zob. także tekst niżej), stanowią kolejny przykład szczególnych aktywności matematycznych, nieznanych w innych dziedzinach matematyki.

Mamy zatem $P(\ldots orr) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, co wynika ze wspomnianych redukcji grafu, bądź – co na jedno wychodzi – z faktu, że ilekroć orzeł wypadnie nie później niż w trzecim rzucie, gra $g_{orr-rrr}$ w istocie się kończy (zajście zdarzenia $\{\ldots rrr\}$ nie jest w tej sytuacji możliwe).

Obliczmy $P(\ldots orr)$ w modelu probabilistycznym doświadczenia losowego $d_{orr-rrr}$, klasyfikując wyniki doświadczenia $d_{orr-rrr}$ pod kątem zdarzeń $\{\ldots rrr\}$ i $\{\ldots orr\}$.

Ciąg rrr jest wynikiem czekania $\delta_{orr-rrr}$. Jest to jedyny wynik sprzyjający zdarzeniu $\{\ldots rrr\}$. Sklasyfikujmy pozostałe wyniki pod kątem ich początkowych wyrazów. Niech $\{o\ldots orr\}$ oznacza klasę wyników rozpoczynających się od orła, $\{ro\ldots orr\}$ oznacza klasę wyników rozpoczynających się od $ro\ldots$ (tj. od orła wyrzuconego po raz pierwszy za drugim razem), $\{rro\ldots orr\}$ oznacza klasę wyników rozpoczynających się od $rro\ldots$ (orzeł po raz pierwszy za trzecim razem). Zbiór $\{\{rrr\}, \{o\ldots orr\}, \{ro\ldots orr\}, \{rro\ldots orr\}\}$ jest układem zupełnym zdarzeń. Jeśli rachunki odnieść do przestrzeni (Ω^*, p^*) indukowanej przez graf, to mamy

$$P(\ldots orr) = P^*(s \rightsquigarrow o) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Z drugiej strony, jeśli rachunki prowadzić w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), to prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\ldots orr\}$ jest sumą prawdopodobieństw wszystkich wyników doświadczenia $d_{orr-rrr}$ oprócz rrr. Jest więc $P(A)$ sumą pewnego szeregu, którą można przedstawić jako sumę trzech składników $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$. Ułamek $\frac{1}{2}$ jest tu sumą prawdopodobieństw wyników tworzących klasę $\{o\ldots orr\}$, ułamek $\frac{1}{4}$ jest sumą prawdopodobieństw wyników tworzących klasę $\{ro\ldots orr\}$, ułamek $\frac{1}{8}$ jest sumą prawdopodobieństw wyników tworzących klasę $\{rro\ldots orr\}$.

Graf jest tu jednym z narzędzi rozumowania. Chodzi tu o argumentacje dotyczące konfrontacji dwu różnych metod rozwiązania tego samego problemu.

Wystarczy teraz wykazać, że prawdopodobieństwo dotarcia z węzła $\boxed{o}$ do mety $\boxed{orr}$ na grafie z rys. 1 (s. 144) jest równe 1. Graf stochastyczny jest w omawianej sytuacji wygodnym środkiem argumentacji.

Wielkości wyliczonych prawdopodobieństw tłumaczą, dlaczego w dużej liczbie powtórzeń gry, tak istotnie różnią się częstości zwycięstw poszczególnych graczy.

3. Umiejętności dostrzegania i wykorzystywania symetrii i analogii w rozumowaniach stochastycznych na przykładzie zadań dotyczących gier Penneya

W poprzednim rozdziale omówione zostały różnorodne aktywności matematyczne inspirowane grą $g_{orr-rrr}$. Badania, które prowadziliśmy wśród studentów III i IV roku matematyki, miały pokazać, że odpowiednio dobrana problematyka ćwiczeń (np. wykorzystująca gry Penneya) może wywoływać wspomniane aktywności również wśród studentów, że tak dobrana problematyka jest źródłem ciekawych zadań, które kształtują pewne pojęcia probabilistyczne, rozwijają intuicje prawdopodobieństwa, są środkiem kontroli wiedzy studentów oraz dobrym surowcem do kształcenia nie tylko stochastycznego, ale też ogólnomatematycznego.

3.1. Ocena szans graczy w grze Penneya g_{a-b} przez studentów III roku matematyki na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa

Badania przeprowadzono na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa na III roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie, w trakcie realizacji na wykładzie tematu *Graf stochastyczny jako środek matematyzacji i argumentacji.* Na wcześniejszych zajęciach studenci poznali graf stochastyczny jako prezentację przestrzeni probabilistycznej będącej modelem czekania na reszkę oraz jako planszę do gry, w której dwaj (trzej) gracze rzucają na przemian monetą, a zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę. Na wykładzie bezpośrednio poprzedzającym badania studenci poznali grę Penneya $g_{orr-rrr}$, graf stochastyczny jako planszę do tej gry oraz jako pewne narzędzie obliczania prawdopodobieństwa zwycięstwa każdego z graczy.

Na ćwiczeniach studenci otrzymali do rozwiązania serię czterech zadań, za pomocą których chcieliśmy sprawdzić, czy studenci potrafią zastosować w nowej sytuacji wiedzę poznaną na ostatnim wykładzie.

Zadanie 1
W grze $g_{ooo-roo}$ uczestniczy dwóch graczy G_a i G_b. Gracz G_a czeka na serię ooo, gracz G_b zaś na serię roo. Czy taka gra jest sprawiedliwa?

Zadanie 2
Rozważ analogiczny problem jak w zadaniu 1 w sytuacji, gdy gracz G_a czeka na serię ror, gracz G_b zaś na serię oro.

