FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Antoni Chronowski

Ułamki algebraiczne i funkcje wymierne

Abstract. The subject-matter of this article can be divided into three main parts. The first one includes the theoretical problems concerning the fields of algebraic fractions and rational functions. In the second part we deal with didactic questions of algebraic fractions and rational functions in some chosen school textbooks. In the third part deep ideas and formal models of algebraic fractions and rational functions are discussed.

Wstęp

Tematykę zawartą w tej pracy można podzielić na trzy części. Część pierwsza zawiera zagadnienia teoretyczne dotyczące ciała ułamków algebraicznych (wyrażeń wymiernych) i ciała funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej. Wymienione zagadnienia zostały opracowane na podstawie książek: (Białynicki-Birula, 1976), (Gleichgewicht, 1983), (Kostrykin, 1984), (Ляпин, Евсеев, 1978), (Opial, 1969).

W tych książkach Czytelnik może znaleźć brakujące w tej pracy dowody twierdzeń, a także zapoznać się z obszerniejszymi materiałami dotyczącymi tej tematyki. W części drugiej przedstawiona jest krytyczna analiza dydaktycznych i teoretycznych opracowań tematyki ułamków algebraicznych i funkcji wymiernych na przykładzie wybranych podręczników szkolnych. Część trzecia dotyczy idei głębokich i modeli formalnych (Semadeni, 2002), (Semadeni, 2005) ułamków algebraicznych i funkcji wymiernych.

Istotą tej pracy jest analiza wzajemnych związków między znanymi w matematyce wyższej faktami dotyczącymi ułamków algebraicznych i funkcji wymiernych, a opracowaniami dydaktycznymi tych zagadnień w matematyce szkolnej. W wyniku tej analizy otrzymujemy wnioski, głęboko umotywowane teoretycznie i dydaktycznie, dotyczące dydaktycznego ujęcia tej tematyki.

Artykuł ten jest skierowany przede wszystkim do studentów matematyki studiów nauczycielskich i do nauczycieli matematyki. Rozważane w tej pracy zagadnienia mogą być wykorzystane do pracy ze studentami na seminariach i wykładach monograficznych.

1. Wiadomości wstępne

W tym punkcie zamieszczone są definicje i twierdzenia, które będą wykorzystywane w dalszych częściach tej pracy.

Definicja 1.1
Niezerowy pierścień $(P, +, \cdot)$ przemienny z jednością i bez dzielników zera nazywamy *pierścieniem całkowitym.*

Niech P będzie pierścieniem całkowitym. Symbolem $P[x]$ oznaczamy zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach z pierścienia P. Ponadto $\theta(x)$ oznacza wielomian zerowy jednej zmiennej x. Wielomian $w(x) \in P[x]$ nazywamy *unormowanym*, jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $w(x)$ jest równy 1.

Twierdzenie 1.2
Jeżeli P jest pierścieniem całkowitym, to $(P[x], +, \cdot)$ z dodawaniem $+$ i mnożeniem $\cdot$ wielomianów jest pierścieniem całkowitym.

W zbiorze $P[x]$ określamy *relację podzielności* $|$

$$w(x)|u(x) \iff \exists\, v(x) \in P[x](u(x) = w(x)v(x))$$

dla $w(x), u(x) \in P[x]$ oraz *relację stowarzyszenia* $\sim$

$$w(x) \sim u(x) \iff (w(x)|u(x) \wedge u(x)|w(x))$$

dla $w(x), u(x) \in P[x]$. Relacja stowarzyszenia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $P[x]$.

Lemat 1.3
Niech K będzie ciałem. Dla dowolnych wielomianów $w(x)$ i $u(x)$ z pierścienia $K[x]$ spełniony jest warunek:

$$w(x) \sim u(x) \iff \exists\, a \in K \setminus \{0\}[w(x) = au(x)],$$

gdzie $\sim$ oznacza relację stowarzyszenia w zbiorze $K[x]$.

Twierdzenie 1.4
Niech $w(x)$, $u(x)$ i $v(x)$ będą wielomianami nad ciałem K. Jeżeli $w(x)|u(x)v(x)$ i wielomiany $w(x)$ i $u(x)$ są względnie pierwsze, to $w(x)|v(x)$.

Twierdzenie 1.5
Niech $w(x)$ i $u(x)$ będą wielomianami nad ciałem K, przy czym $w(x) \neq \theta(x)$ lub $u(x) \neq \theta(x)$. Jeżeli wielomian $d(x) \in K[x]$ jest największym wspólnym

dzielnikiem wielomianów $w(x)$ *i* $u(x)$*, to istnieją wielomiany względnie pierwsze* $w_1(x) \in K[x]$ *i* $u_1(x) \in K[x]$ *takie, że*

$$w(x) = w_1(x)d(x) \quad i \quad u(x) = u_1(x)d(x).$$

TWIERDZENIE 1.6
Niech $w(x) \in P[x]$ *będzie wielomianem stopnia* $n \geqslant 0$ *nad pierścieniem całkowitym* P*. Wielomian* $w(x)$ *ma co najwyżej* n *pierwiastków, licząc każdy pierwiastek tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

TWIERDZENIE 1.7
Niech $w(x)$ *i* $u(x)$ *będą wielomianami nad pierścieniem całkowitym* P*. Jeżeli istnieją elementy* $a_1, ..., a_m \in P$ *takie, że:*
(a) $w(a_i) = u(a_i)$ *dla* $i = 1, ..., m$,
(b) $m > \max\{\mathrm{st}(w(x)), \mathrm{st}(u(x))\}$,
(c) $a_i \neq a_j$ *dla* $i \neq j$*, gdzie* $i, j = 1, ..., m$,
to wielomiany $w(x)$ *i* $u(x)$ *są równe.*

2. Ciało ułamków pierścienia całkowitego

Konstrukcja ciała ułamków pierścienia całkowitego będzie stosowana w dalszych częściach tej pracy, dlatego w tym punkcie przypomnimy podstawowe etapy tej konstrukcji i ustalimy przyjęte w niej oznaczenia.

Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem całkowitym. Przyjmujemy oznaczenie $P_0 = P \setminus \{0\}$. W zbiorze $P \times P_0$ określamy relację S następująco:

$$(a, b)S(c, d) \Longleftrightarrow ad = bc \tag{1}$$

dla $(a, b), (c, d) \in P \times P_0$.

TWIERDZENIE 2.1
Relacja S *określona wzorem* (1) *jest relacją równoważności w zbiorze* $P \times P_0$*.*

Przyjmujemy oznaczenie: $U(P) = (P \times P_0)/S$, czyli $U(P)$ jest zbiorem wszystkich klas abstrakcji wyznaczonych przez relację równoważności S w zbiorze $P \times P_0$.

DEFINICJA 2.2
Dodawanie $+$ i *mnożenie* $\cdot$ w zbiorze $U(P)$ określamy następującymi wzorami:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)],$$
$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

dla dowolnych $[(a, b)], [(c, d)] \in U(P)$.

