FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Joanna Major, Maciej Major

Wokół twierdzenia Picka*

Abstract. The article concerns the phenomena connected with the Pick theory and its generalizations. It is divided into two parts. The first one includes the reflection on the part of research, during which a group of students was solving maths tasks based on the Pick theory. In the second part of the article we present our conclusions as to the Pick theory and its generalizations. We present here tasks and problems which can become a basis for constructing sets of tasks that will enable pupils to improve their mathematical knowledge and skills.

Wstęp

Jednym z ważnych elementów kształcenia matematycznego jest kształtowanie umiejętności czytania tekstu matematycznego oraz umiejętności wykorzystywania informacji w nim zawartych w procesie rozwiązywania zadań matematycznych. Ten obszar działalności matematycznej, a zarazem element kształcenia matematycznego znalazł swoje odbicie m.in. w Standardach Wymagań Egzaminacyjnych będących podstawą egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Obejmuje on trzy obszary:

- wiadomości i rozumienie,
- korzystanie z informacji,
- tworzenie informacji.

W obszarze drugim zwrócono uwagę na poprawne interpretowanie tekstu matematycznego, w tym na stosowanie podanej definicji lub wzoru do rozwiązania problemu matematycznego oraz stosowanie przedstawionego algorytmu do rozwiązania problemu praktycznego lub teoretycznego (por. Informator, 2007).

Z. Krygowska (1986) zwraca uwagę na potrzebę dostarczania uczniom zadań, które prowokowałyby i rozwijały ich aktywność matematyczną. M. Klakla (2002) wyróżnia następujące, podstawowe rodzaje twórczej aktywności matematycznej:

*On the Pick Theory

1. ***stawianie hipotez i ich weryfikacja*** *(...),*
2. ***transfer metody*** *(przeniesienie metody rozumowania czy rozwiązania problemu na zagadnienie podobne, analogiczne, ogólniejsze, otrzymane przez przeniesienie wymiaru, szczególny czy też graniczny przypadek),*
3. ***twórcze odbieranie, przetwarzanie i wykorzystanie informacji matematycznej,***
4. ***dyscyplina i krytyczność myślenia,***
5. ***generowanie problemów w procesie transferu metody,***
6. ***przedłużanie problemów,***
7. ***stawianie problemów w sytuacjach otwartych.***

W artykule podejmujemy m.in. próbę opisania wyników badań odnoszących się do drugiego i trzeciego obszaru działalności matematycznej uczniów. Zwrócimy też uwagę na wyniki uczniów w kontekście podejmowania przez nich twórczych aktywności matematycznych.

Niniejszy artykuł podzielony jest na dwie części. Pierwsza z nich stanowi refleksję nad fragmentem badań, w czasie których grupa uczniów rozwiązywała odpowiednio skonstruowane zadania matematyczne skupione wokół twierdzenia Picka. W drugiej części artykułu przedstawimy uwagi dotyczące twierdzenia Picka oraz jego uogólnień. Zaprezentujemy tu zadania i problemy mogące stanowić bazę do budowania zestawów zadań pozwalających pogłębiać wiadomości i umiejętności matematyczne uczących się. Zagadnienia omawiane w niniejszej części artykułu można, naszym zdaniem, traktować jako ogniwo w ważnym, zdaniem Z. Krygowskiej, poszukiwaniu środków dydaktycznych służących prowokowaniu i rozwijaniu aktywności matematycznej.

1. Opis i wyniki badań

W niniejszym rozdziale przedstawiamy fragment wyników badań dotyczących umiejętności czytania i wykorzystywania informacji zawartych w tekście matematycznym podczas pracy nad zadaniami. Jak wspomniano wcześniej, badania dotyczyły drugiego i trzeciego obszaru działalności matematycznej. Uczniom liceum zaproponowano zapoznanie się z krótkim wprowdzającym tekstem, a następnie polecono pisemne rozwiązanie pięciu zadań dotyczących twierdzenia Picka.

Poniżej opisujemy metodologię badań, użyte narzędzia badawcze, formułujemy cele badań oraz scharakteryzujemy badaną grupę osób. W dalszej części paragrafu podejmujemy próbę opisania i zinterpretowania wyników badań.

1.1. Opis badań

W badaniach brało udział 57 uczniów liceum ogólnokształcącego z Wieliczki. Większość uczniów biorących udział w badaniach uczęszcza na koła matematyczne organizowane przez nauczycieli uczących w poszczególnych klasach matematyki.

Badani są, jak sami deklarują, osobami zainteresowanymi problemami matematycznymi. Uczniowie ci, także w opinii nauczycieli, interesują się matematyką, lecz nie są wybitnie uzdolnieni matematycznie. Wśród badanych znalazło się 26 osób, które uczęszczają do klasy o profilu ogólnym oraz 31 uczniów z klasy matematycznej. Badaniami objęto więc uczniów dwu klas obecnych na zajęciach 3 grudnia 2009 r.

Narzędzie badawcze stanowił kwestionariusz badań zawierający m.in. zestaw 5 zaprezentowanych i omówionych dalej zadań, nad którym każdy z uczniów mógł pracować przez 45 minut. Większość uczniów zakończyła pracę nad zestawem zadań po 30 minutach.

Metodę badawczą stanowiła analiza wytworów działania uczniów rozwiązujących zadania matematyczne (Łobocki, 1984).

Celem badań była próba uzyskania odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy uczniowie potrafią czytać tekst matematyczny dotyczący nieznanego badanym twierdzenia geometrycznego, a przy tym czy potrafią wykorzystać informacje w nim zawarte do rozwiązania zadań matematycznych?
- W jaki sposób uczniowie oceniają prawdziwość stwierdzeń matematycznych i w jaki sposób weryfikują swoje przypuszczenia?
- Czy uczniowie klasy III liceum znają elementy metody matematycznej, które pozwalają na dowodzenie twierdzeń matematycznych?

1.2. Narzędzie badawcze

Chcąc uzyskać choćby częściowe odpowiedzi na sformułowane wyżej pytania, zaproponowano badanym pracę nad następującym kwestionariuszem badań.

Imię i Nazwisko ....

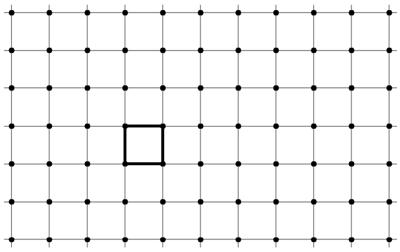
Klasa ....

Szkoła ....

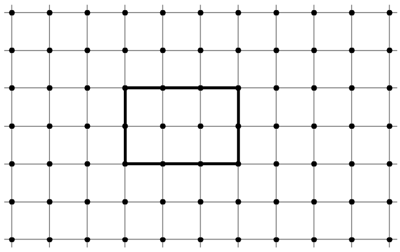
Zapoznaj się z poniższymi informacjami, a następnie rozwiąż zadania.

Na papierze kratkowanym wyróżnijmy punkty przecięcia się prostych wyznaczających sieć. Punkty te będziemy nazywać punktami sieciowymi. Przyjmijmy, że najmniejszy kwadrat, którego wierzchołki są punktami sieciowymi ma pole równe $1\,\mathrm{j}^2$ (zob. rysunek 1).

Rozważmy prostokąt o bokach długości $2\,\mathrm{j}$ oraz $3\,\mathrm{j}$, którego wierzchołki są punktami sieci (zob. rysunek 2). Pole prostokąta jest równe $2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{j}^2$. Zauważmy, że prostokąt ten zawiera w swoim wnętrzu 2 punkty sieciowe, zaś na brzegu prostokąta znajduje się 10 punktów sieci.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

W roku 1899 George Pick sformułował i udowodnił zależność pomiędzy polem dowolnego wielokąta, którego wierzchołki leżą w punktach sieci, oraz liczbą punktów sieci leżącą na brzegu i wewnątrz wielokąta. Mamy

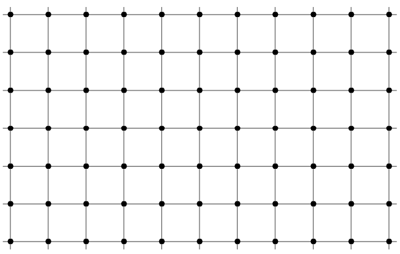
$$P = \frac{b}{2} + i - 1,$$

gdzie
P oznacza pole wielokąta,
b oznacza liczbę punktów sieci leżących na brzegu wielokąta,
i oznacza liczbę punktów sieci leżących wewnątrz wielokąta.