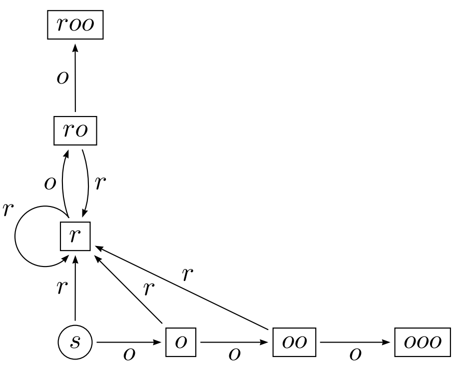
Zadanie 3
Czy sprawiedliwa jest gra opisana w zadaniu 1 w sytuacji, gdy G_a czeka na serię oor, gracz G_b zaś na serię roo?

Zadanie 4
Porównaj ze sobą wszystkie pary serii orłów i reszek długości 3 pod kątem szans, jakie każda z nich daje graczowi w grze Penneya z udziałem dwu graczy.

Zadania rozwiązywane były kolejno (po rozwiązaniu danego zadania studenci otrzymywali do rozwiązania kolejne). W przypadku pierwszych trzech zadań chodziło o sprawdzenie umiejętności organizacji fazy matematyzacji (interpretacja przebiegu procesu stochastycznego jako błądzenia losowego po grafie stochastycznym, konstrukcja tego grafu i przestrzeni probabilistycznej przezeń indukowanej) oraz organizacji fazy rachunków i dedukcji (argumentacje dotyczące prawdopodobieństw zdarzeń). Szczególnym obiektem obserwacji były sposoby rozwiązywania ostatniego zadania. Pierwsze trzy zadania miały dostarczyć studentom środków argumentacji do rozwiązywania tego ostatniego zadania. Chodzi tu o umiejętności organizacji fazy dedukcji, w tym o umiejętności dostrzegania i wykorzystywania symetrii i analogii we wnioskowaniach stochastycznych.

Zadanie 1. dotyczy gry Penneya $g_{ooo-roo}$ (zob. Major, Nawolska, 1999, s. 125).

Na pytanie, czy gra jest sprawiedliwa, studenci zgodnie odparli, że nie jest i że rozstrzygnięto to na wykładzie. Studentka (oznaczana dalej przez S2) odpowiedziała, że na wykładzie rozważano analogiczną grę. Poproszona o uzasadnienie odpowiedzi, studentka zaprezentowała graf z rys. 2. i określiła zdarzenie $A = \{wygra\ gracz\ G_a\} = \{\ldots ooo\}$.



Rysunek 2

Poniżej przedstawiamy fragment protokołu z nagranego na taśmie wideo zapisu ćwiczeń, na których rozwiązywano wspomniane zadanie. W cytowanych fragmentach protokołu zachowana jest oryginalna numeracja wersów. Cały protokół oraz nagranie wideo jest w posiadaniu autorów pracy.

12 S2: $P(\ldots ooo)$ [zapisuje $P(\ldots ooo) =$] obliczymy sumując tutaj… [wskazuje na poziomą część grafu]

13 MM: Co sumując?
14 S2: Mnożąc. Czyli to będzie prawdopodobieństwo, każdej krawędzi jest...
15 MM: przypisane
16 S2: ... przypisane, każdej krawędzi przypisane jest prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$.
17 MM: Krawędź nie ma prawdopodobieństwa, można je tylko jej przypisać.
18 S2: Czyli $P(\dots ooo)$ to będzie jedna ósma [zapisuje $P(\dots ooo) = \frac{1}{8}$].
19 MM: Jedna ósma, zgadzałoby się.

Następnie studentka określiła zdarzenie $B = \{\textit{wygra gracz } G_b\} = \{\dots roo\}$.

22 S2: Czyli tak, może dotrzeć od razu [wskazuje krawędź $s \to r$], czyli $\frac{1}{2}$.
23 MM: Od razu.
24 S2: Teraz będzie dodać [zapisuje $\frac{1}{2}+$].
25 MM: Uhm.
26 S2: Teraz może dotrzeć tutaj [wskazuje przejście $s \to o \to r$], $\frac{1}{2}$ razy $\frac{1}{2}$.
27 MM: Zgoda.
28 S2: Czyli jest dodać jedna czwarta [uzupełnia rozpoczęty zapis], dodać... Może dotrzeć tą drogą [wskazuje przejście $s \to o \to oo \to r$] czyli dodać $\frac{1}{8}$ [kończy zapis uzyskując $P(\dots roo) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$].
29 MM: No i tyle, tak?
30 S2: Uhm.
31 MM: Jak to się jeszcze pododaje, to...
32 S2: Czyli to będzie 4 plus 2 plus 1 czyli $\frac{7}{8}$.

Powyższa argumentacja oparta była na idei zaprezentowanej na wykładzie w przypadku gry $g_{orr-rrr}$. Student S1 zauważył ponadto, że pomiędzy grami $g_{orr-rrr}$ (gra z wykładu) i $g_{roo-ooo}$ (gra z zad. 1) nie ma żadnej różnicy jeśli chodzi o prawdopodobieństwa zwycięstwa poszczególnych graczy, gdyż serie rozważane w jednej z tych gier można uzyskać z serii z drugiej gry przez jednoczesne *zamienienie orłów z reszkami*. Student w rozumowaniu swoim wykorzystał dostrzeżone analogie między omawianymi grami.

Po tej dyskusji studenci otrzymali do rozwiązania zadanie 2. Odpowiedź studenta S1 na pytanie o sprawiedliwość gry brzmiała: *chyba będzie*. Zadanie rozwiązywała na tablicy studentka S4, która poprawnie skonstruowała graf stochastyczny jako planszę dla rozważanej gry. W tym czasie student S1 zauważył pewną prawidłowość. Poniżej przedstawiono fragment protokołu z rozwiązywania tego zadania.

46 S1: Tu jest taka symetria...
47 S3: Ale jaka?
48 MM: Jaka symetria?
49 S1: Symetria na grafie... z możliwością dojścia do obydwu wyników, to się da zrobić...
50 MM: Tak można, ale trzeba to uzasadnić...