TWIERDZENIE 2.3
Struktura algebraiczna $(U(P), +, \cdot)$ *jest ciałem.*

Każdą klasę abstrakcji $[(a, b)]$, będącą elementem ciała $U(P)$, możemy zapisać w postaci

$$\frac{a}{b}$$

i będziemy nazwać *ułamkiem*. Zauważmy, że wówczas wzory na dodawanie i mnożenie w zbiorze $U(P)$ określone w definicji 2.2 mają postać:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2}$$

dla $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in U(P)$.

DEFINICJA 2.4
Ciało $(U(P), +, \cdot)$ nazywa się *ciałem ułamków* pierścienia całkowitego $(P, +, \cdot)$.

Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow U(P)$ określone wzorem:

$$\varphi(a) = \frac{a}{1}$$

dla $a \in P$ jest monomorfizmem (zanurzeniem) pierścienia całkowitego P w ciało $U(P)$ ułamków tego pierścienia. Utożsamiając ułamek postaci $\frac{a}{1}$ z elementem a, pierścień P możemy traktować jako podpierścień ciała $U(P)$.

3. Ciało ułamków algebraicznych

DEFINICJA 3.1
Niech P będzie pierścieniem całkowitym. *Pierścień całkowity* $P[x_1, ..., x_n]$ *wielomianów* n *zmiennych nad pierścieniem* P definiujemy następująco:
1) $P[x_1]$ jest pierścieniem całkowitym wielomianów jednej zmiennej x_1 nad pierścieniem P;
2) $P[x_1, ..., x_{n-1}, x_n]$, gdzie $n > 1$, jest pierścieniem całkowitym wielomianów jednej zmiennej x_n nad pierścieniem całkowitym $P[x_1, ..., x_{n-1}]$, czyli $P[x_1, ..., x_{n-1}, x_n] = (P[x_1, ..., x_{n-1}])[x_n]$.

Niech P będzie pierścieniem całkowitym. Z definicji 3.1 wynika, że pierścień $P[x_1, ..., x_n]$ z dodawaniem i mnożeniem wielomianów n zmiennych jest pierścieniem całkowitym. Symbolem $\theta(x_1, ..., x_n)$ będziemy oznaczać wielomian zerowy n zmiennych $x_1, ..., x_n$.

DEFINICJA 3.2
Ciało ułamków pierścienia całkowitego $P[x_1, ..., x_n]$ wielomianów n zmiennych nazywamy *ciałem ułamków algebraicznych* n *zmiennych nad pierścieniem całkowitym* P i oznaczamy symbolem $UP(x_1, ..., x_n)$. Elementy ciała $UP(x_1, ..., x_n)$ *nazywamy ułamkami algebraicznymi* n *zmiennych.*

Ułamki algebraiczne nazywamy również *wyrażeniami wymiernymi.*

Jeżeli $w(x_1, ..., x_n) \in P[x_1, ..., x_n]$, $u(x_1, ..., x_n) \in P[x_1, ..., x_n]$ i $u(x_1, ..., x_n) \neq \theta(x_1, ..., x_n)$, to klasę abstrakcji $[w(x_1, ..., x_n), u(x_1, ..., x_n)] \in UP(x_1, ..., x_n)$ zapisujemy w postaci ułamka

$$\frac{w(x_1, ..., x_n)}{u(x_1, ..., x_n)}. \tag{3}$$

Ułamek (3) będziemy również zapisywać prościej w postaci $\frac{w}{u}$.

Niech

$$\frac{w_1}{u_1} \in UP(x_1, ..., x_n) \quad \text{i} \quad \frac{w_2}{u_2} \in UP(x_1, ..., x_n).$$

Wtedy wzory na dodawanie i mnożenie (por. wzory (2)) oraz na odejmowanie i dzielenie ułamków algebraicznych można zapisać:

$$\frac{w_1}{u_1} + \frac{w_2}{u_2} = \frac{w_1 u_2 + u_1 w_2}{u_1 u_2}, \quad \frac{w_1}{u_1} - \frac{w_2}{u_2} = \frac{w_1 u_2 - u_1 w_2}{u_1 u_2}, \quad \frac{w_1}{u_1} \cdot \frac{w_2}{u_2} = \frac{w_1 w_2}{u_1 u_2},$$

$$\frac{w_1}{u_1} : \frac{w_2}{u_2} = \frac{w_1 u_2}{u_1 w_2} \quad (w_2 \neq \theta).$$

Pierścienie P i $P[x_1, ..., x_n]$ są podpierścieniami ciała ułamków algebraicznych $UP(x_1, ..., x_n)$.

4. Tradycyjna definicja funkcji wymiernych

W tym punkcie podamy tradycyjną definicję funkcji wymiernych, a w następnym – zmodyfikowaną definicję tych funkcji.

Dane jest ciało K. Niech

$$\frac{w(x_1, ..., x_n)}{u(x_1, ..., x_n)} \in UK(x_1, ..., x_n).$$

Rozważmy zbiór

$$D_0 = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n : \ u(a_1, ..., a_n) = 0\}.$$

Przyjmujemy, że $D = K^n \setminus D_0$. Określamy funkcję $f : D \longrightarrow K$ następująco:

$$f(a_1, ..., a_n) = \frac{w(a_1, ..., a_n)}{u(a_1, ..., a_n)} \tag{4}$$

dla dowolnego ciągu $(a_1, ..., a_n) \in D$.

Definicja 4.1
Funkcję f określoną wzorem (4) nazywamy *funkcją wymierną n zmiennych* nad ciałem K.

Równym ułamkom algebraicznym z ciała $UK(x_1,...,x_n)$ mogą odpowiadać różne funkcje wymierne n zmiennych nad ciałem K.

Przykład.

Rozważmy ułamki algebraiczne jednej zmiennej x nad ciałem $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych:

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{x^2}{x(x+1)}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x(x+1)}.$$

Funkcje wymierne

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{x^2}{x(x+1)}$$

są różne, gdyż mają różne dziedziny.

Powyższa definicja funkcji wymiernych jest powszechnie stosowana w tych dziedzinach matematyki (np. w analizie matematycznej), w których badamy własności poszczególnych funkcji wymiernych (np. ciągłość, różniczkowalność, całkowalność), ale nie rozważamy struktur algebraiczno-porządkowych zbioru funkcji wymiernych.

5. Ciało funkcji wymiernych

W tym punkcie symbol K oznacza ciało nieskończone. Jeżeli $a \in K$, to przyjmujemy, że: $a^0 = 1$ i $(x-a)^0 = 1$ dla $x - a \in K[x]$. Symbolem $\mathcal{N}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb naturalnych z zerem.

Tradycyjną definicję funkcji wymiernych (jednej zmiennej) zmienimy w taki sposób, aby zbiór wszystkich funkcji wymiernych (jednej zmiennej) nad ciałem K wraz z dodawaniem i mnożeniem tych funkcji tworzył ciało. Istota tej zmiany będzie polegać na tym, że dziedzinę funkcji wymiernej będziemy ustalać po uproszczeniu ułamka algebraicznego określającego tę funkcję przez czynniki postaci $(x-a)^l$, gdzie $a \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $u(x)$ występującego w mianowniku tego ułamka.