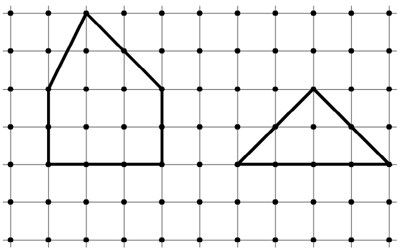
Dla naszego prostokąta mamy $b = 10$ oraz $i = 2$, a więc

$$P = \tfrac{10}{2} + 2 - 1 = 5 + 2 - 1 = 6\,\mathrm{j}^2 \text{ (zob. rysunek 2).}$$

Zadanie 1. Narysuj dowolny prostokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci. Wyznacz liczbę punktów sieci zawartych we wnętrzu prostokąta. Wyznacz liczbę punktów sieci leżących na brzegu prostokąta. Wyznacz pole prostokąta.



Zadanie 2. Oblicz, korzystając z wzoru Picka, pola wielokątów z rysunku.

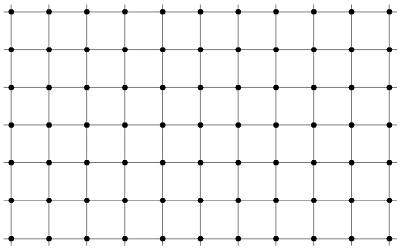


Zadanie 3. Wyznacz pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci i dla którego liczba punktów sieci leżących na brzegu wielokąta jest równa 10 oraz liczba punktów sieci leżących wewnątrz wielokąta jest równa 6.

Zadanie 4. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedz **tak** albo **nie**. Swoją odpowiedź **uzasadnij**.

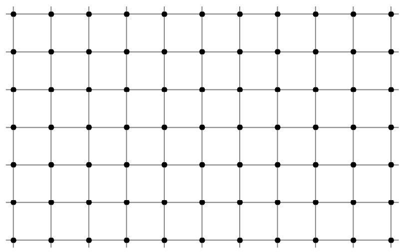
- Pole dowolnego wielokąta, którego wierzchołki znajdują są w punktach sieci, jest liczbą wymierną.

- Każdy czworokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, jest prostokątem.



- Podwojone pole dowolnego wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci jest liczbą naturalną.

Zadanie 5. Uzasadnij prawdziwość wzoru Picka dla dowolnego prostokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, a boki zawierają się w prostych wyznaczających sieć.



Jak wspomniano wyżej, kwestionariusz badań składał się z pięciu zadań matematycznych. Co bardzo istotnie, poprzedzony został krótkim tekstem, w którym zdefiniowano nowe dla uczniów pojęcia punktów sieciowych oraz podano treść twierdzenia Picka, mówiącego o zależności pomiędzy polem dowolnego wielokąta, którego wierzchołki leżą w punktach sieci a liczbą punktów sieci leżących na brzegu i wewnątrz tego wielokąta. Informacje tu zawarte należało wykorzystać podczas pracy nad zadaniami kwestionariusza badań.

W zadaniu 1 należało narysować prostokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieciowych, i wyznaczyć liczbę punktów sieci leżących na brzegu i wewnątrz prostokąta oraz obliczyć jego pole. Tak skonstruowane zadanie pozwoliło nam podczas analizy rozwiązań formułować hipotezy dotyczące zarówno zrozumienia treści definicji i twierdzenia zaprezentowanego w tekście matematycznym poprzedzającym zadanie 1, jak również hipotezy dotyczące umiejętności i gotowości wykorzystania podczas pracy nad zadaniem poznanego twierdzenia matematycznego.

Zadania 2 oraz 3 dotyczyły wyznaczania (ze wzoru Picka) pól wielokątów sieciowych. Przy czym w zadaniu 2 zamieszczono na sieci kwadratowej szkice stosownych wielokątów, zaś w zadaniu 3 podano tylko informacje dotyczące liczby punktów sieci leżących na brzegu i wewnątrz wielokąta.

W zadaniu 4 zawarto trzy stwierdzenia, które należało ocenić, przypisując zdaniom wartość logiczną prawdy lub fałszu. Należało też podać stosowne uzasadnienie odpowiedzi. Stwierdzenia dotyczyły możliwości zbudowania na sieci kwadratowej czworokąta nie będącego prostokątem oraz wymierności pola dowolnego wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci.

W zadaniu 5 należało przedstawić dowód twierdzenia Picka dla dowolnego prostokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, a boki zawierają się w prostych wyznaczających sieć.

W zadaniu 4 należało skonstruować stosowne kontrprzykłady albo przeprowadzić ścisłe dedukcyjne rozumowania matematyczne (dowód twierdzenia), podobnie jak to miało mieć miejsce w przypadku zadania 5.

1.3. Omówienie wyników badań

Na podstawie analizy rozwiązań zadań można stwierdzić, że wszyscy uczniowie, szkicując (na sieci kwadratowej) wielokąty, dbali o to, aby wierzchołki figur znajdowały się w punktach sieciowych. Jednocześnie ujawniła się tendencja badanych do szkicowania figur geometrycznych w położeniach „uprzywilejowanych", tj. szkicowania prostokątów, których boki są zawarte w prostych wyznaczających sieć oraz np. trapezów, dla których podstawy zawierają się w prostych wyznaczających sieć.

W 45 rozwiązaniach zadania pierwszego (18 uczniów klasy o profilu ogólnym oraz 27 uczniów klasy o profilu matematycznym[1]) poprawnie wyznaczono liczby punktów sieci zawartych we wnętrzu i na brzegu prostokąta oraz pole prostokąta ze wzoru Picka. Część badanych (5 osób z KO oraz 1 osoba z KM) określiła stosowne liczby punktów sieci, o których mowa w treści zadania, a następnie wyznaczyła pole prostokąta w sposób „standardowy". Osoby te wymnażały więc długości prostopadłych boków prostokąta. Dwie osoby (jedna z KO i jedna z KM) wyznaczyły pole prostokąta dwiema wspomnianymi metodami. Ponadto po dwie osoby z każdej z klas podały niepełne rozwiązanie zadania. Osoby te wyznaczyły tylko liczby punktów sieci zawarte we wnętrzu i na brzegu figury, nie podejmując próby wyznaczenia pola prostokąta.

Podsumowując, można stwierdzić, że wszyscy badani potrafili naszkicować wielokąt, którego wierzchołki są punktami sieci, a większość badanych potrafiła dla wskazanego przez siebie prostokąta podać liczbę punktów sieci leżących na brzegu i wewnątrz tej figury. Wielu badanych wykorzystało pozyskane przez siebie dane do obliczenia pola prostokąta. Wśród badanych znalazły się też osoby, które wyznaczając poprawnie stosowne liczby punktów sieci nie, posłużyły się tymi danymi do obliczenia pola prostokąta. Może to świadczyć o braku gotowości tych uczniów do stosowania nowopoznanego twierdzenia, bądź też o niezrozumieniu jego istoty.

Analiza prac pozwala stwierdzić, że uczniowie nie mieli większych trudności z rozwiązaniem drugiego oraz trzeciego zadania. Wszyscy badani podjęli pracę nad zadaniem drugim. Zadania trzeciego nie rozwiązywały tylko 4 osoby z KO. Pole pięciokąta z zadania 2 poprawnie wyznaczało 28 uczniów KM oraz 24 uczniów KO, zaś pole trójkąta 31 uczniów klasy KM oraz 24 uczniów KO. Przy czym pola trójkąta oraz pięciokąta były w większości przypadków wyznaczane za pomocą wzoru Picka. Pojawiły się również rozwiązania, w których pola wyznaczano w sposób „standardowy" (pole trójkąta obliczano ze wzoru $P = \frac{1}{2}a \cdot h$, gdzie a – długość podstawy oraz h – długość wysokości prostopadłej do prostej zawierającej bok a trójkąta; pole pięciokąta obliczano jako sumę pól trójkąta oraz prostokąta). Takie rozwiązania dla trójkąta przedstawiło 4 uczniów KO oraz 1 uczeń KM, dla pięciokąta – po jednej osobie z obu klas.