Studentka S4 nie słyszy tych uwag i kontynuuje rysowanie grafu i uzyskuje graf z rys. 3. Następnie określa zdarzenia A i B:

$$A = \{wygra\ gracz\ G_a\} = \{\ldots ror\},$$
$$B = \{wygra\ gracz\ G_b\} = \{\ldots oro\}.$$

51 MM: Tutaj nie będzie tak łatwo obliczyć prawdopodobieństwa, bo nie mamy takiego węzła, jak przedtem, że dodarcie do niego już determinuje zwycięstwo jednego z graczy. Tylko mety są takimi węzłami. (...)
Ale tutaj pan [S1] coś sugerował przed chwilą, jak pani rysowała. Coś istotnego.

52 S1: Pewnego rodzaju symetria tu będzie. Znaczy możliwość... Aaa, jak sobie narysujecie prostą przechodzącą przez punkt s pod kątem czterdziestu pięciu stopni...

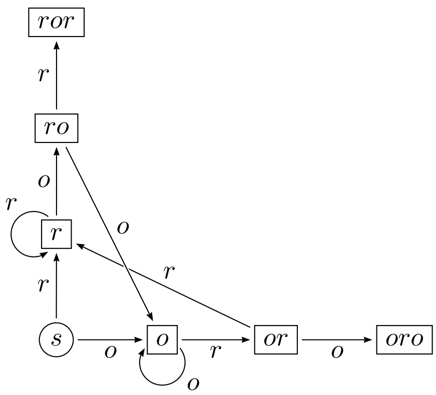
53 S4: [rysuje prostą]

54 MM: No dobrze. To jest oczywiście symetria „w sensie rysunku”. Rysunek jest symetryczny. A co z tego wynika? Da się z tego jakiś wniosek wyciągnąć?

55 S5: Dróg będzie tyle samo.

56 MM: (...) Każdej trasie, która prowadzi do tej mety [pokazuje *ror*], odpowiada jedna trasa tej samej długości prowadząca do tej mety [pokazuje *oro*] i na odwrót. (...) To wynika z tej symetrii. (...)

57 S5: Gra jest sprawiedliwa.



Rysunek 3

W czasie kiedy studentka S4 konstruowała graf, student S1 zauważył, że jest on symetryczny (46-50). Po narysowaniu grafu, studentka S4 zastanawiała się, jak obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $\{\ldots ror\}$ i $\{\ldots oro\}$. Student S1 zasugerował, aby narysować *prostą przechodzącą przez punkt s pod kątem* 45° (52-56). Studentka narysowała tę prostą i stwierdziła, że gra jest sprawiedliwa, bo graf ma „oś symetrii”. Nie chodzi tu o symetrie geometryczne, lecz o fakt, że każdej trasie prowadzącej do mety $\boxed{ror}$ odpowiada dokładnie jedna trasa tej samej długości prowadząca do mety $\boxed{oro}$ i na odwrót.

Następnie studenci otrzymali do rozwiązania zadanie 3.

Studentka S4 odpowiedziała, że *chyba będzie sprawiedliwa*, zaś student S1, że nie, ponieważ „lepsza” jest seria *roo*, gdyż *wyrzucenie w dowolnym momencie reszki, ale nie po dwóch orłach, zaczyna cykl reszka-orzeł-orzeł.*

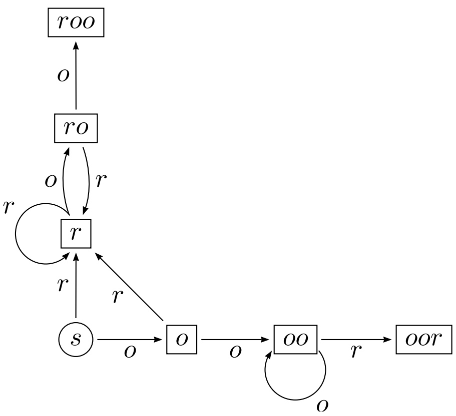
74 S1: Bo wyrzucenie w dowolnym momencie reszki, ale nie po dwóch orłach, zaczyna cykl reszka, orzeł, orzeł.

75 S2: Ale i tak samo jest na odwrót.

76 S1: Tak samo jest na odwrót? To się okaże na grafie.

Z tą tezą nie zgodziła się studentka S2, stwierdzając, *że tak samo jest na odwrót.* Wypowiedź studenta S1, choć nie jest w pełni precyzyjna, ujawnia, że student ów dostrzegł ważny fakt, iż po wyrzuceniu reszki zwycięstwo gracza G_a nie jest już możliwe.

Zadanie 3. rozwiązywała przy tablicy studentka S5. Poprawnie narysowała graf stochastyczny (rys. 4) oraz określiła zdarzenia $\{\dots oor\}$ i $\{\dots roo\}$, a następnie, wykorzystując metodę stosowaną na wykładzie i przy rozwiązywaniu zadania 1, uzyskała poprawne rozwiązanie. Studenci zauważyli, że węzły $\boxed{\text{r}}$ oraz $\boxed{\text{oo}}$ są osobliwe, w tym sensie, że dotarcie do jednego z nich przesądza o zwycięstwie jednego z graczy.



Rysunek 4

81 S3: Jak jesteśmy w węźle $\boxed{r}$...

82 MM: Gdzie jesteśmy?

83 S3: W $\boxed{r}$.

84 MM: W stanie r, czyli tutaj [pokazuje węzeł $\boxed{r}$], to nie mamy szans przejść na tę drugą część grafu. Czyli dotarcie...

85 S5: do r...

86 S3: …już przesądza o zwycięstwie. A tutaj, [wskazuje drugą część grafu] dotarcie do jakiego węzła przesądza o zwycięstwie jednego z graczy?

87 S5: Dopiero przy orzeł, orzeł [chodzi o węzeł $\boxed{oo}$].

88 MM: Dobrze. To spróbujmy policzyć te prawdopodobieństwa, skoro dotarcie do tego węzła [wskazuję węzeł $\boxed{r}$] przesądza sprawę. A jak do tego węzła możemy dotrzeć?

