FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Maria Legutko

Umiejętność matematycznego uogólniania wśród nauczycieli i studentów matematyki specjalności nauczycielskiej

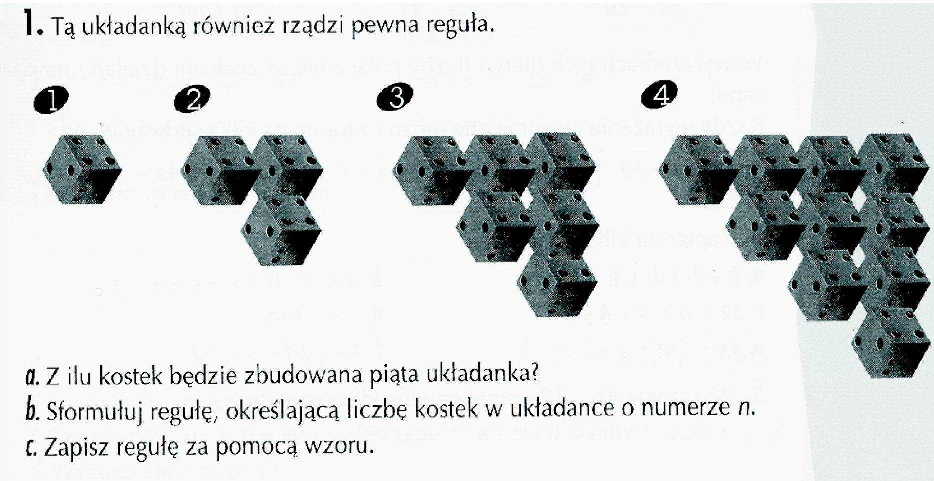
(na przykładzie serii zadań „schodki")*

Abstract. Generalizations are very common in mathematics. A generalization may be a process (mathematical activity) and a product in the form of mathematical concepts, tasks, theorems, hypotheses, methods of reasoning and argumentation. The article points out that the basic skills in the process of generalization of concepts and theorems consist of observation focused on distinguishing mathematical relations and the ability to represent the results by means of letters, algebraic expressions, equations and other symbols. It is particularly significant in mathematics education at the later stages of elementary school and in middle school (12-16 years). The article analyzes the generalization abilities and difficulties that were exhibited by university students of mathematics education and mathematics teachers from the middle school level while solving the "step pattern" task. A concrete situation, presented on a schematic graph together with explanatory information and questions, was a starting point for the formulation of general relations and recurrence and induction generalizations within the set of natural numbers. As a result of these generalizations, the condition defining the triangular numbers was formulated. Almost 65% of the students (out of 106) and 50% of the teachers (out of 130) successfully represented the generalizations. Almost 50% of the students managed to represent the reasoning that led to the generalization using the method of mathematical induction or the theorem of the sum to n terms of an arithmetic progression; while about 20% of the teachers represented the justification leading to the generalization by using the theorem of the sum of the first n integers or the induction generalization of the reasoning based on the example concerning the area of the figure created by the "step pattern."

Zamiast wstępu

1. Relacja z obserwacji: W ramach praktycznego przygotowania do prowadzenia lekcji matematyki zdarzyło się, że piątka studentów III roku matematyki nie potrafiła przygotować i poprowadzić lekcji z wykorzystaniem sytuacji dydaktycznej zaproponowanej w podręczniku do klasy drugiej gimnazjum.

*On the ability of mathematical generalization among mathematics teachers and mathematics students of teacher specialization (illustrated by "step pattern" tasks)



Rysunek 1. Sytuacja z podręcznika dla klasy drugiej gimnazjum „Matematyka 2001", (Bazyluk, Dałek, Dubiecka, Fryska, Góralewicz, Łakoma, Piskorski, Sienkiewicz, 2000, s. 57).

W rozmowie okazało się, że studenci nie potrafili sformułować reguły i zapisać jej za pomocą wzoru dla układanki o numerze n. Nie potrafili, *bo tak tego nie byli uczeni, takich zadań nigdy nie rozwiązywali.* Po przygotowaniu i przeprowadzeniu przez studentkę lekcji okazało się, że nauczyciel także nie wiedział, jak poprowadzić taką lekcję, gdy *uczniowie nie znają ciągów, wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego.* Celowo dawał taki temat lekcji z zaleceniem, by przygotować ją z wykorzystaniem sytuacji z podręcznika.

2. Z wyników badań: Wśród wyników międzynarodowych badań umiejętności matematycznych uczniów kończących gimnazjum (*Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD/PISA, Wyniki badania 2003 w Polsce*, 2003, s. 12) sformułowano taki, że „polscy uczniowie, niezależnie od działu matematyki, gorzej niż ich rówieśnicy w świecie, radzą sobie z zadaniami wymagającymi abstrakcyjnego myślenia: analizy lub uogólnienia".

Na egzaminie gimnazjalnym w 2008 roku tylko 13% uczniów potrafiło zapisać uogólnienie w postaci wyrażenia algebraicznego dla układanki przedstawionej na rysunku (*Osiągnięcia uczniów kończacych gimnazjum w roku 2008*, 2008, s. 151, 193-196).

Problem badawczy, jaki zrodził się w wyniku tych informacji, to rozeznanie, jak z uogólnieniami radzą sobie studenci matematyki, a także nauczyciele gimnazjum. W tym artykule przedstawiam wyniki badań przeprowadzonych w latach 2007-08 w grupie studentów i nauczycieli rozwiązujących serię zadań „schodki".

1. O uogólnianiu w matematyce

Uogólnienie to przejście od rozpatrywania jednego obiektu do rozpatrywania zbioru zawierającego ten obiekt, albo przejście od rozpatrywania węższego zbioru do rozpatrywania szerszego zbioru zawierającego ten węższy zbiór (Polya, 1964, s. 248). Obiekty i zbiory zawierające te obiekty mogą być w matematyce różnorodne i dlatego rozważane są w matematyce **uogólnienia: pojęć, problemów, twierdzeń, hipotez, sposobów rozumowania i dowodzenia**. W matematyce i jej nauczaniu rozróżnia się **proces uogólniania** i efekt tego procesu – **produkt uogólnienia** (Lubomirski, 1983; Zaręba, 2003; Zaręba, 2004).

Klasyczna teoria uogólniania w odniesieniu do matematyki sprowadza się, według Lubomirskiego (1983, s. 81), do trzech następujących tez:

1. „Uogólnianie jest operacją typu klasyfikacji. Polega ono na generowaniu coraz szerszych klas pojęciowych zawierających się jedna w drugiej.
2. Uogólnianie dokonuje się, wychodząc od danych pojęć, przez abstrahowanie cech wspólnych; w ten sposób idea ogólna pojawia się, jako to, co pozostaje po odjęciu czegoś z pewnej bogatszej całości.
3. Z uogólnianiem związane jest rozszerzanie zakresu idei, natomiast zubożenie jej znaczenia. Wraz z uogólnieniem rośnie stopień nieokreśloności. Relacja między szczegółem a ogółem jest zazwyczaj pojmowana, jako stosunek części do całości. (...) Identyfikuje się to, co ogólne, z tym – co abstrakcyjne i z tym, co istotne".

W zależności od sytuacji matematycznej, od tego, czego uogólnienia dotyczą i czemu służą, nadaje się uogólnieniu różne znaczenia. Może być ono użyteczne w rozwiązywaniu zadań, bo ogólniejsze zadanie może być łatwiejsze w rozwiązaniu. Ogólne wyjaśnienie może ułatwić zrozumienie idei i zastąpić wiele szczegółowych zadań jednym. Uogólnianie jako proces może dotyczyć **uogólnienia problemów**, bo „w istocie rzeczy stanowią ową siłę napędową całej ewolucji matematycznego poznania" (Lubomirski, 1983, s. 86). Uogólnia się problemy nie tylko wtedy, gdy w szczególnym przypadku zostały tak czy inaczej rozwiązane w postaci **uogólnienia twierdzenia**, ale i wówczas, gdy jedynie udało się postawić bardziej lub mniej prawdopodobne **uogólnione hipotezy**. Krygowska (1977, s. 109-118) precyzuje uogólnienie twierdzenia jako formułowanie twierdzenia, którego szczególnym przypadkiem jest dane twierdzenie, i wyróżnia w tym procesie: **uogólnianie typu indukcyjnego, uogólnianie przez uogólnienie rozumowania, uogólnienie przez unifikację oraz uogólnienie przez dostrzeżenie prawa rekurencji**.