Niech $w(x), u(x) \in K[x]$ będą wielomianami nad ciałem K, przy czym $u(x) \neq \theta(x)$. Niech $D \subseteq K$ będzie zbiorem określonym następująco:

$$\begin{aligned} D = \{a \in K\colon \ \exists\, k \in \mathcal{N}\ \exists\, w_0(x), u_0(x) \in K[x](w(x) = (x-a)^k w_0(x) \\ \wedge\ u(x) = (x-a)^k u_0(x)\ \wedge\ u_0(a) \neq 0)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Zauważmy, że jeżeli element $a \in K$ nie jest pierwiastkiem wielomianu $u(x)$, to $a \in D$, gdyż wystarczy przyjąć: $k = 0$, $w_0(x) = w(x)$, $u_0(x) = u(x)$. Jeżeli $w(x) = \theta(x)$, to $\theta(x) = (x-a)^k\theta(x)$, czyli $a \in D$ dla dowolnego $a \in K$. Jeżeli $w(x) = u(x)$, to oczywiście $a \in D$ dla dowolnego $a \in K$.

Przedstawienie wielomianów $w(x)$ i $u(x)$ w postaci

$$w(x) = (x-a)^k w_0(x), \quad u(x) = (x-a)^k u_0(x) \quad i \quad u_0(a) \neq 0$$

jest jednoznaczne. Istotnie, dla $k = 0$ jednoznaczność jest oczywista. Jeżeli $k \in \mathcal{N}$ i $k \geqslant 1$, to warunki $u(x) = (x-a)^k u_0(x)$ i $u_0(a) \neq 0$ oznaczają, że a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $u(x)$, a krotność pierwiastka wielomianu jest wyznaczona jednoznacznie. Jeżeli $u(x) = (x-a)^k u_0'(x)$ i $u_0'(a) \neq 0$ dla pewnego wielomianu $u_0'(x) \in K[x]$, to $(x-a)^k u_0(x) = (x-a)^k u_0'(x)$, czyli $u_0(x) = u_0'(x)$. Ponieważ liczba k jest wyznaczona jednoznacznie, analogicznie sprawdzamy jednoznaczność przedstawienia wielomianu $w(x)$ w postaci $w(x) = (x-a)^k w_0(x)$.

Określamy funkcję $f : D \longrightarrow K$, którą zapisujemy symbolicznie

$$f(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \tag{6}$$

następująco:

$$f(a) = \frac{w_0(a)}{u_0(a)} \tag{7}$$

dla dowolnego elementu $a \in D$.

Na podstawie powyższych rozważań możemy przyjąć następującą definicję.

Definicja 5.1
Funkcję $f(x)$ postaci (6), której dziedziną jest zbiór D określony warunkami (5), natomiast wartości funkcji $f(x)$ określone są za pomocą równości (7), nazywamy *funkcją wymierną jednej zmiennej* x nad ciałem K.

Zbiór wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej x nad ciałem K będziemy oznaczać symbolem $K(x)$.

Każdy wielomian $w(x) \in K[x]$ jest funkcją wymierną, gdyż $w(x) = \frac{w(x)}{1}$.

Funkcje wymierne $f_1(x), f_2(x) \in K(x)$ o dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2 nazywamy *równymi*, jeżeli:
(a) $D_1 = D_2$,
(b) $\forall\, a \in D_1\ [f_1(a) = f_2(a)]$.

Dziedziną funkcji wymiernej

$$\bar{\theta}(x) = \frac{\theta(x)}{u(x)}$$

jest zbiór K, przy czym

$$\bar{\theta}(a) = 0$$

dla dowolnego $a \in K$. Funkcję wymierną $\bar{\theta}(x)$ będziemy prościej oznaczać symbolem $\theta(x)$.

Dziedziną funkcji wymiernej

$$\Lambda(x) = \frac{u(x)}{u(x)}$$

jest zbiór K, przy czym

$$\Lambda(a) = 1$$

dla dowolnego $a \in K$.

Przykład.

Dane są dwa wielomiany nad ciałem $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych:

$$w(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \text{i} \quad u(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$w(x) = (x-1)(x-1)(x+2) \quad \text{i} \quad u(x) = (x-1)(x-3).$$

Zgodnie z określeniem zbioru D otrzymujemy: $w_0(x) = (x-1)(x+2) = x^2+x-2$ i $u_0(x) = x - 3$, $k = 1$. Zatem $D = \mathcal{R} \setminus \{3\}$.
Zgodnie z definicją 5.1 wartość funkcji wymiernej

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \tag{8}$$

jest określona następująco:

$$f(a) = \frac{a^2 + a - 2}{a - 3}$$

dla każdej liczby $a \in D$. W szczególności $f(1) = \frac{1+1-2}{1-3} = \frac{0}{-2} = 0$.
Wobec tego funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{dla} \quad x \neq 1,\ x \neq 3, \\ 0 \quad \text{dla} \quad x = 1, \end{cases} \qquad g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$$

są równe, czyli mają wspólną dziedzinę $D = \mathcal{R} \setminus \{3\}$ oraz $f(x) = g(x)$ dla każdej liczby $x \in D$.

Twierdzenie 5.2
Dla dowolnych wielomianów $w(x), u(x), v(x) \in K[x]$ *nad ciałem* K*, gdzie* $u(x) \neq \theta(x)$ *i* $v(x) \neq \theta(x)$*, funkcje wymierne*

$$f(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \quad i \quad g(x) = \frac{w(x)v(x)}{u(x)v(x)}$$

nad ciałem K *są równe.*

Dowód. Jeżeli $w(x) = \theta(x)$, to $f(a) = g(a) = 0$ dla dowolnego $a \in K$. Następnie zakładamy, że $w(x) \neq \theta(x)$. Niech $a \in K$. Wtedy wielomiany $w(x)$, $u(x)$ i $v(x)$ możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} w(x) &= (x-a)^m w_0(x), \;\; w_0(a) \neq 0, \\ u(x) &= (x-a)^k u_0(x), \;\; u_0(a) \neq 0, \\ v(x) &= (x-a)^l v_0(x), \;\; v_0(a) \neq 0, \end{aligned}$$

przy czym $w_0(x), u_0(x), v_0(x) \in K[x]$ oraz $m, k, l \in \mathcal{N}$.
Jeżeli $m < k$, to $m + l < k + l$, czyli element a nie należy ani do dziedziny funkcji $f(x)$, ani do dziedziny funkcji $g(x)$. Jeżeli $m \geqslant k$, to $m + l \geqslant k + l$, czyli element a należy do dziedzin funkcji $f(x)$ i $g(x)$. Zatem funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają identyczne dziedziny. Jeżeli element a należy do wspólnej dziedziny funkcji $f(x)$ i $g(x)$, to

$$f(a) = \frac{w_0(a)(a-a)^{m-k}}{u_0(a)},$$

$$g(a) = \frac{w_0(a)v_0(a)(a-a)^{(m+l)-(k+l)}}{u_0(a)v_0(a)} = \frac{w_0(a)(a-a)^{m-k}}{u_0(a)},$$

czyli $f(a) = g(a)$. Zatem funkcje wymierne $f(x)$ i $g(x)$ są równe.