89 S5: $\frac{1}{2}$, tj. [zapisuje $P(\dots roo) = \frac{1}{2}$], albo orzeł, reszka, [chodzi o przejście $s \to o \to r$] to jest $\frac{1}{4}$ [kontynuuje zapis $P(\dots roo) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$].

90 MM: Chyba wszystko. A to jest ile?

91 S5: [dopisuje $= \frac{3}{4}$, następnie oblicza $P(\dots oor)$ jako iloczyn $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$].

Po rozwiązaniu trzech zadań na tablicy wypisano, jeden pod drugim, wszystkie wyniki trzykrotnego rzutu monetą i polecono rozwiązać zadanie 4.

Zaproponowano, aby uzyskiwane informacje o tych seriach zbierać w odpowiedniej tabeli. Zadanie rozwiązywał przy tablicy student S1. Propozycja, by wiersz tabeli odpowiadał serii gracza G_a, kolumna zaś serii gracza G_b, wyszła od studenta S1. W przecięciu się wiersza odpowiadającego serii a i kolumny odpowiadającej serii b zaproponowano wpisywać liczbę $P(\dots a)$ (por. tabela z rys. 5). Na przekątnej tabeli student umieścił znaki $\times$. Na początku student wpisał do tabeli już znalezione prawdopodobieństwa obliczone w trakcie analizy gier $g_{ooo-roo}$, $g_{ror-oro}$, $g_{oor-roo}$ i $g_{rrr-orr}$. Następnie rozważana była para serii $rro - orr$, jako powstała z pary $oor - roo$ przez zamianę orłów na reszki i reszek na orły. W dalszym ciągu rozpatrywane były pary $oro - ror$, $orr - rrr$, $orr - rro$, $roo - oor$, $roo - ooo$. Po chwili zastanowienia rozważono jeszcze pary $rrr - ooo$ i $ooo - rrr$. W przypadku dwu ostatnich par serii student wpisał w tabeli liczbę $\frac{1}{2}$ (argumentując to tym, że grafy są symetryczne). Pod wpływem sugestii studenta S3 rozważono następnie pary serii $oor - ooo$ oraz $ooo - oor$. Student S1 zauważył, że w przypadku tych par serii gra jest sprawiedliwa, *gdyż obydwie serie mają ten sam początek oo, a o zwycięstwie decyduje tylko ostatni rzut monetą*. Student uzasadnił swój sąd następująco: *Jeżeli mamy wyrzucone dwa orły, to decyduje ostatni rzut, czyli czy wypadł orzeł czy reszka, czyli po* $\frac{1}{2}$. *Natomiast, jeżeli nie mamy dwóch orłów, a gdzieś się pojawi reszka wracamy na start. Cały czas czekamy na dwa orły.* Po tym spostrzeżeniu student rozpatrzył pozostałe pary serii o wspólnym początku długości 2 różniące się tylko ostatnim wyrazem), tj. następujące pary serii: $rrr - rro$, $rro - rrr$, $oro - orr$, $orr - oro$, $ror - roo$, $roo - ror$. Jako ostatnie rozpatrzył pary $rro - oor$, $oor - rro$, $roo - orr$, $orr - roo$. Środkiem argumentacji były tu symetrie grafu stochastycznego.

Liczby w nawiasach w tabeli z rys. 5 oznaczają kolejność wypełniania poszczególnych kratek tabeli. Student nie wpisywał tych liczb.

Głównym celem badań było sprawdzenie, jak w zależności od pary serii orłów i reszek studenci dobierają środki argumentacji przy rozstrzyganiu, w jakiej relacji pozostają serie tej pary. Badani studenci nie znali jeszcze algorytmu pochłaniania[3], a więc nie dysponowali efektywnym narzędziem obliczania prawdopodobieństw zdarzeń $\{\ldots a\}$ i $\{\ldots b\}$ jako prawdopodobieństw dotarcia do pewnych węzłów brzegowych grafu stochastycznego. Zadania 1, 2 i 3 pełniły tu pomocniczą rolę w odkrywaniu niektórych środków (redukcje grafu, wnioskowania przez symetrie, dualizm serii itp.).

	ooo	*oor*	*oro*	*roo*	*orr*	*ror*	*rro*	*rrr*
ooo	$\times$	$\frac{1}{2}(14)$		$\frac{1}{8}(1)$				$\frac{1}{2}(12)$
oor	$\frac{1}{2}(13)$	$\times$		$\frac{1}{4}(3)$			$\frac{1}{2}(22)$	
oro			$\times$		$\frac{1}{2}(17)$	$\frac{1}{2}(6)$		
roo	$\frac{7}{8}(10)$	$\frac{3}{4}(9)$		$\times$	$\frac{1}{2}(23)$	$\frac{1}{2}(20)$		
orr			$\frac{1}{2}(18)$	$\frac{1}{2}(24)$	$\times$		$\frac{3}{4}(8)$	$\frac{7}{8}(7)$
ror			$\frac{1}{2}(2)$	$\frac{1}{2}(19)$		$\times$		
rro		$\frac{1}{2}(21)$			$\frac{1}{4}(5)$		$\times$	$\frac{1}{2}(16)$
rrr	$\frac{1}{2}(11)$				$\frac{1}{4}(4)$		$\frac{1}{2}(15)$	$\times$

Rysunek 5

Przegląd wszystkich, ujawnionych na naszych zajęciach środków argumentacji, przedstawiliśmy w monografii (Major, Nawolska, 1999). Rozwiązywanie trzech pierwszych wymienionych wyżej zadań pozwala (dzięki symetriom i analogiom) porównywać ze sobą serie aż w przypadku dwudziestu czterech spośród 56 par serii. Należy tu podkreślić, że studenci na ogół dostrzegali symetrie i analogie, które są podstawą wnioskowań. Fakt, że dwie serie różniące się tylko ostatnim wyrazem, a także każde dwie serie dualne są w grze Penneya seriami jednakowo dobrymi, został na zajęciach odkryty przez studentów, co zasługuje na podkreślenie.