Osoby, które pracując nad zadaniem drugim, nie uzyskały poprawnego rozwiązania, popełniły błędy podczas bądź wyznaczania liczby punktów wewnętrznych, bądź brzegowych figur geometrycznych. W większości przypadków były to błędy rachunkowe. Warto tu wspomnieć o jednej pracy ucznia KM. Osoba ta podzieliła pięciokąt na dwie figury geometryczne (trójkąt oraz prostokąt) i podczas wyznaczania liczby punktów brzegowych pięciokąta „doliczyła" do punktów brzegowych dwa punkty znajdujące się na odcinku stanowiącym wspólny brzeg nowopowstałego trójkąta oraz kwadratu.

[1] W dalszej części stosujemy skrót KO na oznaczenie uczniów klasy o profilu ogólnym oraz KM na oznaczenie uczniów klasy o profilu matematycznym.

Wszyscy uczniowie KM wyznaczyli poprawnie pole wielokąta, dla którego liczba punktów sieci leżących na brzegu i wewnątrz wielokąta jest znana (zadanie 3). Omawiane zadanie rozwiązało również bezbłędnie 20 uczniów KO. Dwie osoby z KO podały jako rozwiązanie wyniki liczbowe: $13,5\ j^2$ oraz 6. Uczniowie ci nie podali przy tym żadnego uzasadnienia swoich odpowiedzi. Można sformułować ostrożną hipotezę, że 4 osoby, które nie podjęły próby rozwiązania zadania uważały, że dane zawarte w jego treści są niewystarczające do rozwiązania bądź nie zrozumiały istoty (zależności między założeniem i tezą twierdzenia) twierdzenia Picka. Może świadczyć o tym fakt, iż osoby te, wyznaczając w zadaniu 2 pola wielokątów, posługiwały się „standardowymi" wzorami, a nie twierdzeniem Picka.

Wartości logicznej zdania: *Pole dowolnego wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, jest liczbą wymierną*, nie oceniło kilkoro uczniów. Było to 6 osób z KO oraz 3 uczniów z KM. Ponadto 3 osoby z KM oraz 2 osoby z KO uznały zdanie za fałszywe. Badani ci nie podali uzasadnienia swojej odpowiedzi. Pozostali uczniowie uznali zdanie za prawdziwe. Jednocześnie siedmioro uczniów z KM oraz czworo uczniów z KO, którzy uznali zdanie za prawdziwe, podjęli próbę uzasadnienia swojej decyzji.

Oto wybrane wypowiedzi uczniów.

- *zgodnie ze wzorem,*
- *bo b i i są zawsze liczbami naturalnymi,*
- *bo do wzoru Picka podstawiamy tylko liczby całkowite,*
- *bo pole jest zawsze liczbą wymierną,*
- *bo pole jest zawsze liczbą naturalną.*

Można sformułować ostrożną hipotezę, iż pierwsze trzy wypowiedzi świadczą o tym, iż badani, uzasadniając prawdziwość zdania, odwołują się do struktury zależności pomiędzy liczbą punktów wewnętrznych i brzegowych figury zbudowanej na sieci kwadratowej, a jej polem i na tej podstawie formułują sądy odnośnie do wymierności pola wielokąta sieciowego. Pozostałe dwie odpowiedzi mogą świadczyć o błędnych przekonaniach badanych dotyczących wartości pola figur geometrycznych.

Wielu badanych (13 osób z KO oraz 25 z KM) poprawnie oceniło wartość logiczną zdania 2 oraz podało poprawne uzasadnienie swojego sądu. Badani ci skonstruowali stosowny kontrprzykład, tj. opisali bądź naszkicowali czworokąt niebędący prostokątem, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci. W wielu pracach szkicowano trapezy równoramienne oraz równoległoboki, których dwa boki zawarte są w prostych wyznaczających sieć.

Wśród badanych znalazły się też osoby, które uznały zdanie za prawdziwe. Podawały one następujące uzasadnienia:

- *Tak jest zawsze, narysowałem przykład,*
- *Tak bo czworokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci może być tylko prostokątem albo kwadratem,*

- *Tak bo czworokąt tworzy się z jednego lub więcej kwadratów, gdy się je połączy to otrzymamy prostokąt,*
- *Tak bo na sieci można narysować co najwyżej kwadrat.*

Pierwsza z cytowanych wypowiedzi świadczy o elementarnych brakach wiedzy z zakresu logiki matematycznej, a w tym o podstawowych trudnościach z rozumieniem elementów metody matematycznej. Można przypuszczać, że uczniowie, którzy sformułowali pozostałe cytowane wypowiedzi, budując wielokąty, nie są w stanie „oderwać się" od linii sieci, nie dostrzegają, iż boki wielokątów, których wierzchołki znajdują się w punktach sieci, nie muszą leżeć na prostych wyznaczających sieć.

Uczniowie, którzy uznali zdanie za fałszywe – jak wspomniano wcześniej – konstruowali stosowne kontrprzykłady. Były też dwie takie osoby, które napisały:

- *Nie bo na sieci da się zbudować inne figury, np. trójkąt, pięciokąt,*
- *Na sieci da się zbudować inną figurę niż czworokąt (trójkąt).*

Wypowiedzi te świadczą, naszym zdaniem, o brakach wiedzy z zakresu logiki, a w szczególności o niezauważeniu faktu, iż w twierdzeniu mowa jest o czworokącie. Pominięto więc tu jedno, bardzo ważne założenie.

Na koniec warto zauważyć, że kilkoro badanych nie oceniło wartości logicznej zdania – byli to 4 uczniowie KO oraz 1 osoba z KM.

Wartości logicznej zdania: *Podwojone pole dowolnego wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, jest liczbą naturalną,* nie oceniło 6 uczniów KO. Pozostałych 20 uczniów uznało zdanie za prawdziwe, przy czym 3 osoby nie podały żadnego uzasadnienia swojej wypowiedzi. Tylko dwie osoby poprawnie uzasadniły prawdziwość zdania. Jedna z osób napisała: *Tak ponieważ ilość punktów jest zawsze liczbą naturalną. Później dzielimy przez 2 (np.* $\frac{6}{2} = 3$ *lub* $\frac{9}{2} = 4.5$*) w przypadku nieparzystej liczby punktów powstaje liczba z ułamkiem „*$\frac{1}{2}$*" lecz gdy pomnożymy ją przez 2 staje się znów naturalna.*

Pozostałe osoby z KO, pomimo iż poprawnie oceniły wartość logiczną zdania, w sposób błędny uzasadniały swoje tezy. Badani popełniali błędy polegające na przypisywaniu polu figury następujących własności:

- Pole dowolnej figury geometrycznej jest liczbą naturalną: *każde pole jest liczbą naturalną, po pomnożeniu przez 2 też,*
- Pole dowolnej figury geometrycznej jest liczbą dodatnią: *pole nie może być ujemne bądź równe zero,*
- Pole dowolnej figury zbudowanej na sieci kwadratowej jest liczbą całkowitą: *pole figury na sieci ma wartość liczby całkowitej.*

W badaniach ujawniły się również braki w wiadomościach i umiejętnościach uczniów z zakresu logiki. Dwaj badani rozumowali w sposób następujący: zdanie jest prawdziwe, ponieważ pole jest zawsze liczbą dodatnią (nieujemną), zaś liczby naturalne są liczbami większymi od zera. Oto przykład takiego rozumowania. *Ok. gdyż wynik pola musi być zawsze dodatni a liczby naturalne zaczynają się od zera i są do końca więc wykluczone są liczby ujemne.*

Uczniowie KM lepiej niż uczniowie KO poradzili sobie z oceną wartości logicznej zdania trzeciego. Jedynie dwóch uczniów nie podjęło pracy nad tym zadaniem. Trzy osoby podały tylko samą odpowiedź (twierdzącą), nie opatrując jej żadnym komentarzem. W pracy nad omawianym zadaniem 19 uczniów uzasadniało prawdziwość zdania na podstawie wzoru Picka. Uczniowie zapisywali wzór Picka i na podstawie jego struktury orzekali o prawdziwości zdania logicznego. Jeden z uczniów napisał: *Prawda* [zdanie jest prawdziwe], *bo* $P = \frac{b}{2} + i - 1$ *oraz* $b,\ i \in \mathbf{N}$*, to* $P \in \mathbf{W}$.