Z twierdzenia 5.2 bezpośrednio wynika następujący

Wniosek 5.3
Każdą funkcję wymierną $f(x)$ *nad ciałem* K *można przedstawić w postaci*

$$f(x) = \frac{w(x)}{u(x)},$$

gdzie $w(x), u(x) \in K[x]$ *i* $u(x)$ *jest wielomianem unormowanym.*

Twierdzenie 5.4
Funkcje wymierne

$$f_1(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)} \quad i \quad f_2(x) = \frac{w_2(x)}{u_2(x)}$$

nad ciałem K są równe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość wielomianów

$$w_1(x)u_2(x) = w_2(x)u_1(x). \tag{9}$$

Dowód. Jeżeli spełniona jest równość (9), to oczywiście równe są funkcje wymierne:

$$g_1(x) = \frac{w_1(x)u_2(x)}{u_1(x)u_2(x)} \quad \text{i} \quad g_2(x) = \frac{w_2(x)u_1(x)}{u_1(x)u_2(x)}.$$

Z twierdzenia 5.2 wynika, że funkcje $f_1(x)$ i $g_1(x)$ są równe oraz funkcje $f_2(x)$ i $g_2(x)$ są równe. Zatem funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są równe.

Następnie zakładamy, że równość (9) nie jest spełniona. Na podstawie twierdzenia 1.7 wnioskujemy, że istnieje nieskończenie wiele elementów $a \in K$ takich, że $w_1(a)u_2(a) \neq w_2(a)u_1(a)$. Wobec tego istnieje element $b \in K$ taki, że $w_1(b)u_2(b) \neq w_2(b)u_1(b)$ i element b nie jest pierwiastkiem ani wielomianu $u_1(x)$, ani wielomianu $u_2(x)$. Ponieważ

$$f_1(b) = \frac{w_1(b)}{u_1(b)} = \frac{w_1(b)u_2(b)}{u_1(b)u_2(b)},$$

$$f_2(b) = \frac{w_2(b)}{u_2(b)} = \frac{w_2(b)u_1(b)}{u_1(b)u_2(b)},$$

więc $f_1(b) \neq f_2(b)$. Zatem funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ nie są równe.

Twierdzenie 5.5
Każda funkcja wymierna $f(x)$ nad ciałem K może być jednoznacznie przedstawiona w postaci

$$f(x) = \frac{w(x)}{u(x)}, \tag{10}$$

przy czym spełnione są warunki:
(a) *wielomiany $w(x), u(x) \in K[x]$ są względnie pierwsze;*
(b) *$u(x)$ jest wielomianem unormowanym.*

Ponadto dziedziną funkcji wymiernej $f(x)$ przedstawionej w postaci (10) *jest zbiór $D = \{a \in K : u(a) \neq 0\}$.*

Dowód. Rozważmy dowolną funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{w^*(x)}{u^*(x)}$$

nad ciałem K. Niech $d(x)$ będzie największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $w^*(x)$ i $u^*(x)$ takim, że najwyższy współczynnik wielomianu $d(x)$ jest równy najwyższemu współczynnikowi wielomianu $u^*(x)$. Z twierdzenia 1.5 wynika, że istnieją wielomiany względnie pierwsze $w(x)$, $u(x) \in K[x]$ takie, że

$$w^*(x) = w(x)d(x) \quad \text{i} \quad u^*(x) = u(x)d(x).$$

Zauważmy, że wielomian $u(x)$ jest unormowany. Na podstawie twierdzenia 5.2 otrzymujemy:

$$f(x) = \frac{w^*(x)}{u^*(x)} = \frac{w(x)d(x)}{u(x)d(x)} = \frac{w(x)}{u(x)}.$$

Następnie udowodnimy jednoznaczność. Niech funkcja wymierna $f(x)$ nad ciałem K będzie przedstawiona w postaci:

$$f(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)} = \frac{w_2(x)}{u_2(x)},$$

gdzie wielomiany $w_i(x)$ i $u_i(x)$ są względnie pierwsze dla $i = 1, 2$, a wielomiany $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są unormowane. Na mocy twierdzenia 5.4 mamy równość:

$$w_1(x)u_2(x) = w_2(x)u_1(x). \tag{11}$$

Z twierdzenia 1.4 i równości (11) wynika, że $u_1(x)|u_2(x)$ i $u_2(x)|u_1(x)$, czyli $u_1(x) \sim u_2(x)$. Ponieważ najwyższe współczynniki wielomianów $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są równe 1, więc $u_1(x) = u_2(x)$ na mocy lematu 1.3. Wobec tego z równości (11) wynika, że $w_1(x) = w_2(x)$. Na podstawie definicji 5.1 funkcji wymiernej zbiór $D = \{a \in K : u(a) \neq 0\}$ jest dziedziną funkcji (10).

TWIERDZENIE 5.6
Niech $f_1(x)$ i $f_2(x)$ będą funkcjami wymiernymi nad ciałem K o dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2. Jeżeli istnieje nieskończony podzbiór $M \subseteq D_1 \cap D_2$ taki, że

$$\forall\, a \in M\ [f_1(a) = f_2(a)],$$

to funkcje wymierne $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są równe.

Dowód. Niech

$$f_1(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{w_2(x)}{u_2(x)}$$

oraz

$$M_1 = \{a \in M :\ u_1(a) \neq 0\ \wedge\ u_2(a) \neq 0\}.$$

Zauważmy, że zbiór M_1 jest nieskończony. Dla dowolnego elementu $a \in M_1$ mamy:

$$\frac{w_1(a)}{u_1(a)} = \frac{w_2(a)}{u_2(a)},$$

czyli
$$w_1(a)u_2(a) - w_2(a)u_1(a) = 0.$$
Zatem wielomian
$$v(x) = w_1(x)u_2(x) - w_2(x)u_1(x)$$
ma nieskończenie wiele pierwiastków, czyli $v(x) = \theta(x)$ na podstawie twierdzenia 1.6. Stąd
$$w_1(x)u_2(x) = w_2(x)u_1(x),$$
czyli funkcje wymierne $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są równe na mocy twierdzenia 5.4. Dowód twierdzenia został zakończony.

Niech
$$f_1(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{w_2(x)}{u_2(x)}$$
będą funkcjami wymiernymi nad ciałem K.

Określamy *sumę* $f_1(x) + f_2(x)$ i *iloczyn* $f_1(x) \cdot f_2(x)$ funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ następująco:
$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{w_1(x)u_2(x) + w_2(x)u_1(x)}{u_1(x)u_2(x)}, \tag{12}$$
$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{w_1(x)w_2(x)}{u_1(x)u_2(x)}. \tag{13}$$

Udowodnimy, że suma funkcji wymiernych nie zależy od wyboru wielomianów, które występują w określeniu danej funkcji. Niech
$$f_1(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)} = \frac{w_1'(x)}{u_1'(x)}, \quad f_2(x) = \frac{w_2(x)}{u_2(x)} = \frac{w_2'(x)}{u_2'(x)}.$$
Zgodnie z twierdzeniem 5.4 otrzymujemy następujące równości:
$$w_1(x)u_1'(x) = w_1'(x)u_1(x), \quad w_2(x)u_2'(x) = w_2'(x)u_2(x).$$
Mnożąc pierwszą równość przez $u_2(x)u_2'(x)$, a drugą przez $u_1(x)u_1'(x)$, otrzymujemy:
$$w_1(x)u_2(x)u_1'(x)u_2'(x) = w_1'(x)u_2'(x)u_1(x)u_2(x),$$
$$w_2(x)u_1(x)u_1'(x)u_2'(x) = w_2'(x)u_1'(x)u_1(x)u_2(x).$$
Dodając stronami powyższe równości i wykonując stosowne przekształcenia, mamy równość:
$$(w_1(x)u_2(x)+w_2(x)u_1(x))u_1'(x)u_2'(x) = (w_1'(x)u_2'(x)+w_2'(x)u_1'(x))u_1(x)u_2(x).$$