3.2. Ocena szans graczy w grze Penneya $g_{ooo-rrr-roo}$ przez studentów IV roku matematyki na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa

Niżej prezentowana jest analiza przebiegu ćwiczeń przeprowadzonych w innej grupie studentów IV roku matematyki AP w Krakowie pod koniec dru-

[3] Algorytm pochłaniania pozwala na efektywne wyznaczanie prawdopodobieństw dotarcia do węzłów brzegowych grafu. Ten algorytm, jako narzędzia rachunków, ma zastosowanie w sytuacji, gdy przebieg doświadczenia jest interpretowany jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym. Obliczanie prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń sprowadza się do rozwiązywania układu równań liniowych. Algorytm ten przedstawiono w (Engel, 1980) oraz – wraz z dowodem – w (Płocki, 1997a, s. 303).

giego semestru kursu rachunku prawdopodobieństwa. Badani studenci poznali gry Penneya dopiero na czwartym roku podczas realizacji tematu *Łańcuchy Markowa*, a więc później niż studenci stanowiący grupę badaną, której wyniki opisano wcześniej. Na jednym z wykładów porzedzających ćwiczenia studenci zostali zapoznani z grafem stochastycznym, przestrzenią generowaną przez graf oraz z metodami redukcji grafów pozwalającymi przechodzić z przeliczalnych do skończonych przestrzeni probabilistycznych. Studenci posiadali też narzędzia obliczania prawdopodobieństw dotarcia do węzłów brzegowych grafu (algorytm pochłaniania). Nie mieli jednak zbyt wiele okazji do wykorzystania poznanych narzędzi. Opisywane ćwiczenia (rejestrowane kamerą wideo) miały sprawdzić, czy studenci potrafią wykorzystać wiadomości zdobyte na wykładzie do rozwiązywania nowych zadań.

Zadaniem studentów była ocena szans graczy G_a, G_b i G_c w grze Penneya $g_{ooo-rrr-roo}$, w której gracz G_a zwycięża, ilekroć czekanie $\delta_{ooo-rrr-roo}$ zakończy się serią *ooo*, gracz G_b zwycięża, gdy czekanie $\delta_{ooo-rrr-roo}$ zakończy się serią *rrr*, a gracz G_c, gdy czekanie $\delta_{ooo-rrr-roo}$ zakończy się serią *roo*. W pierwszej ocenie szans graczy w grze Penneya $g_{ooo-rrr-roo}$ (jeszcze bez odwoływania się do grafu i bez żadnych obliczeń) studenci odkryli, że wypadnięcie reszki eliminuje z gry gracza G_a.

19 A: Wystarczy, że raz wypadnie reszka, wtedy gracz G_a nie może wygrać [G_a — *ooo*], po prostu jedna reszka go eliminuje. Po reszce nie mogą być trzy orły, bo po dwóch orłach gra się kończy. Natomiast gracz G_b [*rrr*] przy jednej reszce ciągle jeszcze może wygrać.

20 BN: Co zatem pan sugeruje?

21 A: To jest taka sytuacja, jakby tego gracza G_b nie było...

22 S-gr: [kilka głosów] G_a!

23 A: Nie!, G_b gdyby nie było, bo wtedy właśnie... była taka sytuacja, że rysowaliśmy graf dla takiej sytuacji ... [on myśli o grafie dla gry $g_{ooo-roo}$, w której seria *roo* jest siedem razy lepsza niż seria *ooo*].

24 S-2: Przecież G_b może zwyciężyć!

25 A: Dobrze, ale jakby go nie było, dlaczego G_a nie ma szans.

26 S-2: No właśnie, G_a nie ma szans, bo jak r wypadnie, to albo ci wypadną dwa orły, albo... [śmiech grupy]

27 A: Ja bym pominął tego G_b na razie i uzasadniam, dlaczego G_a nie ma szans, bo myśmy coś takiego robili [zapewne znowu myśli o grze $g_{ooo-roo}$] i to było uzasadniane, że wypadnięcie... tam chyba 7 razy większe było prawdopodobieństwo, właśnie tylko jedna droga prowadzi do G_a. Natomiast wypadnięcie reszki eliminuje go [gracza G_a], natomiast G_b [wypadnięcie reszki] nie eliminuje.

28 BN: Jest to pewne uzasadnienie. Wypadnięcie reszki eliminuje gracza G_a, więc szanse gracza G_b są większe. Jak inaczej można to uzasadnić?

29 P: Jak wypadnie reszka, to gracz G_a...

30 A: Dla gracza G_a gra się kończy. Można rozważać tylko dla dwu graczy G_b i G_c.

31 P: Na początku jak mamy pierwszy rzut, to wypadnie orzeł lub reszka. Jak wypadnie reszka, to ten gracz G_a już nie może wygrać. Jak wypadnie orzeł, to gracz G_b jeszcze może wygrać.

32 A: Tak.

33 P: Wylosowanie orła zamyka szanse graczowi G_a ...

34 A: Reszki!

35 P: Reszki, zamyka szanse graczowi G_a , natomiast wylosowanie orła nie zamyka szansy graczowi G_b . Dlatego...

36 A: Reszka eliminuje gracza G_a .

37 BN: Z tego, co państwo mówicie, można wnioskować, że seria *ooo* daje graczowi G_a najmniejsze szanse na zwycięstwo. Spróbujmy zobaczyć, jak rozkłada się prawdopodobieństwo pomiędzy graczy. Jak to zrobić, co możemy do tego wykorzystać?