Rozumowanie „od szczegółu do ogółu", od tego, co mniej ogólne do tego, co bardziej ogólne, kojarzone jest z uogólnianiem, z indukcją (przyrodniczą lub matematyczną) i często przeciwstawiane jest dedukcji, jako rozumowaniu typowemu dla matematyki. Tak ujął to G. Polya (1964, s. 116), pisząc, że: „matematyka dopiero powstająca, szukająca nowych twierdzeń, jest eksperymentalną nauką indukcyjną. (...) Wiele osiągnięć matematycznych znaleziono najpierw drogą indukcji, a następnie udowodniono. Indukcja usiłuje znaleźć regularność i zgodność leżącą poza obserwacjami". Takie spojrzenie na tworzącą się matematykę, jakie przedstawił Polya, prawdopodobnie odnosi się także do matematyki, jaka powstaje w umyśle osoby uczącej się jej.

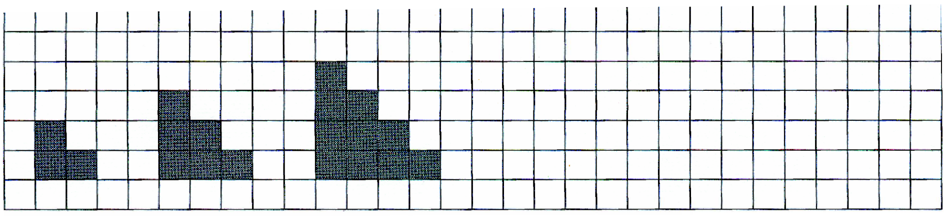
W analizie procesów poznawczych uogólnienie rozumiane jest jako przechodzenie „od szczegółu do ogółu" i odwrotnie – „od ogółu do szczegółu" (zwane **specyfikacją, specjalizacją** czy **konkretyzacją).** Są to rodzaje zabiegów poznawczych, które występują w tym samym procesie uogólnienia i weryfikowania opisanej sytuacji. Często konkretne liczby (lub inne konkretne obiekty) zastępujemy „dowolną liczbą" z danego zbioru, mówimy wówczas o **uzmiennianiu danych** (Polya, 1964, s. 250; 1975, s. 35), lub **uzmiennianiu stałych** (Krygowska, 1977, s. 113; 1974, s. 3). Uogólniając, używamy innego języka, zastępujemy nazwy własne poszczególnych obiektów jakiegoś zbioru **nazwami ogólnymi**. Często liczby zastępujemy literami. Tradycyjnie dowolną liczbę ze zbioru liczb naturalnych oznaczamy literą n, długości odcinków oznaczamy literami a, b, c. Mamy przy tym świadomość, że w miejsce litery możemy podstawić dowolną liczbę z pewnego określonego zbioru, np. gdy a oznacza długość odcinka, to w miejsce a możemy podstawiać tylko liczby nieujemne. Literami oznaczamy w matematyce pewne **wielkości stałe** np. π, e. Litera oznacza wówczas ściśle określoną jedną liczbę, której dokładnej wartości nie potrafimy zapisać za pomocą cyfr. Gdy chcemy opisać zmiany (wzrost lub spadek) jednej wielkości w zależności od drugiej, używamy liter w roli **zmiennych**, np. zapis $2n$ może opisywać dwukrotne zwiększanie się wielkości oznaczonej n albo, gdy n jest liczbą naturalną, możemy $2n$ uznać jako nazwę ogólną dowolnej liczby parzystej. W zapisie dowolnego wyrazu ciągu $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ litera n występuje jako nazwa ogólna w dwóch znaczeniach w nazwie ciągu (traktowanego jako pewien zbiór liczb) i w nazwie dowolnego wyrazu tego ciągu, który wyznaczamy podstawiając za n liczbę naturalną. Występuje też jako zmienna, bo od niej zależy wartość liczbowa wyrazów tego ciągu (wartość funkcji a_n dla argumentu n). Litery w uogólnianiu występują najczęściej, jako nazwy ogólne, wielkości zmienne oraz stałe. Każde z tych znaczeń występuje w różnych odmianach i zależy od kontekstu, w jakim się pojawia. Trudności psychologiczne i pojęciowe wiążą się z wieloznacznością symbolu literowego (Krygowska, 1955, s. 24; Turnau, 1990, s. 156; Demby, 2000; Semadeni, 2002). Rozumienie liter jest konieczne dla wykonywania operacji, racjonalnego ich planowania i kontrolowania wyniku nie tylko w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych i w rozwiązywaniu równań. Na wyższym poziomie litery stają się obiektami matematycznymi.

Obserwacja i doświadczenie nauczycielskie pokazują jednak, że rozumowanie „na liczbach" jest dla uczniów dużo łatwiejsze do zrozumienia i odtworzenia niż to samo rozumowanie prowadzone „na literach". „Przejście od języka konkretów do języka symboli, od słów do znaków, stanowi dla ucznia zasadniczą trudność, której pokonanie łączy się z jakościową zmianą w myśleniu ucznia" (Krygowska, 1955, s. 23). Jeśli uczniom w wieku 11-16 lat, nie pomożemy pokonać tej trudności, to zniechęcają się do uczenia matematyki, przestają rozumieć a z czasem stają przed barierami nie do pokonania, w ich opinii.

2. O uogólnieniach w serii zadań „schodki"

2.1. Seria zadań schodki

Seria zadań „schodki" wykorzystana w badaniach umiejętności uogólniania nawiązuje do sytuacji z podręcznika „Matematyka 2001" i do zadania „schodki" z badań OECD/PISA z 2003 roku. Jest jednak bardziej rozbudowana i ciąg narysowanych na kracie figur w kształcie „schodków" rozpoczyna figura złożona z trzech kwadratów jednostkowych, a nie jednego. Wprowadzony został przez to pewien „szum informacyjny" i bardziej złożona zależność między numerem figury oraz liczbą kwadratów „przy boku figury". Pojawiła się jeszcze jedna okazja do uogólnienia z użyciem działań na literach. Słowa „schodek" i „figura" używane są w odniesieniu do narysowanych wielokątów, długości ich boków wymierzane są długościami boków kwadratów jednostkowych, z których złożone są te wielokąty. Używanie skojarzeń ze „schodkami" ułatwia wyrażanie zależności w języku nieformalnym, nie zawsze ściśle matematycznym. Pojawiają się stopnie schodów z języka naturalnego, „warstwy kwadratów" układane poziomo, pionowo i po skosie.



Rysunek 2. Seria zadań „schodki".

1. Sformułuj regułę, według której tworzono kolejne figury.
2. Gdyby kontynuowano rysowanie „schodków", z ilu kwadratów jednostkowych złożona będzie
   (a) siódma figura,
   (b) dziesiąta figura,
   (c) setna figura,
   (d) n-ta figura.
   (e) Odkryty wzór uzasadnij/udowodnij.
3. Oblicz obwody narysowanych figur, przyjmując za jednostkę długość boku kwadratu, z jakich rysowano figury. Zapisz obwód n-tej figury.

Polecenie 1 w zadaniu zachęca rozwiązującego, by dostrzegł (wyabstrahował) cechy wspólne narysowanych trzech „schodków" i próbował je w jakiś sposób uzewnętrznić, formułując regułę. Zadanie 2 rozłożone zostało na szczegółowe polecenia i sugerują one (czy nawet wymuszają) indukcyjne uogólnienia. Dla kolejnych początkowych figur można kontynuować rysowanie, liczenie, ale pytanie o liczbę kwadratów w setnej figurze wymusza wymyślenie sposobu wyznaczania liczby kwadratów w dowolnej figurze. Polecenie uzasadnienia (czy udowodnienia) odkrytego wzoru jest także okazją do ujawnienia sposobu rozumowania i weryfikowania sformułowanej reguły. Zadanie 3 jest podobne do zadania 2 ze względu na uogólnienie, dotyczy obwodów narysowanych figur i oczekiwany jest sposób liczenia obwodu dowolnej z figur „schodki". Zostało umieszczone w serii, by rozwiązujący miał możliwość potwierdzenia swoich umiejętności uogólniania.