Z otrzymanej równości na mocy (12) i twierdzenia 5.4 wynika, że

$$\frac{w_1(x)}{u_1(x)} + \frac{w_2(x)}{u_2(x)} = \frac{w_1'(x)}{u_1'(x)} + \frac{w_2'(x)}{u_2'(x)}.$$

Analogiczną własność można wykazać dla iloczynu funkcji wymiernych.
Niech

$$f_1(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{-w(x)}{u(x)}$$

będą funkcjami wymiernymi nad ciałem K. Wtedy

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{w(x)}{u(x)} + \frac{-w(x)}{u(x)} = \frac{w(x) + (-w(x))}{u(x)} = \frac{\theta(x)}{u(x)} = \theta(x).$$

Jeżeli

$$f_1(x) = \frac{w(x)}{u(x)},\ w(x) \neq \theta(x) \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{u(x)}{w(x)},$$

to

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)} = \frac{w(x) \cdot u(x)}{u(x) \cdot w(x)} = \Lambda(x).$$

Twierdzenie 5.7
Niech $K(x)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji wymiernych nad ciałem K. Wtedy struktura algebraiczna $(K(x), +, \cdot)$ z działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$, określonymi odpowiednio wzorami (12) *i* (13)*, jest ciałem.*

Dowód. Sprawdzenie łączności i przemienności dodawania i mnożenia funkcji wymiernych w zbiorze $K(x)$ jest elementarne. Łatwo można również sprawdzić rozdzielność mnożenia względem dodawania funkcji wymiernych. Zerem dla dodawania jest funkcja wymierna $\theta(x)$, czyli wielomian zerowy nad ciałem K. Jednością dla mnożenia jest funkcja wymierna $\Lambda(x)$, czyli wielomian jedynkowy nad ciałem K. Jeżeli $f(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \in K(x)$, to funkcja wymierna $-f(x) = \frac{-w(x)}{u(x)}$ jest elementem przeciwnym do funkcji wymiernej $f(x)$. Jeżeli $f(x) = \frac{w(x)}{u(x)} \in K(x)$ i $f(x) \neq \theta(x)$, to funkcja wymierna $f^*(x) = \frac{u(x)}{w(x)}$ jest elementem odwrotnym do funkcji wymiernej $f(x)$.

Na podstawie twierdzenia 5.7 możemy przyjąć następującą definicję.

Definicja 5.8
Ciało $(K(x), +, \cdot)$ nazywamy *ciałem funkcji wymiernych jednej zmiennej x* nad ciałem K.

Określamy odwzorowanie $\varphi : UK(x) \longrightarrow K(x)$ następująco:

$$\varphi\left(\frac{w(x)}{u(x)}\right) = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = \frac{w(x)}{u(x)}$$

dla dowolnego ułamka algebraicznego $\frac{w(x)}{u(x)} \in UK(x)$. Ponieważ ułamek algebraiczny jest klasą abstrakcji odpowiedniej relacji równoważności, trzeba więc wykazać, że odwzorowanie φ jest dobrze określone, tzn. określenie odwzorowania φ nie zależy od wyboru par wielomianów reprezentujących daną klasę abstrakcji (ułamek algebraiczny). Niech $\frac{w(x)}{u(x)} = \frac{w_1(x)}{u_1(x)}$, gdzie $\frac{w(x)}{u(x)}, \frac{w_1(x)}{u_1(x)} \in UK(x)$. Wtedy

$$w(x)u_1(x) = w_1(x)u(x). \tag{14}$$

Niech

$$\varphi\left(\frac{w_1(x)}{u_1(x)}\right) = f_1(x) \Longleftrightarrow f_1(x) = \frac{w_1(x)}{u_1(x)}.$$

Z równości (14) i twierdzenia 5.4 wynika, że $f = f_1$. W sposób elementarny można sprawdzić, że odwzorowanie φ jest izomorfizmem ciał $UK(x)$ i $K(x)$. Zatem otrzymaliśmy następujące

TWIERDZENIE 5.9

Niech K będzie ciałem. Wtedy ciało $UK(x)$ ułamków algebraicznych nad ciałem K i ciało $K(x)$ funkcji wymiernych nad ciałem K są izomorficzne.

6. Uwagi dydaktyczne o ułamkach algebraicznych i funkcjach wymiernych

Ułamki algebraiczne (wyrażenia wymierne) i funkcje wymierne są zagadnieniami rozważanymi w matematyce elementarnej (szkolnej) i w matematyce wyższej. Współczesne podręczniki szkolne zajmują się tymi zagadnieniami w ograniczonym zakresie. *Informator maturalny od 2005 roku z matematyki* (2003, s. 18) w standardach wymagań egzaminacyjnych do matury z matematyki wymienia hasła:

> zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych, definicję funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych.

Nauczyciel matematyki powinien, niezależnie od zmieniających się tendencji w wymaganiach szkolnych, dobrze znać podstawy teoretyczne i rozwiązania dydaktyczne dotyczące tej tematyki.

Kierując się rozważaniami teoretycznymi zawartymi w poprzednich punktach tej pracy, możemy wyróżnić w zakresie tej tematyki cztery typy zagadnień:

1) ciało ułamków algebraicznych,

2) wartości liczbowe ułamków algebraicznych,
3) definicje funkcji wymiernych,
4) ciało funkcji wymiernych.

W zdecydowanej większości podręczników szkolnych łączy się ze sobą różne aspekty wymienionych czterech zagadnień w taki sposób, który prowadzi do zamieszania dydaktycznego i merytorycznego, a nawet sugeruje błędne rozumowania.

Najpierw przedstawimy kilka uwag dotyczących ciała ułamków algebraicznych i wartości liczbowych tych ułamków. W podręcznikach szkolnych (np. Pawłowski, 2003; Kłaczkow, Kurczab, Świda, 2003; Ehrenfeucht, Stande, 1973) stwierdza się, że podstawowe własności ułamków liczbowych i ułamków algebraicznych są analogiczne. Do tych podstawowych własności należą: równość ułamków, skracanie i rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków, własności działań (łączność, przemienność, elementy neutralne dla dodawania i mnożenia, elementy przeciwne i odwrotne, rozdzielność mnożenia względem dodawania). Wiemy, że zbiór ułamków liczbowych (liczb wymiernych) ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem ułamków jest ciałem. We wszystkich zagadnieniach dotyczących ułamków algebraicznych w matematyce elementarnej możemy przyjąć założenie, że rozważamy zbiór ułamków algebraicznych zbudowanych za pomocą pewnej skończonej liczby zmiennych (liter). Zatem zbiór tych wszystkich ułamków algebraicznych z dodawaniem i mnożeniem ułamków jest ciałem ułamków pewnego pierścienia całkowitego wielomianów (zob. definicja 3.2). Ponieważ zbiór wszystkich ułamków liczbowych (liczb wymiernych) jest również ciałem ułamków pierścienia całkowitego liczb całkowitych ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb, więc istotnie działania na ułamkach liczbowych i algebraicznych mają analogiczne własności. Taki układ treści prezentujący pełną analogię działań i własności działań na ułamkach liczbowych i algebraicznych jest zawarty np. w podręczniku (Brown, Smith, Dolciani, 1980).