38 G: Jak wypadnie reszka, to wiemy, że zwycięży G_b albo G_c .

Odkrycie faktu, że wypadnięcie reszki eliminuje z gry gracza G_a , było możliwe dzięki wcześniejszej analizie gry $g_{ooo-roo}$. Student A w swojej argumentacji wykorzystał uzyskane tam rozwiązanie (por. wersy 21-27). Świadczy to o umiejętności dostrzegania pewnych analogii. Po uzyskaniu reszki w grze pozostają tylko gracze G_b i G_c (wers 38). Aby ocenić ich szanse, studenci pominęli osiągnięty już pierwszy wyraz (r) serii *roo* i serii *rrr* (bo pierwsza reszka już jest uzyskana) i analizowali szanse graczy G_b i G_c , jakby odtąd uczestniczyli w grze g_{oo-rr} .

40 G: No! Potem mamy dwie reszki albo dwa orły. Zacznijmy od reszki i rozważajmy dwukrotny rzut... Serie *rr* i *oo* ... One są dualne.

41 A: Chodzi o G_b i G_c?

42 G: Tak, że są równe.

45 A: Jeśli policzymy sobie G_a , to prawdopodobieństwa G_b i G_c będą po połowie.

46 G: Reszty.

47 A: Po połowie reszty.

Jak ukazuje powyższy fragment ćwiczeń, studenci stwierdzili, że po uzyskaniu reszki chodzi o czekanie na jedną z dwu serii: *oo* albo *rr* i rozważali możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą. Serie *oo* i *rr* są dualne, a te – o czym studenci już słyszeli – są jednakowo dobre, wnioskują więc dalej, że różnica $1 - P(\ldots ooo)$ rozdziela się pomiędzy graczy G_b i G_c (jako miara ich sznas) „po połowie” (*prawdopodobieństwa* G_b *i* G_c *będą po połowie reszty*). Wnioskowali tym samym, że w grze $g_{ooo-rrr-roo}$ serie *rrr* i *roo* są jednakowo dobre.

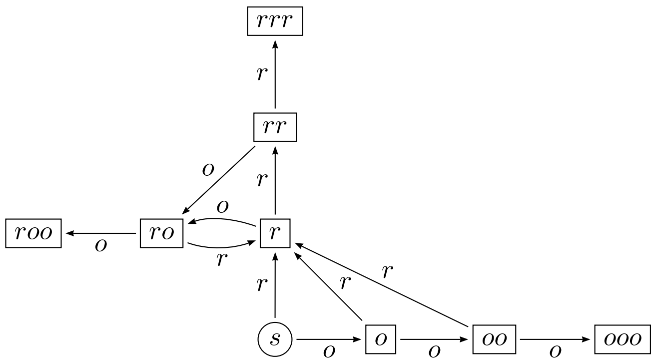
Aby zweryfikować swoje sądy i znaleźć liczbowe wartości ocenianych wcześniej prawdopodobieństw, studenci narysowali graf stochastyczny (zob. rys. 6), z którego odczytali, że $P(\ldots ooo)$ – jako prawdopodobieństwo dotarcia do mety $\boxed{ooo}$ – jest równe $\frac{1}{8}$.

58 S-2: To jest tylko, jeżeli pójdziemy tą trasą [wskazuje na grafie trasę $s \to o \to oo \to ooo$]. Gdybyśmy się wrócili [wskazuje węzeł $\boxed{r}$], to już jesteśmy w stronę G_b lub G_c, czyli tylko $\frac{1}{8}$.

59 BN: Zgadzacie się państwo? Do mety ooo prowadzi tylko jedna trasa i ma ona długość trzy.

60 S-2: [zapisuje na tablicy] $A = \{zwycięży~G_a\} = \{\ldots ooo\}$, $P(A) = \frac{1}{8}$.

Studenci zauważyli też, że prawdopodobieństwo dotarcia do węzła $\boxed{r}$ jest równe $\frac{7}{8}$. Korzystając z grafu, analizowali liczby tras prowadzących do met $\boxed{ooo}$ i $\boxed{rrr}$, ich długości i na tej podstawie wykazali, że w grze $g_{ooo-rrr-roo}$, seria rrr jest lepsza niż seria ooo. Jest to ocena raczej jakościowa, bo w tym momencie nie potrafili jeszcze podać wartości liczbowych prawdopodobieństwa dotarcia do mety $\boxed{rrr}$. Do oceny ilościowej prawdopodobieństwa wykorzystali inną metodę.



Rysunek 6

95 G: Jak policzymy prawdopodobieństwo z $\boxed{r}$ do $\boxed{rrr}$, to już będziemy mieli wszystko! Oznaczmy sobie przez x [prawdopodobieństwo] dotarcie z $\boxed{r}$ do mety $\boxed{rrr}$. Możemy iść [wskazuje najkrótszą trasę i zapisuje:] $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, możemy iść tędy [pokazuje cykl $r \to rr \to ro \to r$], wtedy będzie [dopisuje] $+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$ możemy iść tędy [chodzi o cykl $r \to ro \to r$], to będzie [i dopisuje] $+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$. [na tablicy widnieje zapis $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$]

Jak ukazuje powyższy fragment ćwiczeń student G przez x oznaczył prawdopodobieństwo dotarcia z węzła $\boxed{r}$ do mety $\boxed{rrr}$ i ułożył równanie: $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot x$, (wers 95), z którego wynika, że $x = \frac{2}{5}$.

Powyższe rozwiązanie jest poprawne, niemniej jeden ze studentów poddał jednak w wątpliwość jego poprawność. Do tej pory studenci tylko raz stosowali podobną metodę obliczania prawdopodobieństwa za pomocą równania liniowego[4]. Aby zweryfikować kwestionowaną poprawność, studenci rozwiązali zadanie

[4] Było tak w kontekście gry, w której dwaj gracze rzucają na przemian monetą i zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę (zob. Płocki, 1997a, s. 247-248).

jeszcze raz, tym razem z wykorzystaniem algorytmu pochłaniania. Zmodyfikowali jednak jego zastosowanie, przyjmując węzeł $\boxed{r}$ jako węzeł początkowy.