Rozwiązując zadania serii „schodki", mamy do czynienia z procesem i z produktem uogólniania. Ujawniamy aktywności związane z procesem uogólniania, gdy poszukujemy reguły, według której tworzono „schodki", gdy poszukujemy sposobu liczenia kwadratów w dowolnej n-tej figurze i gdy poszukujemy wzoru na liczenie jej obwodu. Produktem uogólniania są reguły zapisane słownie lub symbolicznie w postaci wzorów lub wyrażeń algebraicznych. Możemy również na tę serię zadań spojrzeć jak na zadanie metodologiczne, przedstawioną na rysunku sytuację potraktować jako punkt wyjścia do formułowania pytań, spostrzeżeń i odpowiedzi na postawione pytania najpierw w postaci hipotez, które po zweryfikowaniu poprawności mogą być sformułowane w postaci uogólnionych twierdzeń. Narysowane figury numerujemy: pierwsza, druga i trzecia figura. Pokazują one sposób (regułę), w jaki możemy narysować czwartą, piątą, szóstą figurę i wyobrazić sobie dziesiątą, setną, n-tą figurę. Pisząc n-ta figura (F_n), myślimy o dowolnej figurze tego ciągu tworzonej według reguły pokazanej dla trzech pierwszych figur. W nieformalny sposób określamy (definiujemy) tu ciąg figur, których liczby jednostkowych kwadratów f_n są w istocie podciągiem ciągu liczb trójkątnych. Pojawiającą się w treści zadania literę n możemy odczytać jako nazwę ogólną dowolnej figury. Dokonujemy tu uogólnienia przez uzmiennienie stałej, zastępując literą n konkretne liczby naturalne w ich aspekcie porządkowym użyte dla określenia kolejności figur w ciągu. Wnikliwie obserwując zarówno stałe, jak i zmieniające się elementy w kolejnych figurach, poprzez abstrahowanie i uogólnienie możemy zauważyć, że:

1. Pierwsze z narysowanych „schodków" mają: dwa stopnie (w języku naturalnym), dwie warstwy kwadratów jednostkowych i są sumą (1+2) kwadratów.
2. Figura o numerze n ma $n + 1$ stopni i $n + 1$ warstw.
3. W każdej figurze liczba stopni „schodków", jest taka sama jak liczba kwadratów „przy boku figury" (pionowym i poziomym).
4. W n-tej figurze „warstwy" składają się z $1, 2, 3, \ldots n$, $(n + 1)$ kwadratów jednostkowych.
5. Liczba wszystkich kwadratów w n-tej figurze jest równa $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)$.
6. Przechodząc od n-tej figury do $n+1-$ej, dokładamy $n+2$ kwadraty jednostkowe.
7. Liczby kwadratów jednostkowych w figurach (pola figur) tworzą ciąg $3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ rosnący, który nie jest arytmetyczny.
8. Wyraz ogólny ciągu „schodków" można zapisać na kilka sposobów i sprowadzić do wzoru $f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

2.2. Formułowanie reguły dla liczby kwadratów w „schodkach"

W poszukiwaniu reguły, według której narysowane zostały figury, można wyróżnić trzy podejścia:

I. Skupienie uwagi na takich cechach jednej figury, które są wspólne dla wszystkich figur i pozwalają łatwo wyznaczyć liczbę kwadratów jednostkowych w tej figurze.

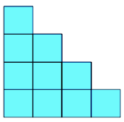
II. Skupienie uwagi na zmianach między dwoma (czasem trzema) kolejnymi figurami.

III. Spojrzenie „na wszystkie figury" jak na ciąg.

W każdym z tych podejść można słownie lub symbolicznie podać kilka reguł. Przedstawione są one poniżej, oznaczone numerami i krótkimi nazwami.

I. W podejściu pierwszym po wstępnym zapoznaniu się z danymi na rysunkach figurami i sformułowanymi poleceniami uwaga rozwiązującego koncentruje się na obserwacji **jednej figury**: jak jest utworzona, jak zliczyć, ile ma kwadratów, z nastawieniem wymyślenia takiego **sposobu** (metody), który można zastosować do każdej innej figury. Sprawdzony, dobrze działający sposób dla konkretnej figury może zostać uogólniony. Mówimy wówczas **o uogólnieniu rozumowania z przykładu. Rozumowanie zostaje przeprowadzone dla jednego szczególnego przypadku. Dostrzegane jest to, że rozumowanie dla każdego innego, szczególnego przypadku będzie przebiegać tak samo. Pozwala to dokonać uzmiennienia stałych i prowadzi do ogólniejszego rezultatu – uogólnienia rozumowania.** W tych podejściach wykorzystywane są matematyczne pojęcia, twierdzenia i umiejętności dotyczące liczb naturalnych i pól figur geometrycznych. Zrealizowane mogą być w tym podejściu co najmniej cztery strategie.

Reguła 1 – sumowanie liczb naturalnych (R1)

 **Rysunek 3.** Trzecia figura. Wybieramy np. trzecią figurę. W czterech „warstwach”, są 1, 2, 3 i 4 kwadraty, czyli w całej figurze jest 1+2+3+4 kwadratów.	W kolejnych „warstwach” figury jest o 1 więcej kwadratów jednostkowych. Tworzą one ciąg kolejnych liczb naturalnych rozpoczynający się od liczby 1 a kończący na liczbie o jeden większej niż numer figury. Liczba kwadratów jednostkowych w figurze jest sumą tych kolejnych liczb.	Dla dowolnej figury F_n tego ciągu można zapisać liczbę jej kwadratów f_n w postaci wzoru W1: $f_n = 1+2+3+\ldots+(n+1)$.

Dla sprawnego policzenia tej sumy, można skorzystać z „pomysłu Gaussa”[1] dodawania początkowych liczb naturalnych od 1 do $n+1$. Zapisujemy te sumy w odwrotnej kolejności składników:

$$\begin{array}{l} f_n = \quad 1 \quad + 2 + \quad 3 \quad + \ldots + n + n + 1, \\ f_n = n + 1 + n + n - 1 + \ldots + 2 + \quad 1. \end{array}$$

Suma każdych dwóch z „podpisanych jeden pod drugim” składników jest równa $n+2$, składników sumy jest $n+1$, więc podwojona suma jest iloczynem

$$2f_n = (n+2)(n+1),$$

i w efekcie otrzymujemy

$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

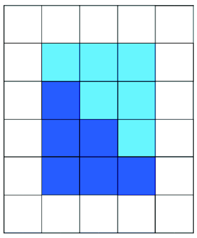
[1]Tak sposób ten nazywają L.R. Gracham, D.E. Knuth i O. Patashnik (1998, s. 21) oraz G. Polya (1975, s. 87). Jest w nim ukryta indukcja matematyczna. Rozumowanie, bez jej jawnego przywołania, jest przekonywujące dla liczb.

Suma we wzorze W1 może zatem zostać zastąpiona wzorem W9 (zob. s. 89):

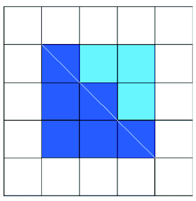
$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

który pozwala szybko policzyć sumę początkowych, kolejnych liczb naturalnych.

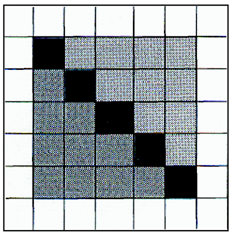
Reguła 2 – połowa pola prostokąta (R2)

 **Rysunek 4.** Dopełnianie figury do prostokąta. Dla drugiej figury tworzymy prostokąt o bokach 3 i 4, liczba kwadratów w figurze F_2 jest połową jego pola $(3 \cdot 4) : 2$.	R2: Do dowolnych „schodków” o numerze n dokładamy te same „schodki” tak, by otrzymać prostokąt o bokach $n+1$ i $n+2$. Liczba kwadratów w n-tych „schodkach” jest połową pola tego prostokąta.	W2: Symbolicznie tę regułę dla dowolnej figury można zapisać w następujący sposób: $f_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Reguła 3 – skojarzenie z polem trójkąta (R3)

 **Rysunek 5.** Podział figury na trójkąty. Liczba kwadratów w drugiej figurze jest równa $\frac{3 \cdot 3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}$.	R3: W „schodkach” tworzymy „trójkąt prostokątny równoramienny” (jest to połowa kwadratu) i „małe” trójkąty przylegające do przeciwprostokątnej, których jest tyle samo, co kwadratów przy boku figury. Liczba kwadratów w „schodkach" jest równa sumie pola trójkąta i pól „małych trójkącików”.	W3: Symbolicznie można tą regułę, dla dowolnej figury F_n, zapisać następująco: liczba kwadratów jednostkowych $f_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$ dla $n \geqslant 1$.