Jednocześnie dwóch uczniów dla uzasadnienia prawdziwości zdania skonstruowało stosowne przykłady. Uczniowie ci orzekali więc o prawdziwości zdania na podstawie sprawdzenia jego prawdziwości w jednym szczególnym przypadku.

Analiza prac ujawniła także błędne przekonania dotyczące wartości pola dowolnego wielokąta. Dwaj uczniowie stwierdzili, że pole dowolnego wielokąta jest liczbą naturalną. Jeden z nich napisał: *Pole jest zawsze liczbą naturalną, po pomnożeniu przez 2 też.*

Analiza rozwiązań zadania piątego pozwala stwierdzić, że po 6 osób z każdej z klas nie podjęło próby jego rozwiązania. Ponadto przeważająca część uczniów pracujących nad zadaniem przedstawiła rozumowanie matematyczne, w którym uzasadniano prawdziwość twierdzenia tylko w jednym przypadku szczególnym. Uczniowie ci szkicowali na sieci prostokąty, których wierzchołki znajdują się w punktach sieci, a boki są zawarte w prostych wyznaczających sieć. Tym samym badani ustalali konkretne długości boków prostokąta, a następnie obliczali pole prostokąta dwiema metodami, z zastosowaniem „standardowego” wzoru (wymnażając przez siebie długości prostopadłych boków prostokąta) oraz z zastosowaniem wzoru Picka. Na podstawie równości dwóch wyników orzekano o prawdziwości wzoru Picka dla dowolnego prostokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci. Rozumowanie opisane powyżej przedstawiło 20 uczniów KO oraz 18 uczniów KM.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że świadomość elementów metody matematycznej jest większa u uczniów KM. W klasie tej, chociaż w przeważającej części prac przedstawiono rozwiązanie opisane powyżej, kilkoro uczniów podjęło próbę udowodnienia wzoru dla dowolnego prostokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, a długości boków wynoszą a oraz b, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Trzy osoby wyznaczyły liczbę punktów brzegowych prostokąta, tzn. zapisały, iż liczba ta wynosi $2a + 2b$, a następnie podstawiły odpowiednią wartość do formuły Picka. Niestety osoby te nie dokończyły pracy nad zadaniem.

Jednocześnie jedna osoba przedstawiła następujące rozumowanie:

$$P = \frac{b}{2} + i - 1 \qquad / \cdot 0$$

$$0 = 0$$

$L = P$. Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Cytowane rozumowanie może świadczyć o elementarnych brakach w wiadomościach na temat rozwiązywania równań, w tym przekształcania równań w sposób równoważny.

W pozostałych pracach wyróżniono tylko założenia i tezę twierdzenia oraz naszkicowano prostokąt o bokach długości a oraz b.

Podsumowując warto podkreślić, że żadna z badanych osób nie przedstawiła pełnego uzasadnienia prawdziwości wzoru Picka dla dowolnego prostokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci, a boki znajdują się w prostych wyznaczających sieć. Można więc sformułować ostrożną hipotezę, iż utworzenie nowego – nieznanego badanym – dowodu odnoszącego się do twierdzenia Picka znajduje się poza sferą najbliższych możliwości uczniów uczęszczających do ostatniej klasy liceum ogólnokształcącego.

1.4. Podsumowanie wyników badań

Badani wykazali się znajomością i umiejętnością wykorzystania podczas pracy nad zadaniami „standardowych" twierdzeń dotyczących figur płaskich, a także umiejętnością wykorzystania wzoru Picka do obliczania pól wielokątów o wierzchołkach w punktach sieciowych. Można stwierdzić, że badani byli w stanie przenieść przedstawioną (w tekście poprzedzającym zadania kwestionariusza badań) metodę rozumowania do rozwiązania analogicznych zadań. Warto tu podkreślić, iż większość badanych wyznaczała poprawnie liczby punktów wewnętrznych i brzegowych wielokątów zbudowanych na sieci kwadratowej. Uzyskane wyniki świadczą więc o tym, że większość uczniów potrafi czytać i analizować proste teksty matematyczne oraz że potrafi rozwiązać zadania, w których należy posłużyć się informacjami zawartymi w tekście matematycznym. Wyniki badań wskazują, iż wielu uczniów potrafi powielić przedstawiony schemat rozwiązania zadania, a jednocześnie ma duże trudności związane z tworzeniem nowych rozwiązań zadań wymagających „przeorganizowania" informacji zawartych w tekście wprowadzającym. Trudności te dotyczą głównie przeprowadzania rozumowań dedukcyjnych, tj. dowodzenia twierdzeń z wykorzystaniem nowo poznanych definicji i twierdzeń.

Jednocześnie badania ujawniły duże trudności uczniów związane z doborem właściwych metod uzasadniania fałszywości zdań matematycznych (konstrukcja kontrprzykładów) oraz trudności z uzasadnianiem prawdziwości twierdzeń (dowodzenie twierdzeń). Problemy tu sygnalizowane korespondują z obserwacjami dotyczącymi trudności uczniów w zakresie przeprowadzania rozumowań matematycznych (por. Nowecki, 1975; Nowecki, 1977; Pieprzyk, Żeromska, 2009; Major, Major, 2009c).

Uzyskane wyniki stanowią, naszym zdaniem, potwierdzenie hipotezy, iż tematyka dotycząca twierdzenia Picka może być proponowana uczniom szkół ponadgimnazjalnych, zadania te są dostępne dla większości badanych licealistów.

2. Refleksje dotyczące twierdzenia Picka i jego uogólnień

W niniejszej części artykułu proponujemy problemy generowane przez twierdzenie Picka oraz jego uogólnienia. Punktem wyjścia do prowadzenia rozważań są pewne pytania matematyczne, które w naturalny sposób prowadzą do formułowania hipotez, a następnie do ich weryfikowania. Rozważania skupione wokół twierdzenia Picka i jego uogólnień pozwalają w sposób naturalny łączyć szkolne działy matematyki, takie jak: analiza matematyczna, algebra oraz geometria. Pracujący nad przedstawionymi tu zagadnieniami mają okazję do podejmowania twórczej matematycznej aktywności, w tym formułowania i weryfikowania hipotez, poszukiwania i redagowania treści dowodów, poszukiwania przykładów i kontrprzykładów. Można więc stwierdzić, że osoby pracujące nad prezentowanymi tu zadaniami mają okazję do podejmowania i prezentowania najwyższego poziomu funkcjonowania poznawczego, tzw. reprezentacja badawcza – twórcza (por. Dąbrowski, Żytko, 2008).

Prezentowane dalej zagadnienia mogą być wykorzystane, w całości lub we fragmentach, w pracy z uczniami szkół ponadgimnazjalych lub studentami studiów nauczycielskich kierunków matematycznych.

Rozważmy *sieć kwadratową* powstałą w wyniku następującej konstrukcji.

Na płaszczyźnie kartezjańskiej rozważmy proste o równaniach $x = a$ i $y = b$, gdzie a oraz b przyjmują wartości ze zbioru liczb całkowitych. Na płaszczyźnie wyróżnijmy punkty przecięcia tych prostych, które będziemy nazywać *punktami sieciowymi*. Kwadrat, który ma dokładnie 4 punkty sieciowe brzegowe i nie ma punktów wewnętrznych sieciowych, nazwijmy *kwadratem jednostkowym*. Wszystkie punkty sieciowe tworzą sieć kwadratową.

Pole wielokąta (wymierzane kwadratami jednostkowymi), którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci kwadratowej, wyraża się zależnością

$$P = \frac{b}{2} + i - 1,$$

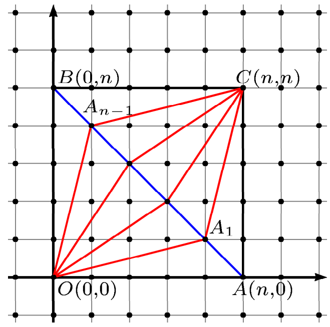
gdzie i stanowi liczbę punktów sieciowych leżących we wnętrzu wielokąta, zaś b jest liczbą punktów sieciowych leżących na brzegu wielokąta.