W wielu podręcznikach szkolnych działania na ułamkach algebraicznych i własności tych działań niepotrzebnie połączone są integralnie z wartościami liczbowymi ułamków algebraicznych. Ułamki algebraiczne wraz z ich dodawaniem i mnożeniem tworzą ciało, a do rozważania tego ciała nie są nam potrzebne wartości liczbowe tych ułamków. Przedstawimy pewne przykłady z podręczników szkolnych. Weźmy najpierw pod uwagę skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych. Z teorii ciała ułamków algebraicznych jako ciała ułamków odpowiedniego pierścienia całkowitego wielomianów wynika, że skracać i rozszerzać ułamki algebraiczne można przez każdy niezerowy wielomian z rozważanego pierścienia całkowitego wielomianów. Zobaczmy, jak traktują ten problem podręczniki szkolne. W podręczniku (Kąkol, Wołodźko, 1995) jest rozważany ułamek algebraiczny

$$\frac{x^3+x}{2x^2+2}.$$

Ponieważ

$$\frac{x^3+x}{2x^2+2}=\frac{x(x^2+1)}{2(x^2+1)},$$

więc autorzy stwierdzają, że można ten ułamek uprościć przez x^2+1, gdyż $x^2+1 \neq 0$, czyli

$$\frac{x(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x}{2}.$$

W tym przypadku jest wyraźna sugestia, że rozważany ułamek można skrócić dlatego, że wielomian x^2+1 dla żadnej liczby rzeczywistej nie przyjmuje wartości zero. Analogiczna uwaga jest zapisana w podręczniku (Klakla, Serafin, 1996).

W podręczniku (Kłaczkow i inni, 2003) rozważa się ułamek algebraiczny

$$\frac{x^3-4x}{x^2+x-6}.$$

Ponieważ

$$\frac{x^3-4x}{x^2+x-6}=\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)},$$

więc dokonuje się skrócenia ułamka przez wielomian $x-2$, czyli

$$\frac{x^3-4x}{x^2+x-6}=\frac{x(x+2)}{x+3},$$

przy założeniach, że $x \neq -3$ i $x \neq 2$.

Powstaje pytanie, czemu służą przyjęte założenia przy skracaniu powyższego ułamka algebraicznego? Ułamków algebraicznych nie można skracać tylko przez wielomian zerowy, a przecież $x-2$ nie jest wielomianem zerowym. Ułamki algebraiczne

$$\frac{x^3-4x}{x^2+x-6} \quad \text{i} \quad \frac{x(x+2)}{x+3},$$

są równe bez żadnych dodatkowych założeń o wartościach liczbowych tych ułamków, gdyż

$$(x^3-4x)(x+3)=(x^2+x-6)x(x+2).$$

Rozszerzanie ułamków algebraicznych w podręczniku (Kłaczkow i inni, 2003) również odbywa się przy dodatkowych założeniach o wartościach liczbowych wielomianu, przez który ułamek jest rozszerzany. Podobnie postępuje się w podręcznikach (np. Pawłowski, 2003; Ehrenfeucht, Stande, 1973). Takie ujęcie tych zagadnień najprawdopodobniej jest spowodowane tym, że autorzy wymienionych podręczników skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych uważają za integralną część tematyki funkcji wymiernych oraz równań i nierówności wymiernych. Nie ma takiej potrzeby. Można wcześniej omówić zagadnienie skracania i rozszerzania ułamków algebraicznych, bez założeń o ich wartościach liczbowych, a następnie wykorzystać te umiejętności przy omawianiu funkcji wymiernych oraz równań i nierówności wymiernych.

Można rozwiązywać np. zadania typu:

Dana jest funkcja wymierna

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6}.$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f, a następnie skróć ułamek algebraiczny określający funkcję f.

Zamieszanie merytoryczne i dydaktyczne występuje również przy rozważaniu działań na ułamkach algebraicznych. W podręczniku (Pawłowski, 2003) mamy przykład dodawania:

$$\frac{10t-2}{8t-2} + \frac{t-1}{12t-3} = \frac{4}{3},$$

przy założeniu, że $t \neq \frac{1}{4}$. Powyższa równość na ułamkach algebraicznych zachodzi bez żadnych założeń o wartościach liczbowych tych ułamków. Istotnie,

$$\frac{10t-2}{8t-2} + \frac{t-1}{12t-3} = \frac{128t^2 - 64t + 8}{(8t-2)(12t-3)},$$

ale

$$\frac{128t^2 - 64t + 8}{(8t-2)(12t-3)} = \frac{4}{3},$$

bo

$$3(128t^2 - 64t + 8) = 4(8t-2)(12t-3).$$

Czy dodawanie ułamków w sensie przedstawionym w tym przykładzie jest działaniem w zbiorze ułamków algebraicznych? Dodając ułamki

$$\frac{10t-2}{8t-2} \quad \text{i} \quad \frac{t-1}{12t-3},$$

otrzymujemy dwa wyniki w postaci:

$$\frac{128t^2 - 64t + 8}{(8t-2)(12t-3)}, \quad \text{gdzie } t \neq \frac{1}{4},$$

oraz

$$\frac{4}{3}.$$

Czy otrzymane ułamki algebraiczne są równe? Jeżeli są równe, to jaka jest definicja równości tych ułamków? Ponadto, ułamki algebraiczne można rozszerzać, czy więc np. ułamek

$$\frac{4(t-7)}{3(t-7)},$$

gdzie $t \neq 7$, jest również wynikiem dodawania ułamków

$$\frac{10t-2}{8t-2} \quad \text{i} \quad \frac{t-1}{12t-3}?$$

Całe to zamieszanie powstało stąd, że działania na ułamkach algebraicznych, będące działaniami w ciele ułamków algebraicznych, zostały połączone z działaniami na funkcjach wymiernych określonych za pomocą ułamków algebraicznych. Przy takim ujęciu tematyki ułamków algebraicznych w podręcznikach szkolnych traci się okazję do zapoznania uczniów z przykładem ciała ułamków algebraicznych, które nie jest ciałem liczbowym.

Następnie zajmiemy się funkcjami wymiernymi jednej zmiennej. W podręcznikach szkolnych przyjmuje się następującą definicję funkcji wymiernej jednej zmiennej:

> Funkcję postaci
>
> $$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{15}$$
>
> gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami wielomianowymi jednej zmiennej rzeczywistej, nazywamy **funkcją wymierną** jednej zmiennej rzeczywistej. Zakładamy przy tym, że $g(x) \not\equiv 0$. Zatem, jeśli $A = \{x \in \mathcal{R};\ g(x) = 0\}$, to dziedziną funkcji wymiernej $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ jest zbiór $\mathcal{R} \setminus A$.
>
> (Pawłowski, 2003, s. 86)

Dodawanie funkcji wymiernych jednej zmiennej określa się za pomocą zwyczajnej definicji dodawania funkcji.