Reguła 4 – skojarzenie z symetrią kwadratu (R4)

 **Rysunek 6.** Dopełnianie do kwadratu przez odbicie symetryczne. Liczba kwadratów w trzeciej figurze jest równa $(5^2 - 5) : 2$.	R4: Jeśli figurę „schodki", np. trzecią, „odbijemy symetrycznie" tak, by otrzymać kwadrat, to bok kwadratu jest o jeden większy niż bok w podstawie figury. Liczba kwadratów w figurze jest połową pola kwadratu pomniejszonego o kwadraty „na przekątnej" (ciemne kwadraty na rysunku). Tą graficzną reprezentację można skojarzyć z liczbą rozgrywek drużynowych $n + 1$ zespołów. Liczba rozgrywek to liczba kwadratów pod „przekątną" kwadratu.	W4: Zapis symboliczny ma postać: $f_n = ((n+2)^2 - (n+2)) : 2$ (liczba kwadratów w podstawie figury F_n jest o 1 większa niż numer figury, a zwiększa się jeszcze o 1 w symetrycznym odbiciu, stąd we wzorze $n + 2$)

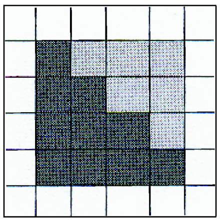
II. Obserwacja **relacji między dwoma kolejnymi figurami** pozwala wyłonić drugą grupę reguł.

Pierwsza figura składa się z 3 kwadratów. Druga figura powstaje przez dołożenie do pierwszej trzech kwadratów, trzecia powstaje przez dołożenie do drugiej czterech kwadratów itd. Fakt ten stosunkowo łatwo zaobserwować dla narysowanych figur, ale znacznie trudniej zapisać symbolicznie dla dowolnych dwóch figur. Zmienia się bowiem numer figury i zwiększa się liczba „dokładanych kwadratów". Możemy określić, z ilu kwadratów składa się figura F_n, gdy znamy liczbę kwadratów w poprzedniej F_{n-1} figurze i liczbę kwadratów w pierwszej figurze F_1. Tak prowadzone **rozumowanie pozwala zapisać zależność pomiędzy dwoma kolejnymi elementami, gdy znamy warunek początkowy dla pierwszego elementu.** Nazywane jest ono **uogólnieniem rekurencyjnym** lub rekursją (Polya, 1975; Krygowska, 1977; Graham, Knuth, Patashnik, 1998) W tym podejściu można wskazać co najmniej trzy reguły.

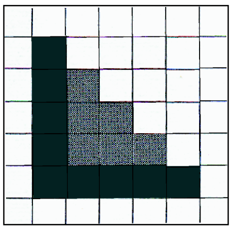
Reguła 5 – dokładanie warstwy o jeden kwadrat większej (R5)

Tworząc kolejne „schodki", dokładamy do poprzednich jedną warstwę kwadratów zawierającą o jeden kwadrat więcej niż dokładana warstwa poprzedniej figury. Można dokładać warstwę kwadratów „po skosie", albo po lewej stronie „do wysokości", albo w „podstawie schodków", bo i tak za każdym razem otrzymamy figurę tego ciągu. W zapisie symbolicznym zależność ta przyjmuje postać wzoru rekurencyjnego W5: $f_1 = 3$ i $f_n = f_{n-1} + (n+1)$ dla $n \geqslant 2$.

Reguła 6 – kwadrat z dwóch kolejnych figur (R6)

 **Rysunek 7.** Kwadrat z dwóch kolejnych schodków. Kwadrat o boku 4 tworzy trzecia i druga figura.	R6: Jeśli do dowolnych n-tych schodków (od drugich począwszy) dołożymy odpowiednio poprzednie, to otrzymamy kwadrat o boku długości o jeden większej niż numer schodków. Liczba kwadratów f_n jest równa różnicy pola kwadratu o boku $n+1$ oraz liczby kwadratów f_{n-1} w figurze poprzedniej.	Zależność ta w symbolicznym zapisie przyjmuje postać wzoru rekurencyjnego W6: $f_1 = 3$, $f_n = (n+1)^2 - f_{n-1}$, dla $n \geqslant 2$.

Reguła 7 – dokładanie warstwy poziomo i pionowo do figury przed poprzednią (R7)

 **Rysunek 8.** Dokładanie warstw pionowo i poziomo. Czwarta figura powstaje z drugiej przez dołożenie $(2 \cdot 4) + 1$ kwadratów.	R7: W pierwszej figurze są 3 kwadraty, w drugiej jest 6 kwadratów, czwarta powstaje z drugiej przez dołożenie poziomo i pionowo warstwy kwadratów tak, by powstały większe schodki. Liczbę kwadratów dla n-tej figury wyznaczamy w zależności od liczby kwadratów (n–2)-ej figury, dokładając nieparzystą liczbę kwadratów.	W symbolicznym zapisie reguła ta przyjmuje postać W7: $f_1 = 3$, $f_2 = 6$, $f_n = f_{n-2} + (2n+1)$, dla $n \geqslant 3$.

III. W trzecim podejściu poszukiwania reguły uwaga rozwiązującego jest skupiona na **wszystkich figurach** danego ciągu. Szybko pojawia się opis ciągu figur z użyciem liczb naturalnych i dla ciągu liczbowego poszukiwana jest reguła, poszukiwany jest wzór na dowolny wyraz tego ciągu. Wykorzystywane są wiadomości o ciągach, twierdzenie o sumie skończonej wyrazów ciągu arytmetycznego oraz indukcja matematyczna. Można do tej grupy zaliczyć co najmniej trzy reguły.

Reguła 8 – dodawanie do liczby 3 kolejnych liczb naturalnych, od 3 rozpoczynając (R8)

Kolejne schodki składają się z 3, 6, 10, 15, … kwadratów jednostkowych i liczba kwadratów jednostkowych w kolejnych schodkach wzrasta o 3, 4, 5,… (o kolejne liczby naturalne, począwszy od liczby 3). Ciąg ten jest rosnący, nie jest arytmetyczny, ale jest ciągiem sum częściowych $f_1 = 3$, $f_2 = 3+3$, $f_3 = 3+(3+4)$, $f_4 = 3+(3+4+5), \ldots$, $f_n = 3+(3+4+...+(n+1))$ dla $n \geqslant 3$. Dodawane liczby $3, 4, ..., n+1$ tworzą ciąg arytmetyczny skończony, $n-1$ wyrazowy, w którym $a_1 = 3$ i $r = 1$. Obliczając jego sumę, można zapisać symbolicznie regułę dla ciągu liczbowego w postaci wzoru W8: $f_n = 3 + \frac{(n+4)(n-1)}{2}$.

Reguła 9 – skojarzenie z ciągiem arytmetycznym (R9)

Sposób liczenia kwadratów w figurach pozwala od razu dostrzec liczbę kwadratów w n-tej figurze jako sumę $n+1$ wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego o wyrazie pierwszym $a_1 = 1$ i różnicy $r = 1$. Dla $n = 1$ otrzymujemy $f_1 = 1 + 2 = \frac{(1+2)\cdot 2}{2}$, dla $n = 2$, $f_2 = 1 + 2 + 3 = \frac{(1+3)\cdot 3}{2} = 6$, dla $n = 3$, $f_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(1+4)\cdot 4}{2} = 10$.

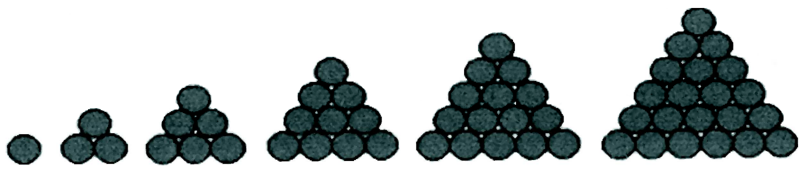
Zapisane równości, dla $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ jako zdania prawdziwe, można uznać za takie **„małe" twierdzenia dla konkretnych przypadków, a znaleziony wspólny schemat liczenia kwadratów dla wszystkich przypadków, jako twierdzenie ogólne spełnione dla dowolnego n**:

$$f_n = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Zastosowano tu **uogólnianie twierdzenia typu indukcyjnego** i otrzymano wzór W9: $f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, dla $n \geqslant 1$.

Reguła 10 – skojarzenie z liczbami trójkątnymi (R10)

W ciągu liczb 3, 6, 10, 15,... można rozpoznać podciąg liczb trójkątnych. Liczba kwadratów w pierwszych „schodkach" to druga liczba trójkątna. W matematyce liczba 1 jest też liczbą trójkątną, ponieważ „liczbami trójkątnymi nazywamy liczby postaci $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, gdzie $n \in N_1$" (*Encyklopedia szkolna. Matematyka*, 1997, s. 196). W warunku definiującym liczby trójkątne, Sierpiński (1962, s. 3) podaje od razu, że liczba t_n jest sumą n początkowych liczb naturalnych, czyli $t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Przedstawienie graficzne liczb trójkątnych jako układu kół w trójkątach (czy „kamyków na piasku" w starożytnej Grecji), uzasadnia ich nazwę.