111 A: Przyjmijmy za węzeł startowy $\boxed{r}$ i z algorytmu pochłaniania liczmy te dwa prawdopodobieństwa, a potem przemnóżmy przez prawdopodobieństwo dojścia do węzła $\boxed{r}$.

112 G: A może tak zrobić [chce od początku].

113 A: Możesz zrobić, ale będzie dużo więcej równań.

114 G: [zastanawia się].

115 A: Przy $\boxed{r}$ musi być $\frac{7}{8}$. Gdyby przyjąć, że gra się kończy przy $\boxed{r}$, to jest wtedy $\frac{7}{8}$ i stąd policzyć do każdej mety i przemnożyć przez $\frac{7}{8}$. [Grzegorz korzystając z algorytmu i „startując z węzła $\boxed{r}$" oblicza, że $P^*(r \rightsquigarrow rrr) = p_{r-rrr} = \frac{2}{5}$.]

116 G: Zastanawialiśmy się, czy te szanse są równe [pokazuje mety rrr i roo]. No, nie są równe. Tu jest $\frac{2}{5}$, to tam jest $\frac{3}{5}$.

117 BN: Czy z tych rachunków potrafimy już powiedzieć, jakie są prawdopodobieństwa zwycięstwa poszczególnych graczy? [studenci dokonują obliczeń: $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{40}$ i $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$ i wpisują otrzymane wyniki przy odpowiednich metach]

Pomysł racjanalizacji rozwiązania pochodzi od studentów (por. wers 111). Ten zabieg w znacznym stopniu skraca i upraszcza rachunki. Uzyskany wynik był zgodny z poprzednim rozwiązaniem, nie było więc podstaw do kwestionowania poprawności wspomnianej metody. Ostatecznie pojawił się wniosek, że serie roo i rrr nie są jednakowo dobre (wers 116), jest $roo \gg rrr$.

Odnosząc opisane argumentacje do przestrzeni probabilistycznej indukowanej przez graf stochastyczny czekania $\delta_{ooo-rrr-roo}$ mamy: $P^*(s \rightsquigarrow ooo) = \frac{1}{8}$, $P^*(s \rightsquigarrow r) = \frac{7}{8}$ oraz $P^*(r \rightsquigarrow rrr) = \frac{2}{5}$, a zatem $P^*(s \rightsquigarrow rrr) = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{40}$ oraz $P^*(s \rightsquigarrow roo) = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$.

Rozpatrując argumentacje i błędy studentów w omawianej sytuacji z punktu widzenia strategii heurystycznych Kahnemana–Tversky'ego[5] można uznać, że została tu zastosowana strategia C, której istotą jest wiązanie informacji występujących bezpośrednio po sobie i wykorzystywanie ich we wnioskowaniach, chociaż nie mają one żadnego związku z rozwiązywanym problemem, lub też

[5] Człowiek nie posiadający wystarczającej wiedzy probabilistycznej lub kombinatorycznej wykorzystuje pewne strategie heurystyczne przy ocenach prawdopodobieństwa w sytuacjach losowych, a więc związanych z niepewnością i ryzykiem oraz podejmowaniem w tych okolicznościach decyzji. Niektóre z tych strategii wyodrębnili i opisali Kahneman i Tversky (1971), (porównaj też Shaughenessy, 1977; Walter, 1983; Płocki, 1997b). Strategie te pozwalają wyjaśniać (i to raczej na gruncie psychologii) pewne decyzje i postępowania ludzi, którzy redukują złożony problem stochastyczny do prostszego. Kahneman i Tversky wyodrębnili trzy zasadnicze strategie heurystyczne:

— A *Availiability* (strategia dostępności, możliwości wskazania przykładu),

— B *Representativeness* (strategia reprezentatywności),

— C *Anchoring* (reguła powiązania, zakotwiczenia).

związek ten jest pozorny[6]. Studenci wiedzieli, że dualne serie oo i rr są jednakowo dobre w grze g_{oo-rr} i wykorzystali tę informację, która w opisanej sytuacji nie ma zastosowania. Doprowadziło to do błędnych wniosków.

Swój błąd studenci odkryli dopiero po stosownych obliczeniach. Można jednak było ten błąd zauważyć znacznie wcześniej, bo już po narysowaniu grafu jako planszy do gry $g_{ooo-rrr-roo}$, ponieważ podgraf tego grafu zaczynający się w węźle $\boxed{r}$ nie jest grafem dla gry g_{oo-rr} (jak to się studentom wydawało). Wynika to z faktu, że z węzła $\boxed{ro}$, po wyrzuceniu reszki, czekanie przechodzi w stan $\boxed{r}$, a nie w stan $\boxed{rr}$. Krawędź $ro{\rightarrow}r$ burzy symetrie sugerowane przez intuicję. W grze $g_{ooo-rrr-roo}$ nie ma takiej symetrii, jaka jest w grze g_{oo-rr}. W swych wnioskowaniach studenci wykorzystywali analogie (skoro wypadnięcie reszki w grze $g_{ooo-roo}$ uniemożliwia uzyskanie serii ooo, to w grze $g_{ooo-rrr-roo}$ jest analogicznie). Badani stawiali hipotezy (w grze $g_{ooo-rrr-roo}$ serie ooo i rrr nie są jednakowo dobre, zaś serie rrr i roo są w tej grze jednakowo dobre), które następnie poddawali weryfikacji. Dokonywali ocen szans graczy w grze w sposób jakościowy, a następnie ilościowy. Przy wyznaczaniu wartości liczbowych prawdopodobieństw zdarzeń korzystali z definicji prawdopodobieństwa ($P^*(s \rightsquigarrow ooo) = \frac{1}{8}$) oraz (przy obliczaniu $P^*(r \rightsquigarrow rrr) = \frac{2}{5}$) z mało znanej metody równań liniowych (zob. Płocki, 2004, s. 138-139) a następnie z algorytmu pochłaniania. Studenci zastosowali algorytm, aby zweryfikować wcześniej zastosowaną metodę równań liniowych. Nie zastosowali algorytmu automatycznie, tylko samodzielnie dokonali jego modyfikacji, aby uprościć rachunki, co jest kolejnym przykładem ich aktywności matematycznej. Zauważmy, że rozwiązywanie zadań wieloma sposobami jest kolejną aktywnością matematyczną.