> *Sumą* dwóch funkcji wymiernych $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taką funkcję $H(x)$, że dla każdej liczby x, dla której określone są funkcje $F(x)$ i $G(x)$, zachodzi równość:
>
> $$H(x) = F(x) + G(x). \tag{16}$$
>
> (Pawłowski, 2003, s. 85)

Z definicji tej wynika, że dziedziną funkcji $H(x)$ jest część wspólna dziedzin funkcji $F(x)$ i $G(x)$.

Przy tak przyjętych definicjach funkcji wymiernej i dodawania funkcji wymiernych, zbiór wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej z działaniem dodawania funkcji nie tworzy nawet grupy. Istotnie, rozważmy dwie funkcje wymierne

$$F(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{i} \quad G(x) = \frac{1}{x-2}$$

jednej zmiennej rzeczywistej. Zauważmy, że nie istnieje funkcja wymierna $H(x)$ jednej zmiennej rzeczywistej taka, aby

$$F(x) + H(x) = G(x),$$

gdyż liczba 1 nie należy do dziedziny sumy funkcji $F(x) + H(x)$, natomiast 1 należy do dziedziny funkcji $G(x)$. Zatem zbiór wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej z działaniem dodawania funkcji nie tworzy grupy, tym bardziej nie tworzy ciała z dodawaniem i mnożeniem funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej.

Natomiast w książce (Leitner, Żakowski, 1974, s. 189) stwierdza się:

> Zbiór funkcji wymiernych jednej zmiennej x tworzy więc ciało.

Ponieważ w tej książce określa się analogicznie do powyższych definicji przyjętych w podręczniku (Pawłowski, 2003) funkcje wymierne i dodawanie funkcji wymiernych, więc powyższe stwierdzenie jest błędne.

W podręczniku (Ehrenfeucht, Stande, 1973) w temacie *Funkcje wymierne* mamy wyjątkowe nagromadzenie różnych zagadnień, które przy takim ich zestawieniu całkiem zaciemniają ich teoretyczne podstawy. Po pierwsze, przykłady działań na ułamkach algebraicznych ilustrowane są przykładami działań na ułamkach liczbowych, ale w ułamkach algebraicznych ustalana jest dziedzina będąca zbiorem liczb rzeczywistych bez pierwiastków wielomianu w mianowniku ułamka algebraicznego. Takie zestawienie może sugerować błędne stwierdzenie, że zbiór funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej z dodawaniem i mnożeniem tych funkcji tworzy ciało, gdyż ułamki liczbowe z dodawaniem i mnożeniem tych ułamków tworzą ciało. Po drugie, działania na funkcjach wymiernych są określone za pomocą działań na ułamkach algebraicznych. Z tekstu podręcznika nie można bezpośrednio wywnioskować, czy działania na funkcjach wymiernych są zwykłymi działaniami na funkcjach, czy są to specyficzne działania, które określone są tylko dla funkcji wymiernych. Po trzecie, Autorki tego podręcznika piszą:

> W zbiorze funkcji wymiernych określonych na tej samej dziedzinie, podobnie jak w zbiorze liczb wymiernych, określone są cztery podstawowe działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (oprócz dzielenia przez wielomian zerowy). (...) Wielomian zerowy jest elementem obojętnym dodawania, a wielomian $W(x) = 1$ jest elementem obojętnym dla mnożenia.
>
> (Ehrenfeucht, Stande, 1973, s. 151)

Zauważmy, że iloraz $\frac{F(x)}{G(x)}$ funkcji wymiernych $F(x)$ i $G(x)$ o tej samej dziedzinie na ogół ma inną dziedzinę niż wspólna dziedzina funkcji $F(x)$ i $G(x)$. Dziedziną wielomianu zerowego i wielomianu $W(x) = 1$ w rozważanej sytuacji jest zbiór liczb rzeczywistych, a więc te funkcje nie muszą należeć do zbioru funkcji wymiernych określonych na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych. Stwierdzenie: *podobnie jak w zbiorze liczb wymiernych* może sugerować strukturę ciała tych funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej.

Na podstawie powyższych rozważań można zaproponować następujące wnioski dydaktyczne:

1. Podstawowe własności, czyli równość, skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych, działania na ułamkach algebraicznych i własności tych działań należy oddzielić od wyznaczania wartości liczbowych ułamków algebraicznych. Działania na ułamkach algebraicznych i własności tych działań należy porównywać z działaniami na ułamkach liczbowych (liczbach wymiernych), aby podkreślić analogiczną strukturę algebraiczną ułamków liczbowych i ułamków algebraicznych z działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, czyli strukturę ciała ułamków dla odpowiednich pierścieni całkowitych.

2. Wyznaczanie wartości liczbowych ułamków algebraicznych powinno być przygotowaniem do wprowadzenia pojęcia funkcji wymiernych oraz równań i nierówności z ułamkami algebraicznymi.

3. W matematyce szkolnej należy wprowadzić tradycyjną definicję funkcji wymiernej (zob. (15)) jednej zmiennej rzeczywistej, w której do dziedziny należą wszystkie liczby rzeczywiste, które nie są pierwiastkami wielomianu występującego w mianowniku funkcji wymiernej. Działania na funkcjach wymiernych należy określić jako zwykłe działania na funkcjach (zob. (16)) z odpowiednio dobranymi dziedzinami. Następnie należy wykazać, że zwykłe działania na funkcjach wymiernych można wyrazić za pomocą działań na ułamkach wymiernych określających te funkcje wymierne (zob. Pawłowski, 2003). Przy tak określonych funkcjach wymiernych i działaniach na tych funkcjach nie należy sugerować nadawania zbiorowi funkcji wymiernych wraz z działaniami dodawania i mnożenia funkcji struktury algebraicznej, gdyż nie tworzą one ani grupy, ani pierścienia, ani ciała.

4. W matematyce wyższej uprawianej na studiach warto rozważyć definicję 5.1 funkcji wymiernej, gdyż zbiór tak określonych funkcji jednej zmiennej nad ciałem nieskończonym K z dodawaniem i mnożeniem funkcji wymiernych tworzy ciało (zob. twierdzenie 5.7). Otrzymujemy w ten sposób ważny przykład ciała, które nie jest ciałem liczbowym. Ponadto można wykazać, że jest to ciało uporządkowane i niearchimedesowskie.