Rysunek 9. Liczby trójkątne.

Podstawiając we wzorze t_n za n kolejne liczby naturalne, otrzymamy liczby trójkątne. Początkowe liczby to: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, $t_5 = 15$, $t_6 = 21$.

Dostosowanie dla „schodków" wzoru określającego liczby trójkątne wymaga podstawienia za zmienną n po prawej stronie wzoru wyrażenia $n+1$. W ten sposób otrzymujemy wzór W10:

$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

2.3. Uogólnienia przez unifikację dla liczby kwadratów w figurze

Poszukując reguł dla tworzonych schodków, otrzymaliśmy różne wzory jako sposoby obliczania liczby kwadratów, z których składa się n-ta figura. Niektóre z nich: $f_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, $f_n = ((n+2)^2 - (n+2)) : 2$, $f_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$, $f_n = 3 + \frac{(n+4)(n-1)}{2}$, można w wyniku prostych przekształceń algebraicznych doprowadzić do postaci: $f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Można również wykazać równoważność określenia ciągu wzorami

$$\text{W5: } \begin{cases} f_1 = 3, \\ f_n = f_{n-1} + (n+1) \text{ dla } n \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \text{W9: } f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Przejście od wzoru rekurencyjnego do wzoru ogólnego zaprezentowane jest poniżej. Obliczamy różnicę $f_n - f_1$, zapisując ją w następujący sposób:

$$f_n - f_1 = (f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + ... + (f_2 - f_1).$$

Stosując wzór rekurencyjny $f_n = f_{n-1} + (n+1)$ dla kolejnych wyrazów ciągu, obliczamy poszczególne składniki sumy: $f_n - f_{n-1} = n+1$, $f_{n-1} - f_{n-2} = n$ itd., aż obliczymy ostatni wyraz $f_2 - f_1 = f_1 + 3 - f_1 = 3$.
Podstawiając obliczone składniki sumy do liczonej różnicy, otrzymujemy:

$$f_n - f_1 = (n+1) + n + ... + 3.$$

Obliczamy $f_n = (n+1) + n + ... + 3 + f_1$ i podstawiając $f_1 = 3$, otrzymujemy

$$f_n = (n+1) + n + ... + 3 + (2+1).$$

Jest to suma $n+1$ początkowych liczb naturalnych, od 1 począwszy, albo $n+1$ wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $f_1 = n+1$ oraz $r = -1$. Obliczając tę sumę, otrzymujemy wzór ogólny:

$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ze wzoru ogólnego W9 można otrzymać wzór rekurencyjny W5, obliczając $f_1 = \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3$ oraz $f_n - f_{n-1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)$, skąd

$$f_n = f_{n-1} + (n+1).$$

To rozumowanie pokazuje także dążenie do pewnego ujednolicenia, pewnej **unifikacji różnych rozumowań i różnych wzorów**. Jest to element organizowania wiedzy na zakończenie pracy. Tym elementem unifikującym jest sformułowanie ogólnego warunku W10 definiującego **liczby trójkątne**. Nie są to, co prawda, w ścisłym znaczeniu uogólnienia przez unifikację (Krygowska, 1977, s. 116), ponieważ nie są to rozumowania prowadzone w kilku całkiem różnych przypadkach, które potem scalane są w jedną całość.

2.4. Formułowanie uogólnień dla obwodów figur

W liczeniu obwodów narysowanych figur i poszukiwaniu sposobu obliczania obwodu dowolnej figury można również zaprezentować trzy podejścia, podobnie jak w formułowaniu reguł dla liczby kwadratów.

I. Przeanalizowanie obwodu jednej figury i uogólnienie rozumowania z przykładu. Dostrzeżona jest zależność, że obwody narysowanych „schodków” są równe obwodom kwadratów o bokach długości o jeden większej niż numer figury. Tu można wyróżnić co najmniej dwie strategie prowadzące do wzorów:

   W11: $b_n = (n+1) + (n+1) + 2(n+1)$ – liczenie obwodu „schodków”.

   Na obwód pierwszej figury składa się długość dwóch odcinków o długości 2 i długość łamanej złożonej z 2 odcinków poziomych i 2 odcinków pionowych, czyli $2 + 2 + 2 \cdot 2$. Poprzez uzmiennienie stałych, długości boków w n-tej figurze mają $(n + 1)$ jednostek długości i pojawia się sposób liczenia obwodu dla dowolnej figury w postaci wzoru W11.

   W12: $b_n = 4(n{+}1)$ – skojarzenie z obwodem kwadratu.

   Uzasadnienie dla wzoru można przedstawić na rysunku poprzez przesunięcie równoległe odpowiednich odcinków łamanej do boków najmniejszego kwadratu, w którym zawiera się figura „schodki”. Obliczony obwód, np. pierwszej figury, to $4 \cdot 2$. W n-tej figurze „bok” jest o jedną jednostkę dłuższy niż numer figury, więc jest równy $n + 1$, a obwód jest równy $4(n + 1)$.

II. Analizowanie zmian obwodu dla dwóch kolejnych figur i uogólnienie rekurencyjne.

   W13: $b_1 = 8$ i $b_n = b_{n-1}{+}4$ dla $n \geqslant 2$ – obwód między kolejnymi figurami wzrasta o 4 jednostki.

   Obwód pierwszej figury jest równy 8 długościom boku kwadratu jednostkowego. Dla drugiej figury obwód wzrasta o 4 jednostki i o tyle wzrasta między kolejnymi dwoma figurami.

III. Obliczenie obwodów początkowych figur i uogólnianie zależności dla ciągu liczbowego.

   W14: $b_n = 8 + 4(n - 1)$ – dla dowolnej liczby naturalnej n, obwody figur tworzą ciąg arytmetyczny.

   Policzony został obwód pierwszej figury $b_1 = 8$ i dostrzeżona zależność pomiędzy kolejnymi figurami, ich obwód wzrasta o $r = 4$ długości boku kwadratu jednostkowego.

   W15: $b_n = 4(n+1)$ – wzór ogólny dla ciągu $8, 12, 16, 20\ldots$

   Liczone obwody kolejnych figur wyznaczają ciąg wielokrotności liczby 4 od drugiej, niezerowej począwszy. Wzór ogólny to zapis wielokrotności liczby 4.

Wzory zapisane dla obwodów można powiązać z odpowiednimi wzorami zapisanymi przy zastosowaniu tych samych strategii liczenia kwadratów w figurach: W11 z W1, W12 z W2, W13 z W5, W14 z W8 i W15 z W9.

3. Analiza rozwiązań zadań studentów i nauczycieli gimnazjum

3.1. Cele i organizacja badań

Celem badań było poznanie i opisanie rodzajów rozumowań prowadzących do uogólnień (procesu i produktu), jakie stosowali studenci matematyki i nauczyciele gimnazjum w rozwiązaniu serii zadań zatytułowanej „schodki". Studenci byli uczeni o rodzajach rozumowań i rodzajach uogólnień na zajęciach z dydaktyki matematyki[2], a zadanie to sprawdzało ich umiejętności na egzaminie z tego przedmiotu. W kursie dla nauczycieli zadanie to było „wstępną diagnozą" ich umiejętności uogólniania na początku zajęć poświęconych uogólnianiu. Rozbudowana forma zadania miała stworzyć okazję, by rozwiązujący ujawnili (uzewnętrznili) to, co dostrzegali w narysowanych figurach, z jaką matematyką je kojarzyli, jakie podejmowali próby opisania uogólnienia.

Sformułowane zostały następujące szczegółowe pytania badawcze:

C1: Jak była formułowana dostrzegana przez badanych regularność przedstawiona na rysunkach?

C2: Jakie uogólnienia zostały zapisane?

C3: Jakie ujawniły się trudności z uzasadnieniem uogólnienia?

C4: Jakie ujawniły się trudności z użyciem liter?