Opisane zajęcia ujawniają szereg aktywności matematycznych specyficznych dla stochastyki oraz rolę błędnych wnioskowań w matematycznej aktywizacji studentów, w tym także w matematycznym odkryciu (chodzi o specyficzne argumentacje w nieskończonych przestrzeniach probabilistycznych).

4. Zakończenie

Praca jest propozycją adaptacji teorii przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych dla potrzeb kształcenia studentów matematyki sekcji nauczycielskiej. Wprowadzenie gry losowej (gra Penneya) dostarcza procesowi tworzenia i badania wspomnianych przestrzeni probabilistycznych pewnych motywacji. Problem sprawiedliwości gry inspiruje i motywuje formułowanie problemów i zadań o charakterze zarówno probabilistycznym, jak i ogólnomatematycznym.

[6] Istotą strategii C, jest wiązanie informacji występujących kolejno po sobie i wykorzystywanie ich we wnioskowaniach, chociaż nie mają one żadnego wpływu na rozwiązanie problemu.

W pracy:

— Zaproponowano szczególny „surowiec” do tworzenia matematycznych zadań.
— Ukazano wykorzystanie elementarnych środków badania nieskończonych przestrzeni probabilistycznych, takich jak graf, symetrie i analogie, dzięki którym możliwe były nowe metody obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej oparte na interpretacji przebiegu łańcucha Markowa jako błądzenia losowego po grafie stochastycznym (redukcje grafu, wyróżnianie węzłów osobliwych, symetrie grafu, algorytm pochłaniania i jego modyfikacje).
— Przedstawiono szereg sytuacji problemowych jako źródła problemów i zadań, których formułowanie i rozwiązywanie przedstawiono zarazem jako szeroko rozumianą działalność matematyczną. Proponowane w pracy (a także prezentowane w monografii Major, Nawolska, 1999) zadania i problemy związane z grami Penneya, zostały tak sformułowane, aby ich rozwiązywanie nie tylko sprawdzało rozumienie pojęć stochastycznych, ale także wyzwalało aktywności matematyczne, rozwijało intuicje stochastyczne i ujawniało błędy sugerowane przez intuicje oraz by ujawnione w ten sposób błędy motywowały do matematycznej aktywizacji.
— Wyróżniono kilka typów argumentacji specyficznych dla rachunku prawdopodobieństwa, ukazujących, jak rozmaite formy matematycznej aktywności może kreować problematyka stochastyczna i jak ważny udział może mieć ona w kształceniu stochastycznym i ogólnomatematycznym studenta matematyki sekcji nauczycielskiej.

Omówione wyżej zajęcia stanowią ilustrację szczególnego w formie oraz treści sposobu kształtwania takich pojęć rachunku prawdopodobieństwa, jak: przestrzeń probabilistyczna, zdarzenie i jego prawdopodobieństwo. Te elementarne pojęcia stochastyczne pojawiają się w kontekście nieskończonych przestrzeni probabilistycznych, dzięki czemu możliwe jest analizowanie osobliwych aspektów tych pojęć (prawdopodobieństwo zdarzenia jako sumy pewnych szeregów, ujawnianie własności pojęć wynikających z faktu, że je rozpatrujemy w przestrzeniach przeliczalnych, własności uwarunkowane własnościami szeregów itd.). Dzięki zaproponowaniu elementarnych narzędzi organizacji fazy matematyzacji oraz fazy dedukcji i rachunków (pozwalających np. pomijać w rachunkach szeregi) badanie nieskończonych przestrzeni probabilistycznych stało się możliwe na gruncie matematyki elementarnej (tj. szkolnej matematyki, a tym samym propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa na sekcji nauczycielskiej).

Literatura

Deo, N.: 1980, *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce*, PWN, Warszawa.

Duda, R.: 1982, Zasada paralelizmu w dydaktyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 127-138.

Engel, A.: 1980, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik,* Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Kahneman, D., Tversky, A.: 1971, Subjective probability: A judgment of representativeness, *Cognitive Psychology* **3**, 430-454.

Krygowska, Z.: 1982, Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 7-60.

Krygowska, Z.: 1985, Kształcenie aktywności matematycznej uczniów i rola problemów w tym kształceniu, w: G. Treliński, H. Siwek (red.), *Modernizacja kształcenia matematycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki matematyki. Wybór artykułów Anny Zofii Krygowskiej z lat 1958-1972*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 71-99.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Legutko, M.: 1987, Przykłady behawioralno-poznawcze postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 512-102.

Major, M., Nawolska, B.: 1999, *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Penney, W.: 1974, Problem 95: Penney–ante, *Jurnal of Recreational Mathematics* **7**, 321.

Płocki, A.: 1997a, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Płocki, A.: 1997b, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Płocki, A.: 1998, Refleksja a posteriori – mało znana w nauczaniu stochastyki forma aktywności matematycznej, *Wyż. Szkoła Ped. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki* **2**, 146-178.

Płocki, A.: 2004, *Prawdopodobieństwo wokół nas – rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice.

Shaughenessy, J.: 1977, Misconception of probability, *Educational Studies in Mathematics* **3**, 295-316.

Turnau, S.: 1978, *Rola podręcznika szkolnego w kształtowaniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy panadpoczątkowej*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Walter, H.: 1983, Heurystische strategien und fehlvorstellungen in stochastischen situationen, *Der Mathematikunterricht* **1**, 11-23.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: mmajor@ap.krakow.pl

Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Akademia Pedagogiczna
ul. Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
e-mail: bnawol@ap.krakow.pl