7. Idee głębokie i modele formalne ułamków algebraicznych i funkcji wymiernych

Terminologia idei głębokich i ich modeli formalnych pochodzi z prac (Semadeni, 2002), (Semadeni, 2005). Autor tych prac nie podaje ścisłych definicji ani idei głębokich, ani modeli formalnych idei głębokich, ale opisuje istotne cechy tych pojęć i prowadzi ich analizę na podstawie wielu przykładów z różnych dziedzin matematyki. Oto wybrane fragmenty tych prac:

> Będziemy używać pomocniczego terminu *twór matematyczny*, który obejmuje rozmaitego typu twory będace przedmiotem rozważań matematyków: pojęcia (liczby, punkty, zbiory, relacje), zdania, formy zdaniowe, fakty jednostkowe (takie jak $5 < 7$), twierdzenia, dowody, standardowe fragmenty wnioskowań, struktury, procedury (w tym algorytmy, które cechuje jednoznaczność wszystkich kroków). (...)
>
> Typowy twór matematyczny A ma więc trzy zasadnicze i n t e r p r e t a c j e . Są to: 1) jego idea głęboka, 2) jego formy powierzchniowe, 3) jego modele formalne. (...)
>
> *Idea głęboka* tworu X (lub krócej: idea głęboka X) jest to *należycie ukształtowana abstrakcyjna idea* zawierająca szeroko rozumiane *znaczenie* tego tworu, jego *podstawowe własności*, jego *związki* z innymi tworami (zarówno matematycznymi, jak i niematematycznymi, w rzeczywistym świecie, w fizyce itd.) oraz główne *cele*, dla których dany twór jest rozpatrywany. Idea głęboka nie jest jednak jakąś sumą takich składników. Musi być ich *dojrzałą syntezą umysłową, elastyczną, odporną na konflikty poznawcze.* (...)
>
> *Formy powierzchniowe* to zmysłowo postrzegane z n a k i (głównie wizualne lub akustyczne), reprezentujące twory matematyczne. Formami takimi są symbole matematyczne, słowa dowolnego języka, ciągi zerowo-jedynkowe, rysunki figur geometrycznych, wykresy funkcji, programy komputerowe, ruchy ciała, którymi chce ktoś przekazać coś o tych tworach etc. (...)
>
> *Modele formalne* pojęć i innych tworów matematycznych, to ich odpowiedniki w t e o r i a c h a k s j o m a t y c z n y c h.
>
> (Semadeni, 2002, s. 44, 45, 54),(Semadeni, 2005, s. 276)

Idea głęboka ułamków algebraicznych kształtowana jest na różnych etapach szkolnego nauczania matematyki. Do najważniejszych obszarów tematycznych związanych z ułamkami algebraicznymi należą: obliczanie wartości liczbowych ułamków algebraicznych, działania na ułamkach algebraicznych, ułamki algebraiczne w równaniach i nierównościach, ułamki algebraiczne w definicji funkcji wymiernych.

Modelem formalnym idei głębokiej ułamków algebraicznych jest ciało ułamków algebraicznych z dodawaniem i mnożeniem tych ułamków, skonstruowane jako ciało ułamków stosownego pierścienia wielomianów. Zbudowanie modelu formalnego dla ułamków algebraicznych przynosi typowe korzyści: wzbogaca ich treść, znaczenie i rozumienie, uwydatnia ich podstawowe własności, sugeruje poprawne merytorycznie rozwiązania dydaktyczne dotyczące nauczania o ułamkach algebraicznych.

Idea głęboka funkcji wymiernych również jest kształtowana w szkolnym nauczaniu matematyki. Modele formalne idei głębokiej funkcji wymiernych pojawiają się przede wszystkim w dwóch dziedzinach matematycznych, mianowicie w analizie matematycznej i algebrze. Konstrukcja tych modeli daje typowe korzyści dla kształtowania idei głębokiej funkcji wymiernych i dla nauczania o funkcjach wymiernych. Jednak w przypadku modeli formalnych funkcji wymiernych otrzymujemy jeszcze jedną bardzo ważną własność: modele formalne funkcji wymiernych wskazują na *dysonans* w zakresie podstawowego rozumienia idei głębokiej funkcji wymiernych. Termin *dysonans* użyty jest w znaczeniu określonym w pracy (Semadeni, 2002). Mamy wiele racjonalnych powodów do tego, aby definiować funkcję wymierną zgodnie z ideą zawartą w definicji 4.1. W ten sposób powszechnie i tradycyjnie rozumie się funkcje wymierne w analizie matematycznej. Natomiast definicja 5.1 prowadzi do konstrukcji ważnego modelu ciała uporządkowanego niearchimedesowskiego funkcji wymiernych. Rozważane definicje funkcji wymiernych nie są równoważne. Gdyby przyjąć ryzykowną próbę oceny, która definicja jest lepsza, można by wskazać na definicję 5.1. Argumentem przemawiającym za definicją 5.1 jest fakt, że może ona być stosowana zarówno w analizie matematycznej, jak i w algebrze. Natomiast wiemy, że definicja 4.1 powoduje, że zbiór funkcji wymiernych jednej zmiennej rzeczywistej z dodawaniem i mnożeniem tych funkcji nie tworzy ciała. Jednak omawiany dysonans dotyczący idei głebokiej funkcji wymiernych ma charakter trwały, gdyż zmiana tradycyjnego rozumienia funkcji wymiernych jest praktycznie niemożliwa. Można również stwierdzić, że idea głęboka funkcji wymiernych jest *odporna na typowe konflikty poznawcze.* Sformułowanie to zostało użyte w sensie przyjętym w pracy (Semadeni, 2005). Odporność idei głębokiej funkcji wymiernych na konflikty poznawcze w tym przypadku polega na tym, że pomimo dwóch nierównoważnych definicji funkcji wymiernych, idea głęboka w sensie epistemologicznym jest tak dobrze ukształtowana, że omawiany dysonans w zakresie rozumienia funkcji wymiernych nie przeszkadza w ich stosowaniu w matematyce i w różnych dziedzinach pozamatematycznych.

Literatura

Białynicki-Birula, A.: 1976, *Algebra*, PWN, Warszawa.

Brown, R. G., Smith, G. D., Dolciani, M. P.: 1980, *Basic Algebra*, Houghton Mifflin Company, Boston.

Ehrenfeucht, A., Stande, O.: 1973, *Algebra dla klasy II liceum ogólnokształcącego*, PZWS, Warszawa.

Gleichgewicht, B.: 1983, *Algebra*, PWN, Warszawa.

Kłaczkow, K., Kurczab, K., Świda, E.: 2003, *Matematyka, podręcznik do liceów i techników, klasa II, zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa.

Kąkol, H., Wołodźko, S.: 1995, *Matematyka, podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej*, Wydaw. KLEKS, Bielsko-Biała.

Klakla, M., Serafin, S.: 1996, *Matematyka, podręcznik dla klasy szóstej szkoły podstawowej*, Wydaw. KLEKS, Bielsko-Biała.

Kostrykin, A. I.: 1984, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa.

Leitner, R., Żakowski, W.: 1974, *Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie, część I*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Ляпин, Е. Ц., Евсеев, А. Е.: 1978, *Алгиебра и теория чисел, Частъ II Линейная алгебра и полиномы*, Просвещение, Москва.

Opial, Z.: 1969, *Algebra wyższa*, PWN, Warszawa.

Pawłowski, H.: 2003, *Matematyka 2, Zakres rozszerzony, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego*, Operon, Wydawnictwo Pedagogiczne, Gdynia.

Semadeni, Z.: 2002, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41-92.

Semadeni, Z.: 2005, Idee głębokie struktur matematycznych określonych aksjomatycznie, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 275-310.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@ap.krakow.pl