Serię zadań „schodki" rozwiązywało 106 studentów czwartego roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie w czerwcu 2007 roku. Z 21 studentami, którzy nie rozwiązali zadań lub przedstawili „zaskakujące" rozwiązania lub błędy, przeprowadziłam rozmowy. Z rozmów sporządzałam notatki i wykorzystałam w analizie. Drugą grupę rozwiązujących to zadanie stanowiło 104 nauczycieli uczestniczących w grancie Małopolskiego Kuratora Oświaty „Kształcenie kompetencji matematycznych uczniów gimnazjum"[3] w październiku i listopadzie 2008 roku i grupa 26 nauczycieli, uczestników warsztatów na konferencji Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. Byli to nauczyciele matematyki ze szkół województwa małopolskiego, którzy dobrowolnie zgłosili się na szkolenia. Wśród nich byli młodzi nauczyciele zarówno z kilkuletnim stażem pracy, jak i kilkunastoletnim, po różnych studiach, nie tylko matematycznych magisterskich, ale licencjackich matematyczno-informatycznych oraz magisterskich technicznych, ekonomicznych z przygotowaniem pedagogicznym. Wśród nich byli nauczyciele dyplomowani, mianowani, kontraktowi oraz trzech nauczycieli stażystów. Nauczyciele otrzymywali kartę pracy z zadaniami i rozwiązywali je około 30-40 minut (w zależności od potrzeb). Mogli pytać indywidualnie, gdy coś było dla nich niezrozumiałe. Zostali

[2] Studenci w ramach zajęć z dydaktyki matematyki poznali rodzaje rozumowań matematycznych [wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne i formalne (dedukcja, redukcja i indukcja matematyczna)] oraz rodzaje uogólnień (indukcyjne, rekurencyjne, uogólnienie rozumowania przez uzmiennienie stałych i przez unifikację).

Rozumowania te przedstawione były na wykładzie na przykładzie liczby odcinków łączących każde dwa spośród n punktów płaszczyzny. Inne przykłady studenci mieli na ćwiczeniach, przy tematach indukcji matematycznej i ciągów. Z indukcją matematyczną zapoznawali się na zajęciach ze wstępu do matematyki, analizy matematycznej i na podstawach arytmetyki szkolnej.

[3] Jedna część tych zajęć poświęcona była uczeniu uogólniania w nauczaniu matematyki.

poproszeni o to, by wszystko zapisywali na kartach. Przekazana była im również informacja o tym, że ich rozwiązania stanowią dokumentację kursu, będą analizowane, a wybrane prace dołączone do sprawozdania kursu. Prace były numerowane bez nazwisk. Praca z nauczycielami odbywała się w grupach do 25 osób. Gdy większość nauczycieli zakończyła rozwiązywanie zadań, pozostali byli proszeni o odłożenie przyborów do pisania i niedopisywanie już niczego na kartach pracy. Następnie przeprowadzane były dyskusje nad sposobami rozwiązania zadań, wybranymi strategiami, zastosowanymi uogólnieniami. Nauczyciele dzielili się swoimi pomysłami, nie ukrywali zdziwienia, czasem radości z odkrycia geometrycznego uzasadnienia dla danego uogólnienia.

3.2. Metody analizy rozwiązań zadań

Pisemne rozwiązania zadań studentów i nauczycieli oraz notatki z rozmów stanowiły materiał badawczy poddany analizie. W pierwszym etapie analizowane i oceniane było każde rozwiązanie ze względu na poprawność reguł, obliczeń, uogólnień i uzasadnień. W drugim etapie każda praca ponownie była analizowana a przedstawione w niej reguły i uzasadnienie były kodowane. Efektem tej pracy są zestawienia zbiorcze wyników, które posłużyły do sformułowania wniosków[4]. W trakcie analizy zapisu uogólnień zestawiane były przykłady ujawniające trudności z użyciem liter w opisie zmiennych i zależności.

3.3. Przykłady rozwiązań

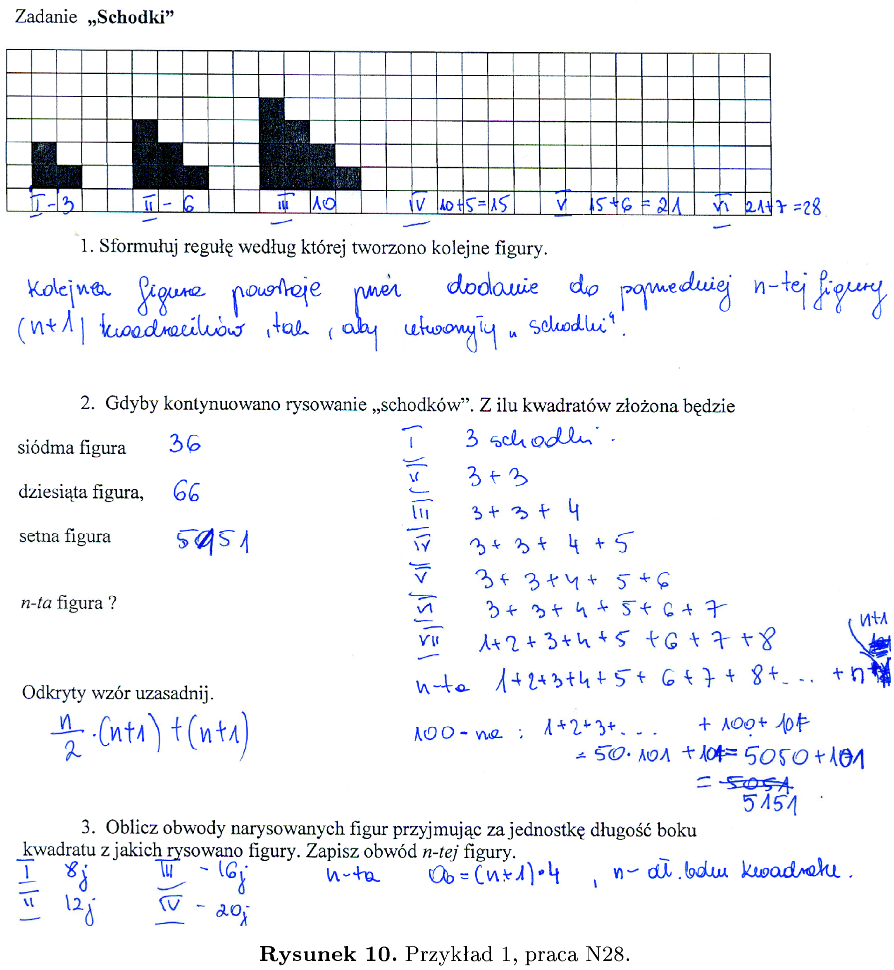
Analiza rozwiązań otwartego, nietypowego zadania nie jest łatwym procesem[5]. Prawie zawsze jest wiele poprawnych sposobów rozwiązania takiego zadania. Rozwiązujący, nie dysponując gotowym schematem postępowania, poszukuje pomysłów i podejmuje różne próby, niektóre porzuca po kilku pierwszych czynnościach, by potem do nich powrócić. Trudno wówczas na podstawie zapisu „odtworzyć”, jak przebiegało jego rozumowanie. To, co zapisał, narysował lub wypowiedział jest ujawnieniem tylko części jego rozumowania, jakie przeprowadził w swoim umyśle w procesie rozwiązywania zadania. Pozostaje to ukryte także dla bezpośredniego obserwatora nawet wówczas, gdy rozwiązujący zapisał pełne rozwiązanie. Analiza zapisu rozwiązania i notatek z prowadzonych rozmów nie zawsze pozwala odtworzyć wiernie proces rozumowania danej osoby. Jednak na podstawie ujawnionych czynności, kilkakrotnie powtórzonych, sformułowanych reguł, zapisanych wzorów i podejmowanych prób ich uzasadnienia można z dość dużą pewnością scharakteryzować umiejętności uogólniania większości badanych osób. Rozumowania rekurencyjne i indukcyjne w wielu rozwiązaniach wzajemnie się uzupełniały (jak w przykładach 1. i 4. zaprezentowanych niżej) albo prowadzone były niezależnie, bądź występowało tylko jedno z nich. Przedstawione niżej przykłady rozwiązań pokazują różne podejścia, różne strategie uogólniania arytmetyczno-algebraiczne (R1, R5, R8), geometryczno-algebraiczne (R2-R4, R6-R7) oraz różne rodzaje rozumowań indukcyjnych i rekurencyjnych (R5-R7). Komentarze do przykładów opisują

[4]Rozwiązania zadań 104 nauczycieli analizowane były w pracy magisterskiej (Stygar, 2009).

[5]Więcej o analizie tego procesu w pracach: (Ciosek, Krygowska, Turnau, 1974; Legutko, 1987; Ciosek, 2005).

krótko przebieg analizy rozwiązań, zwracając uwagę na istotne dla interpretacji szczegóły, wskazują błędy i pomyłki. W opisie użyte są oznaczenia dla reguł, wzorów i uzasadnień z rozdziału 2 (użyty symbol N dotyczy pracy nauczyciela, S – pracy studenta).

Przykład 1. Sumowanie kolejnych liczb naturalnych, uogólnienie indukcyjne



Zadanie **„Schodki"**

I - 3 II - 6 III 10 IV 10+5=15 V 15+6 = 21 VI 21+7 =28

1. Sformułuj regułę według której tworzono kolejne figury.

Kolejna figura powstaje przez dodanie do poprzedniej n-tej figury (n+1) kwadracików, tak, aby utworzyły „schodki".