W pracy (Major, Major, 2009b) zaprezentowano metodę odkrywania powyższego wzoru na pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci kwadratowej. Dowód twierdzenia, znanego w literaturze pod nazwą *Twierdzenia Picka* (zob. Coxeter, 1967) dla sieci kwadratowej można znaleźć np. w pracach (Dąbrowski, 1989; Kołodziejczyk, 1989).

Przedstawimy trzy przykładowe problemy, które warto rozważyć na sieci kwadratowej w kontekście twierdzenia Picka.

Problem 1. Rozważmy sieć kwadratową, wyróżnijmy na niej punkt O (początek układu współrzędnych), proste tworzące sieć kwadratową przechodzące przez ten punkt przyjmijmy jako osie odciętych oraz rzędnych i jako jednostkę przyjmijmy długość boku kwadratu jednostkowego.

W tej sytuacji każdy punkt sieci można opisać za pomocą dwu współrzędnych o wartościach całkowitych. Rozważmy kwadrat o wierzchołkach $O(0,0)$, $A(n,0)$, $B(0,n)$, $C(n,n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}_1$. Do odcinka otwartego AB, zawierającego się w prostej o równaniu $x + y = n$, należy $n - 1$ punktów sieciowych. Oznaczmy te punkty przez A_1, A_2, ..., A_{n-1}. Punkty te mają współrzędne $(i, n - i)$ dla $i = 1, ..., n - 1$. Rozważmy *małe czworokąty* OA_1CA, OA_2CA_1,..., $OBCA_{n-1}$ (por. rysunek 3).



Rysunek 3.

Oczywistym jest, że dwa *małe czworokąty* OA_1CA oraz $OBCA_{n-1}$ nie zawierają żadnego punktu wewnętrznego. Wykażemy, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to wszystkie pozostałe *małe czworokąty*, tj. czworokąty OA_2CA_1, OA_3CA_2, $\ldots$, $OA_{n-1}CA_{n-2}$ zawierają taką samą liczbę punktów sieciowych wewnętrznych.

Istotnie, jeśli n jest liczbą pierwszą, to i oraz $n-i$ są liczbami względnie pierwszymi. Oznacza to, że ułamek $\frac{i}{n-i}$ jest nieskracalny, a więc na brzegu każdego *małego czworokąta* znajdują się dokładnie cztery punkty sieciowe. Zauważmy ponadto, że długości odcinków AA_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}B$ wynoszą $\frac{|AB|}{n}$. Ponadto trójkąty OA_1A_2, OA_2A_3, $\ldots$, $OA_{n-2}A_{n-1}$, CA_1A_2, CA_2A_3, $\ldots$, $CA_{n-2}A_{n-1}$ mają równe wysokości, z czego wynika, że *małe czworokąty* mają takie same pola. Z twierdzenia Picka otrzymujemy zatem natychmiast wniosek, że wszystkie *małe czworokąty* mają taką samą liczbę punktów sieciowych wewnętrznych.

Problem 2. Rozważmy kwadrat o boku długości $n \in \mathbb{N}_1$, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieci i którego bok leży na jednej z prostych tworzących sieć kwadratową. Wykażemy, że do tego kwadratu należy $(n+1)^2$ punktów sieciowych.

Zauważmy, że wszystkie boki kwadratu, o którym mowa w problemie 2, leżą na prostych tworzących sieć kwadratową. Liczba punktów sieciowych znajdujących się na brzegu kwadratu wynosi zatem $4n$, zaś liczba punktów sieciowych należących do wnętrza kwadratu równa jest $(n-1)^2$. Oznacza to, że liczba punktów sieciowych, które należą do kwadratu, wynosi $4n+(n-1)^2$, czyli $(n+1)^2$.

Problem 3. Wykażemy, że kwadrat o boku długości $n \in \mathbb{N}_1$ pokrywa nie więcej niż $(n+1)^2$ punktów sieciowych sieci kwadratowej.

Z rozwiązania problemu 2 wynika, że liczba punktów sieciowych, którą pokrywa kwadrat o wierzchołkach w punktach sieciowych, wynosi $(n+1)^2$. W ogólnym przypadku brzeg wielokąta może zawierać nie więcej niż $4n$ punktów sieciowych. Z twierdzenia Picka wynika zatem, że $n^2 = i + \frac{b}{2} - 1$.

Zauważmy, że

$$i + b = i + \frac{b}{2} - 1 + \frac{b}{2} + 1 \leqslant n^2 + \frac{4n}{2} + 1 = (n+1)^2.$$

Liczba punktów sieciowych, którą pokrywa kwadrat jest zatem mniejsza lub równa $(n+1)^2$.

Sieć kwadratowa zdefiniowana na stronie 128 (por. też Major, Major, 2009b) pokrywa całą płaszczyznę, ale nie jest to jedyna sieć o tej własności. Rozważaną sieć nazwijmy *siecią zbudowaną na bazie kwadratu* lub *generowaną przez kwadrat.*

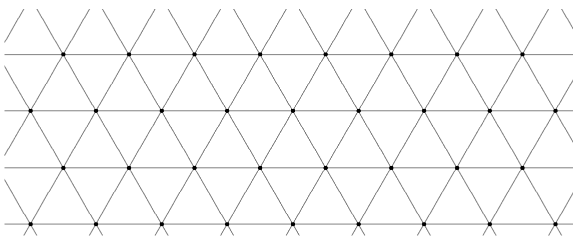
Zauważmy, że jedynymi wielokątami foremnymi pokrywającymi całkowicie płaszczyznę są: kwadrat, trójkąt równoboczny oraz sześciokąt foremny (zob. np. Steinhaus, 1954). Dla sieci zbudowanych na bazie tych wielokątów można zatem poszukiwać zależności pomiędzy polem wielokąta $P(w)$, a liczbą punktów sieciowych należących do wnętrza i oraz do brzegu b wielokąta w. Dla sieci kwadratowej taką zależność ujmuje wspomniane twierdzenie Picka.

Problem 4. Rozważmy *sieć trójkątną* powstałą w wyniku następującej konstrukcji.

Na płaszczyźnie kartezjańskiej rozważmy proste o równaniach $y = -\sqrt{3}x + a_1\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + a_2\sqrt{3}$ i $y = a_3\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdzie a_1, a_2 oraz a_3 przyjmują wartości ze zbioru liczb całkowitych. Na płaszczyźnie wyróżnijmy punkty przecięcia tych prostych, które będziemy nazywać *punktami sieciowymi.* Trójkąt równoboczny, który ma dokładnie 3 punkty sieciowe brzegowe i nie ma punktów wewnętrznych sieciowych, nazwijmy *trójkątem jednostkowym.* Wszystkie punkty sieciowe tworzą *sieć trójkątną.*

Rozważmy *sieć trójkątną* (por. rysunek 4) (zbudowaną na bazie trójkątów równobocznych). Przyjmijmy, że najmniejszy równoboczny trójkąt sieci ma pole równe 1. Pojawia się tu pytanie: czy i ewentualnie w jaki sposób można obliczyć pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieciowych sieci trójkątnej, wykorzystując informacje o liczbie punktów sieciowych należących do wnętrza oraz brzegu figury?

W pracy (Major, Major, 2009b) zaprezentowano metodę poszukiwania wzoru na pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach sieciowych sieci kwadratowej. Zaproponujemy, w jaki sposób tę metodę można zmodyfikować do rozwiązania rozważanego problemu (por. też Major, Major, 2009a).



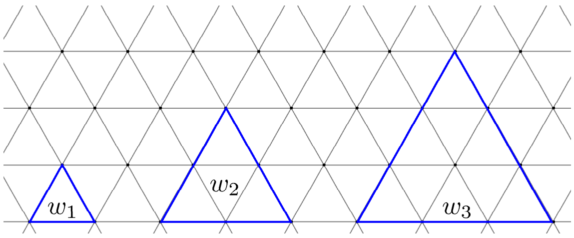
Rysunek 4.

Można tu sformułować hipotezę, podobnie jak to może mieć miejsce dla sieci kwadratowej, iż pole wielokąta $P(w)$ o wierzchołkach w punktach sieciowych sieci trójkątnej (wymierzane jednostkowymi trójkątami równobocznymi) wyraża się zależnością

$$P(w) = \alpha i + \beta b + \gamma,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, zaś i stanowi liczbę punktów sieciowych leżących we wnętrzu wielokąta w, zaś b jest liczbą punktów sieciowych leżących na brzegu wielokąta w.