2. Gdyby kontynuowano rysowanie „schodków". Z ilu kwadratów złożona będzie

siódma figura 36

dziesiąta figura, 66

setna figura 5151

n-ta figura ?

Odkryty wzór uzasadnij.

$\frac{n}{2}\cdot(n+1)+(n+1)$

I 3 schodki.
II 3+3
III 3+3+4
IV 3+3+4+5
V 3+3+4+5+6
VI 3+3+4+5+6+7
VII 1+2+3+4+5+6+7+8
n-ta 1+2+3+4+5+6+7+8+... +n (n+1)
100-na : 1+2+3+... +100+101
= 50·101 +101 = 5050+101
= ~~5051~~ 5151

3. Oblicz obwody narysowanych figur przyjmując za jednostkę długość boku kwadratu z jakich rysowano figury. Zapisz obwód *n-tej* figury.

I 8j III - 16j n-ta Ob = (n+1)·4 , n - dł. boku kwadratu.
II 12j IV - 20j

Rysunek 10. Przykład 1, praca N28.

Osoba rozwiązująca zadanie zastosowała arytmetyczne podejście do liczenia kwadratów jednostkowych, z których składają się kolejne figury. Przeliczyła kwadraty w narysowanych figurach, podpisała te wielkości pod rysunkami i kontynuowała liczenie według reguły R8 dla wyobrażonych już tylko dalszych figur. Obserwacja występujących tam zależności liczbowych była podstawą do sformułowania reguły rekurencyjnej (R5) słownie. Dokonując uogólnienia liczby dokładanych kwadratów dla n-tej figury, by otrzymać $n+1$-szą figurę, osoba ta popełniła błąd, do n-tej figury dodajemy bowiem $n+2$ kwadraty, by powstały kolejne „schodki". Błąd ten może być wynikiem próby uzmienniania stałej w serii wcześniej zapisanych obliczeń i skupieniu uwagi na numerze powstającej figury oraz liczbie dodawanych kwadratów, np. $F_6 =$ (liczba elementów figury poprzedniej) $+ 7$.

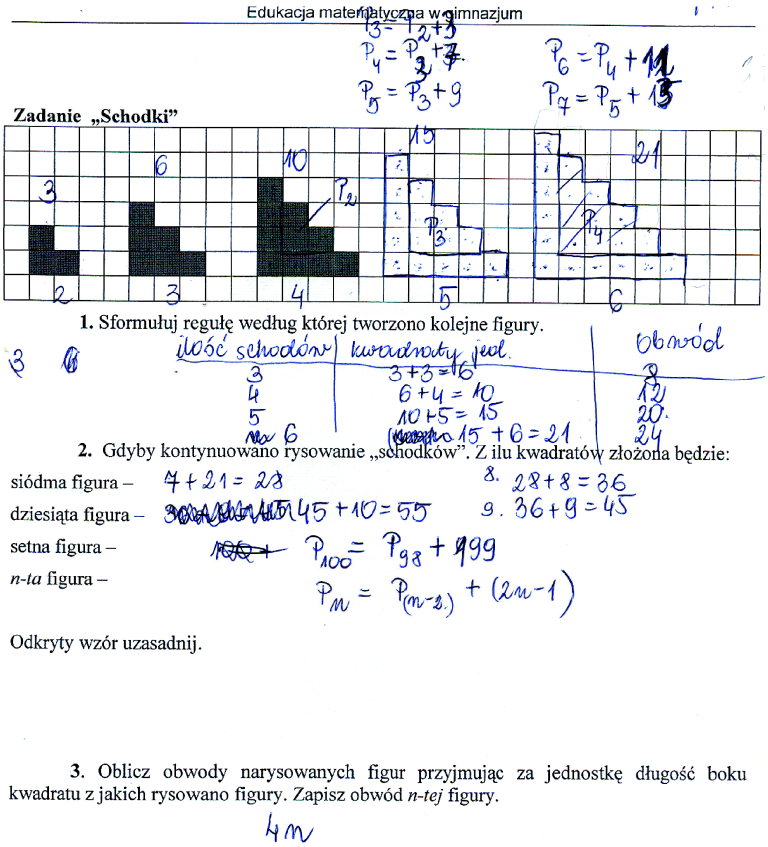
W drugim pytaniu osoba ta potrzebowała rozpisać dodawania aż do siódmej figury, by występującą liczbę 3 zapisać jako sumę liczb 1 i 2, a zastosowaną metodę uogólnić przez uzmiennienie stałej dla liczby kwadratów w n-tej figurze, jako sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n+1$. Z dużą pewnością można sądzić, że wcześniejszych sześć zapisów było zastosowaniem reguły R8, dopiero od siódmego rozpoczęło się analizowanie pod kątem zastosowania litery jako nazwy ogólnej. W liczeniu sumy stu jeden kolejnych liczb naturalnych osoba ta zastosowała wzory W1, najpierw licząc sumę liczb od 1 do 100, a potem dodając 101. W takiej też postaci wpisała w miejscu na uzasadnienie wzór $\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)$, z jakiego korzystała przy liczeniu sumy liczb. Nie pojawił się ślad żadnego skojarzenia z ciągiem arytmetycznym, tylko wzór W1, w wyniku uogólnienia rozumowania „małych twierdzeń" zapisanych dla początkowych przykładów. Skreślenia i dopiski potwierdzają trudność z ustaleniem ostatniego wyrazu sumowania. W zapisie obwodów figur osoba ta ponownie ujawniła, że nie zwróciła uwagi na zależność między numerem figury i liczbą kwadratów „przy boku schodków". Policzyła obwody pierwszych figur, prawdopodobnie dostrzegła tu wielokrotności liczby 4, od drugiej począwszy, i opisała je wzorem W15. Litera n występuje w dwóch różnych znaczeniach, których nie można równocześnie uznać za poprawne.

Podsumowując, osoba ta zastosowała podejście arytmetyczne, najpierw poprzez rekurencyjne rozumowanie ustaliła zależność dla liczby dokładanych kwadratów pomiędzy dwoma kolejnymi figurami, uzmienniła stałe, sformułowała słownie regułę R5 i zastosowała ją do sześciu figur. Następnie dokonała indukcyjnego uogólnienia sposobu liczenia kwadratów dla n-tej figury, zapisując wzór W1 w regule R1. Do zapisu uogólnień wykorzystała trzy wzory, z których jeden potraktowała, jako uzasadnienie swojego sposobu liczenia sumy liczb.

Przykład 2. Uogólnienie rekurencyjne, dokładanie warstw poziomo i pionowo

Narysowane figury (rysunek 11) zostały ponumerowane i numer drugi otrzymała pierwsza z nich. W wyniku tego przenumerowania obserwacje poczynione dla konkretnych figur i uporządkowane w tabelce zawierają pewne, wydawać by się mogło drobne błędy (zapis rozpoczęty został od drugiej figury, źle policzone zostały obwody). Konsekwencją tego przenumerowania jest jednak uogólnienie rekurencyjne, które, zastosowane dla narysowanych figur, nie daje liczby kwadratów, z jakich są utworzone. Nie można więc tego uogólnienia uznać za poprawne. W podjętych próbach formułowania reguły z użyciem liter „ścierają się" dwa podejścia do określenia liczby kwadratów figury (widoczne w nanoszonych poprawkach): jedno (R8), dodawanie do liczby kwadratów w poprzedniej figurze kolejnych liczb naturalnych od 3 począwszy (ujęte w tabelce) i drugie (R7) przedstawione na dorysowanych figurach, dodawanie nieparzystej liczby kwadratów do figury o dwa numery mniejszej począwszy od trzeciej.