Jeśli przyjmiemy, że nasza hipoteza jest prawdziwa, to w kolejnym etapie można wyznaczyć (o ile istnieją) wartości stałych α, β, γ. W tym celu wystarczy rozważyć trzy różne trójkąty, których wierzchołki znajdują się w punktach sieci trójkątnej (por. rysunek 5).



Rysunek 5.

Zauważmy, że $P(w_1) = 1$, $P(w_2) = 4$ i $P(w_3) = 9$. Mamy

$$\begin{cases} 1 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 3 + \gamma, \\ 4 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 6 + \gamma, \\ 9 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 9 + \gamma, \end{cases}$$

a więc

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2.$$

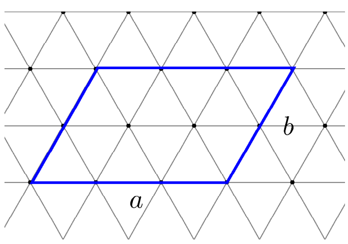
Nasza hipoteza przyjmuje więc postać

$$P(w) = 2i + b - 2. \tag{1}$$

W pracy (Kordos, 2008) został sformułowany warunek (1), rozstrzygnięcie jego prawdziwości autor pozostawia jako problem otwarty.

Poniżej przedstawimy ideę dowodu odkrytej hipotezy.
Niech $L(w) \colon = 2i + b - 2$, gdzie i jest liczbą punktów wewnętrznych, zaś b – liczbą punktów brzegowych dowolnego wielokąta sieciowego w.

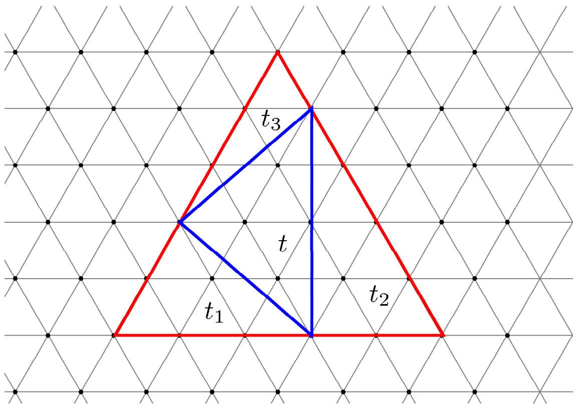
1. Na wstępie wykażemy prawdziwość wzoru (1) dla równoległoboku w, którego boki (o długościach a i b) zawarte są w prostych tworzących sieć trójkątną (rysunek 6). Pole równoległoboku wyrażone liczbą trójkątów jednostkowych wynosi $2ab$.



Rysunek 6.

Mamy ponadto $L(w) = 2(a-1)(b-1) + 2(a+b) - 2 = 2ab$. Zatem $P(w) = L(w)$.

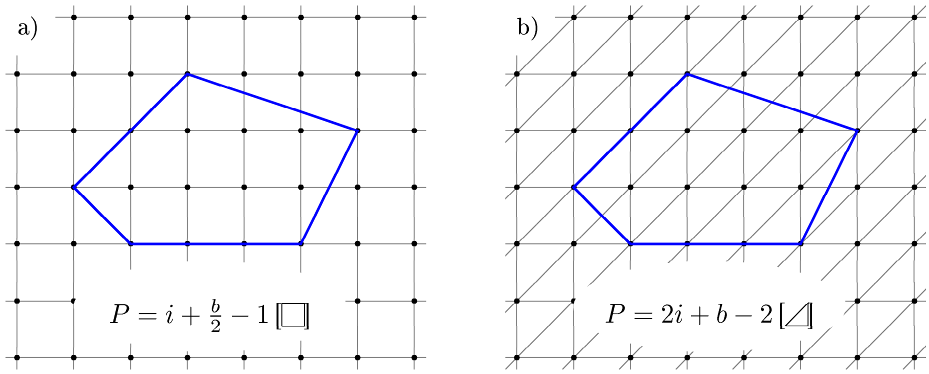
2. Zauważmy, że jeśli wielokąt w zbudowany na sieci trójkątnej jest sumą mnogościową wielokątów w_1 i w_2, dla których do zbioru $w_1 \cap w_2$ należą co najwyżej punkty brzegowe, to $P(w) = P(w_1) + P(w_2)$ oraz $L(w) = L(w_1) + L(w_2)$.
3. Każdy wielokąt w o wierzchołkach będących punktami sieci trójkątnej można podzielić na trójkąty, których wierzchołki leżą w punktach sieci.
4. Na dowolnym trójkącie t o wierzchołkach w punktach sieci można „opisać” trójkąt T, którego boki zawarte są w prostych tworzących sieć trójkątną, a wierzchołki są punktami sieci. Wtedy trójkąt $T = t \cup t_1 \cup t_2 \cup t_3$ (zob. rysunek 7.
5. Każdy z trójkątów t_1, t_2, t_3 (dla których dwa boki zawarte są w prostych wyznaczającej sieć), można uzupełnić do równoległoboku, którego boki zawarte są w prostych tworzących sieć trójkątną.



Rysunek 7.

W dalszej części pracy zaproponujemy inny sposób odkrycia wzoru Picka dla sieci trójkątnej.

Rozważmy dowolny wielokąt o wierzchołkach w punktach sieci kwadratowej. Pole P tego wielokąta jest równe $(i + \frac{b}{2} - 1)\mathrm{j}^2$, gdzie j^2 jest polem kwadratu jednostkowego sieci (zob. rysunek 8a)). Przez punkty sieciowe poprowadźmy proste nachylone pod kątem 45° do prostych $y = a$, $a \in \mathbb{Z}$, tj. proste o równaniach $y = x + c$, $c \in \mathbb{Z}$. W wyniku tej konstrukcji każdy kwadrat jednostkowy został podzielony na 2 trójkąty równoramienne prostokątne. Sieć kwadratowa została zatem przekształcona w sieć zbudowaną na bazie trójkąta równoramiennego prostokątnego. Tę sieć nazwijmy *siecią generowaną przez trójkąt równoramienny prostokątny.* Zauważmy, że tak powstała sieć ma te same punkty sieciowe, co sieć kwadratowa. Niech k^2 będzie polem połowy kwadratu jednostkowego sieci, a więc polem trójkąta równoramiennego prostokątnego, będącego trójkątem bazowym nowej sieci. Ponieważ $\mathrm{j}^2 = 2\mathrm{k}^2$, więc pole P rozważanego wielokąta jest równe $(2i + b - 2)\mathrm{k}^2$ (zob. rysunek 8b).



Rysunek 8.

Przeprowadzone rozumowanie pozwala stwierdzić, że wzór $P = 2i + b - 2$ na pole wielokąta o wierzchołkach w punktach sieciowych, gdzie i jest liczbą punktów sieciowych wewnętrznych wielokąta, zaś b – liczbą punktów sieciowych leżących na brzegu wielokąta, jest prawdziwy dla *sieci generowanej przez trójkąt równoramienny prostokątny.*

Wykażemy teraz, że jest on też słuszny dla *sieci trójkątnej generowanej przez trójkąt równoboczny.*

W tym celu jeden z punktów sieciowych sieci kwadratowej przyjmijmy jako początek układu współrzędnych, zaś proste prostopadłe przechodzące przez ten punkt określmy jako proste x i y (oś odciętych oraz rzędnych)[2]. Jako jednostkę długości przyjmijmy długość boku kwadratu jednostkowego.

Rozważmy przekształcenie F płaszczyzny w płaszczyznę zadane wzorem

$$F = O_O^{\beta} \circ P_x^k \circ O_O^{\alpha},$$

gdzie

O_O^{α} i O_O^{β} są obrotami wokół punktu O odpowiednio o kąty α oraz β,

P_x^k jest powinowactwem prostokątnym względem osi x o skali k.

Zauważmy, że tak określone przekształcenie jest przekształceniem afinicznym, zachowuje ono zatem równoległość prostych, wypukłość figury, uporządkowanie punktów na prostej, współliniowość punktów oraz stosunek pól figur na płaszczyźnie.

Wskażemy takie wartości α, β oraz k, że sieć generowana przez trójkąt równoramienny prostokątny zostanie przekształcona poprzez przekształcenie F na sieć generowaną przez trójkąt równoboczny.

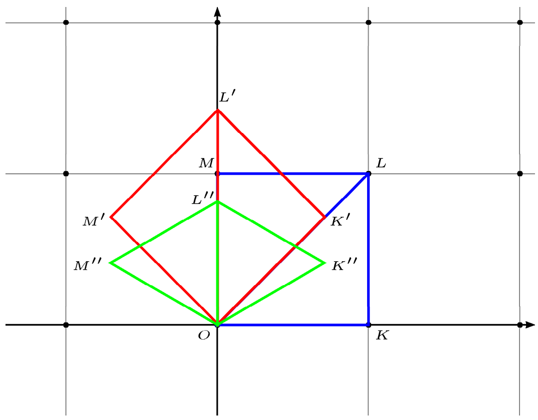
Rozważmy kwadrat $OKLM$ z rysunku 9. Obracając go wokół punktu O o kąt $\frac{\pi}{4}$, otrzymujemy kwadrat $OK'L'M'$. Wyznaczmy taką wartość $k > 0$, aby przekształcając uzyskany kwadrat przez powinowactwo prostokątne względem osi x i skali k, uzyskać romb $OK''L''M''$, o długości boku równej długości jego krótszej przekątnej. Musi zatem być spełniony warunek $|OL''| = |OK''|$. Punkt L''

[2]Możliwe są tu dwie orientacje układu współrzędnych; wybierzmy dodatnią.

ma współrzędne $(0, k\sqrt{2})$, zaś punkt K'' współrzędne $(\frac{\sqrt{2}}{2}, k\frac{\sqrt{2}}{2})$. Korzystając ze wzorów analitycznych na obrót, powinowactwo prostokątne oraz długość odcinka, uzyskujemy równanie

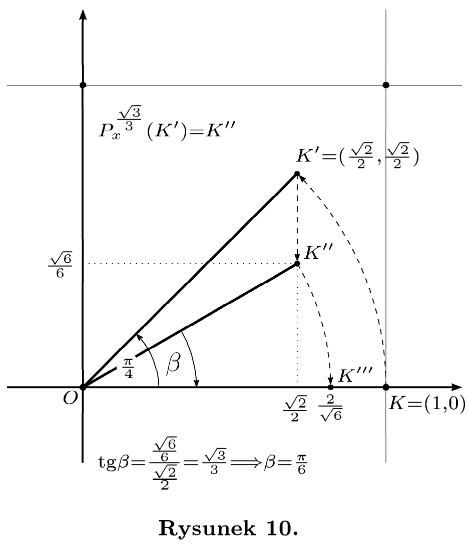
$$k\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k^2},$$

którego dodatnim rozwiązaniem jest $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Szukanym przekształceniem jest zatem powinowactwo prostokątne względem osi x o skali $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



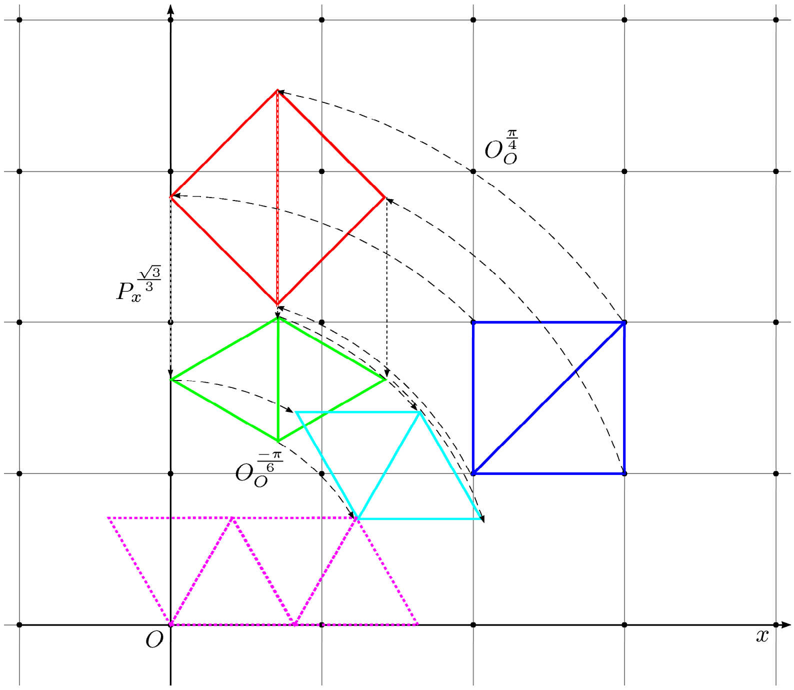
Rysunek 9.

Zauważmy, że obraz punktu K'' w obrocie wokół punktu O o kąt $\beta = -\frac{\pi}{6}$ będzie leżał na osi odciętych (zob. rysunek 10). Oznacza to, że obracając romb $OK''L''M''$ wokół punktu O o kąt $\beta = -\frac{\pi}{6}$, uzyskamy dwa trójkąty równoboczne mające wspólny bok. Każdy z nich generuje sieć trójkątną.



Rysunek 10.

Zauważmy, że przekształcenie $F = O_O^{-\frac{\pi}{6}} \circ P_x^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \circ O_O^{\frac{\pi}{4}}$ przekształca afinicznie sieć kwadratową na sieć trójkątną generowaną przez trójkąty równoboczne (zob. rysunek 11).



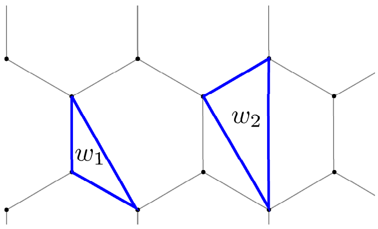
Rysunek 11.

Na koniec rozważań zauważmy, że wzór $P = i+\frac{b}{2}-1$ ($P = 2i+b-2$) jest słuszny dla dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach sieciowych sieci generowanej przez dowolny równoległobok (trójkąt). Wynika to z faktu, że istnieje przekształcenie afiniczne P_a takie, że przekształcenie $P_a \circ F$ przekształca sieć generowaną przez kwadrat jednostkowy (trójkąt będący połową kwadratu jednostkowego) na równoległobok o bokach a, b oraz przekątnej c (trójkąt o bokach a, b oraz c) (por. Bednarczuk, 1978).

Prezentowane tu rozważania, ze względu na ich elementarny charakter, mogą być wykorzystane w procesie kształcenia uczniów szkół ponadgimnajalnych. Nieco inne zagadnienia związane z twierdzeniem Picka zaprezentowano np. w pracach (Iseri, 2008; Funkenbusch, 1974; Grunbaum, Shephard, 1993; Varberg, 1985; Gaskell, Klamkin, Watson, 1976).

Problem 5. Czy można mówić o analogonie wzoru Picka dla sieci sześciokątnej (*sieci generowanej przez sześciokąt foremny*)?

Odpowiedź na pytanie jest negatywna. Istnieją bowiem dwa trójkąty o wierzchołkach w punktach sieci generowanej przez sześciokąt foremny mające różne pola oraz mające po 3 punkty brzegowe i nie mające punktów wewnętrznych (zob. rysunek 12).

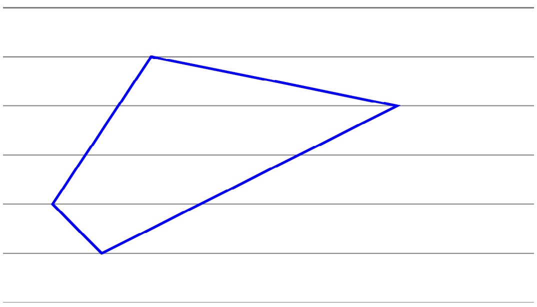


$i = 0,\ b = 3$

$P(w_1) \neq P(w_2)$

Rysunek 12.

Problem 6. Rozważmy płaszczyznę, na której znajduje się niewłaściwy pęk prostych równoległych, dla których odległości pomiędzy każdymi dwiema sąsiednimi prostymi równoległymi wynosi 1, tj., np. pęk prostych o równaniach $y = a$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$. Na tak zbudowanej sieci budujemy wielokąty, których wierzchołki leżą na prostych wyznaczających sieć (por. rysunek 13).



Rysunek 13.

Można sformułować hipotezę, że pole wielokąta $P(w)$, którego wierzchołki leżą na prostych wyznaczających sieć, jest równe sumie długości odcinków[3] zawartych wewnątrz wielokąta w powiększonej o połowę długości odcinków zawartych w brzegu wielokąta w. Czyli

$$P(w) = i + \frac{1}{2}b,$$

gdzie

i – suma długości odcinków zawartych wewnątrz wielokąta w,

b – suma długości odcinków zawartych w brzegu wielokąta w.

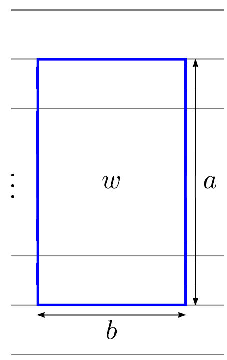
Dowód hipotezy przebiega etapami (por. Gut, 2005). Podamy szkic tego dowodu.

Przez $L(w)$ oznaczmy sumę długości odcinków zawartych wewnątrz wielokąta w powiększoną o połowę długości odcinków zawartych w brzegu tego wielokąta.

[3]Odcinkiem nazywamy figurę geometryczną będącą częścią wspólną wielokąta oraz prostej z pęku.

1. Na wstępie zauważmy, że jeśli wielokąt w jest sumą mnogościową dwóch wielokątów w_1 oraz w_2, dla których do zbioru $w_1 \cap w_2$ należą co najwyżej punkty brzegowe, to $L(w) = L(w_1) + L(w_2)$ oraz $P(w) = P(w_1) + P(w_2)$.

2. Rozważmy prostokąt o długościach boków a oraz b, którego dwa boki leżą na prostych z pęku (rysunek 14).

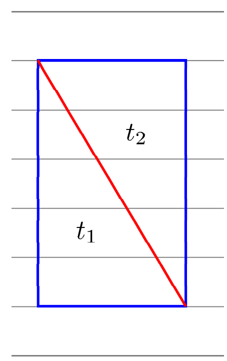


Rysunek 14.

Mamy $P(w) = a \cdot b$ oraz $L(w) = (a-1) \cdot b + \frac{1}{2} \cdot 2b = a \cdot b$. Zatem $P(w) = L(w)$.

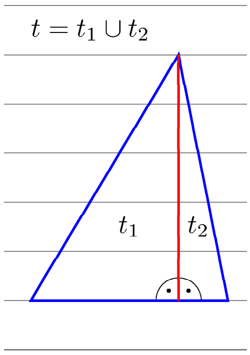
3. Rozważmy trójkąt prostokątny t_1, którego jedna z przyprostokątnych leży na prostej z pęku. Trójkąt t_1 można uzupełnić do prostokąta, którego dwa boki leżą na prostych z pęku (zob. rysunek 15).

   Mamy $P(t_1) = P(t_2)$ oraz $L(t_1) = L(t_2)$. Zatem $P(t_1) = L(t_1)$.

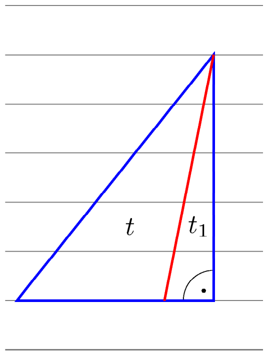


Rysunek 15.

4. Rozważmy trójkąt t, którego jeden bok leży na prostej z pęku (rysunek 16 i 17).



Rysunek 16.

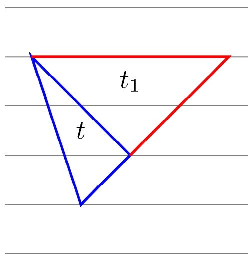


Rysunek 17.

Jeśli $t = t_1 \cup t_2$, to $P(t) = P(t_1) + P(t_2) = L(t_1) + L(t_2) = L(t)$.

Jeśli natomiast $t^* = t \cup t_1$, to $L(t^*) = P(t^*) = P(t) + P(t_1) = P(t) + L(t_1)$ oraz $L(t^*) = L(t) + L(t_1)$, więc $P(t) = L(t)$.

5. Rozważmy trójkąt t, dla którego żaden z boków nie leży na prostej z pęku (rysunek 18).



Rysunek 18.

Wtedy $t^* = t \cup t_1$, a więc $L(t^*) = L(t) + L(t_1) = L(t) + P(t_1)$ i $L(t^*) = P(t^*) = P(t) + P(t_1)$. Jest zatem $P(t) = L(t)$.

6. Dla dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że każdy wielokąt o wierzchołkach leżących na prostych z pęku można podzielić na trójkąty, których wierzchołki leżą na prostych z pęku.

Zauważmy, że sygnalizowane tu zagadnienia dotyczące pól wielokątów budowanych na prostych z pęku niewłaściwego korespondują z pojęciem całki Riemanna.

Zakończenie

Opisane wyżej zagadnienia nie wyczerpują omawianej problematyki. Należy traktować je jako przykładowe do budowania kolejnych własnych zadań i problemów. Ich wartość dydaktyczną upatrujemy w fakcie, iż rozważania prowadzone są na stosunkowo prostym materiale teoretycznym, mogącym być przedłużanym na problemy bardziej zaawansowane matematycznie. Jednocześnie bogactwo pytań i problemów generowanych przez twierdzenie Picka i jego uogólnienia pozwala rozwijać aktywność matematyczną uczących się na różnych szczeblach kształcenia matematycznego.

Literatura

Bednarczuk, J.: 1978, *Urok przekształceń afinicznych*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Coxeter, H.: 1967, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa.

Dąbrowski, M., Żytko, M.: 2008, *Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów, Część II*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa.

Dąbrowski, M.: 1989, Twierdzenie Picka w nauczaniu, *Matematyka* **1**, 19-33.

Funkenbusch, W. W.: 1974, From Euler's formula to Pick's formula using an Edge theorem, *The American Mathematical Monthly* **81**(6), 647-648.

Gaskell, R. W., Klamkin, M. S., Watson, P.: 1976, Triangulations and Pick's theorem, *Mathematics Magazine* **49**(1), 35-37.

Grunbaum, B., Shephard, G. C.: 1993, Pick's theorem, *The American Mathematical Monthly* **100**(2), 150-161.

Gut, D.: 2005, Twierdzenie Picka w nauczaniu, *Matematyka* **6**, 35-37.

Informator: 2007, *Informator o egzaminie maturalnym od roku 2008. Matematyka*, CKE, Warszawa.

Iseri, H.: 2008, An exploration of Pick's theorem in space, *Mathematics Magazine* **81**(2), 106-115.

Klakla, M.: 2002, Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 263-273.

Kołodziejczyk, J.: 1989, Twierdzenie Picka, *Matematyka* **1**, 15-19.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Łobocki, M.: 1984, *Metody badań pedagogicznych*, PWN, Warszawa.

Major, J., Major, M.: 2009a, Problems generated by Pick's theorem, *Acta Mathematica* **12**, 165-170.

Major, J., Major, M.: 2009b, Twierdzenie Picka, w: M. J. Černák I (red.), *IMEM 2009, Interdisciplinary Relationship in the Theory and Practice of Informatics, Management, Economics and Mathematics, Proceedings of International Congres*, Ružomberok, 621-625.

Major, J., Major, M.: 2009c, Uwagi o rozumieniu twierdzeń i definicji przez studentów kończących pierwszy rok studiów matematycznych, *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki* **II**, 111-127.

Nowecki, B.: 1975, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów, *Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych PAN* **20**, 29-64. Także *w:* Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 227-271.

Nowecki, B.: 1977, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich pojęć twierdzenia i dowodu, *Szkoła Dydaktyki Matematyki* 53-67.

Pieprzyk, H., Żeromska, A.: 2009, Diagnoza wiedzy uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów matematyki na temat związku twierdzenia z jego dowodem, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 183-211.

Steinhaus, H.: 1954, *Kalejdoskop matematyczny*, PZWSz, Warszawa.

Varberg, D. E.: 1985, Pick's theorem revisited, *The American Mathematical Monthly* **92**(8), 584-587.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: jmajor@up.krakow.pl
e-mail: mmajor@up.krakow.pl