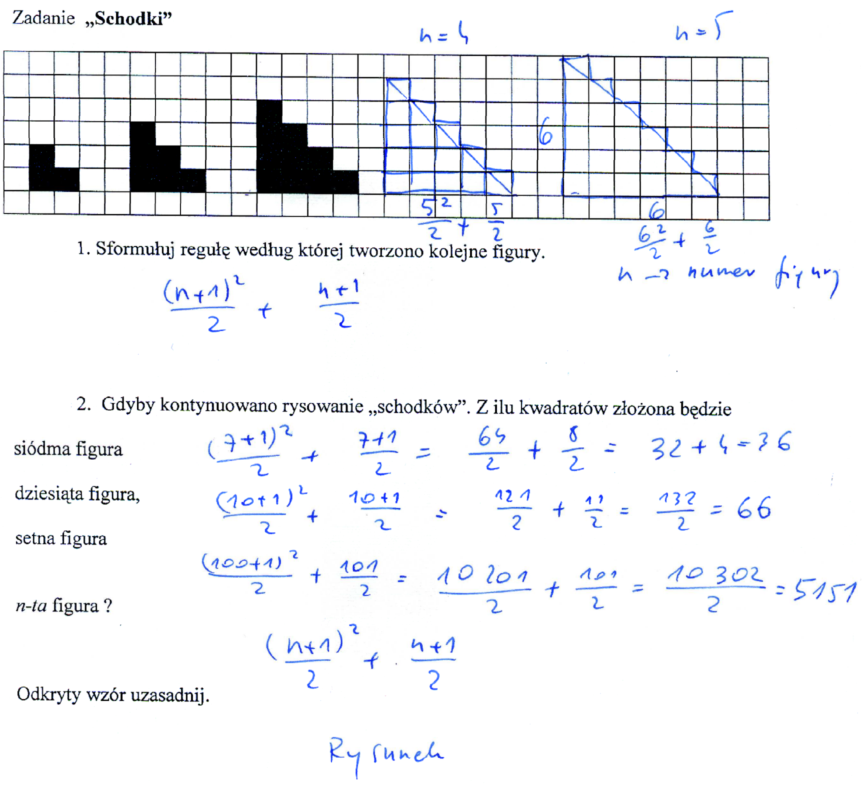
Analizując zapis rozwiązania, nie możemy z całą pewnością odtworzyć dokładnie rzeczywistego przebiegu rozumowania, jednak z zagospodarowania kartki (wzory dopisane nad treścią zadania) i poczynionych skreśleń możemy wnioskować, że badana osoba rozpoczęła analizę od czwartej figury, pierwotnie określając jej związek z figurą trzecią. Być może napisany nad tym zapisem związek wpłynął na poprawienie zapisu dla czwartej figury na postać: $P_4 = P_2 + 7$, co może świadczyć o chęci wyrażania następnych związków poprzez P_2 i potraktowanie P_2 jako stałej.



Rysunek 11. Przykład 2, praca N98.

Dalsze zapisy tworzone są jednak według innej, rekurencyjnej reguły R7. Figura siódma nie została narysowana, ale odpowiedni wzór został napisany, podobnie przez analogię opisana została liczba kwadratów dla setnej (faktycznie dla 99) figury. Dla obwodu zostało zapisane niepoprawne uogólnienie. Dostrzeżony został prawdopodobnie fakt, że obwód figury „schodki" jest taki sam, jak obwód kwadratu (W12) i we wzorze na obwód figury podstawiona została litera n, ale bez uwzględnienia jej zakresu zmienności. Podsumowując, osoba wykazała się postawą badawczą, podejściem geometryczno-algebraicznym, dostrzegła dwie reguły (R7 i R8) tworzenia kolejnych konkretnych „schodków". Wzór sformułowany w odpowiedzi na pytanie drugie powstał w wyniku refleksji nad dokonanymi już zestawieniami tabelarycznymi oraz uświadomienia sobie konieczności rekurencyjnego obliczenia wartości dla figur pośrednich przy liczeniu kwadratów w dziesiątej, a potem setnej figurze. Zaowocowało to uogólnieniem rekurencyjnym i wzorem W7 poprzez uzmiennienie stałych. Zabrakło jednak elementarnych czynności związanych z tym uogólnieniem: litery wystąpiły jako nazwy ogólne i zmienne, nie zostały opisane oznaczenia dla wprowadzonych symboli P_n, P_2 (funkcjonują jedynie na rysunku), nie podany zakres zmiennej n. Zabrakło sprawdzenia tego wzoru dla wyrazów początkowych, co być może uświadomiłoby popełnione błędy.

Przykład 3. Uogólnienie rozumowania z przykładu, skojarzenie z polem trójkąta



Zadanie **„Schodki”**

$n=4$ $n=5$

$\frac{5^2}{2}+\frac{5}{2}$ $\frac{6^2}{2}+\frac{6}{2}$

1. Sformułuj regułę według której tworzono kolejne figury.

$\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{n+1}{2}$

$n \rightarrow$ numer figury

2. Gdyby kontynuowano rysowanie „schodków”. Z ilu kwadratów złożona będzie

siódma figura $\frac{(7+1)^2}{2}+\frac{7+1}{2}=\frac{64}{2}+\frac{8}{2}=32+4=36$

dziesiąta figura, $\frac{(10+1)^2}{2}+\frac{10+1}{2}=\frac{121}{2}+\frac{11}{2}=\frac{132}{2}=66$

setna figura $\frac{(100+1)^2}{2}+\frac{101}{2}=\frac{10\,201}{2}+\frac{101}{2}=\frac{10\,302}{2}=5151$

n-ta figura ? $\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{n+1}{2}$

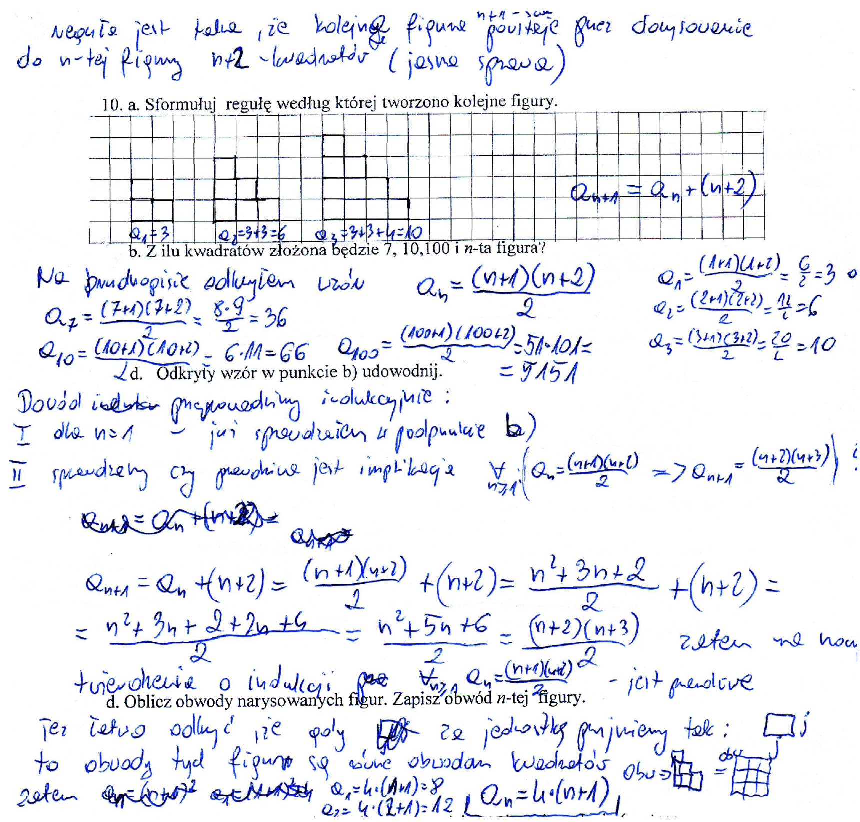
Odkryty wzór uzasadnij.

Rysunek

Rysunek 12. Przykład 3, praca N53.

Osoba ta skojarzyła liczbę kwadratów wykorzystanych do rysowania figury z obliczeniem pola figury. Dorysowała dwie figury, dla których konkretnie przeliczyła pole, przyjmując kwadrat za jednostkę. Rysunki wskazują sposób obliczenia pola figury. Długość boku kwadratu wyrażona została liczbą o 1 większą od numeru figury. Następnie poprzez uogólnienie rozumowania typu indukcyjnego i uzmiennienie stałych sformułowana została reguła (R3) za pomocą wzoru (W3) wraz z określeniem znaczenia litery n we wzorze (rozpoczynając od $n = 1$). Poprzez specyfikację wykorzystany został wzór do policzenia liczby kwadratów w siódmej, dziesiątej i setnej figurze. Jako uzasadnienie dla odkrytego wzoru, osoba ta wskazała rysunek. Nie dokonała jednak drugiego uogólnienia dla obwodów narysowanych figur, ani ich nie policzyła.

Przykład 4. Skojarzenie z ciągiem arytmetycznym, uogólnienie rekurencyjne i indukcyjne, dowód indukcyjny



Reguła jest taka, że kolejną figurę n+1-szą powstaje przez dorysowanie do n-tej figury n+2 kwadratów (jasna sprawa)

10. a. Sformułuj regułę według której tworzono kolejne figury.

$a_{n+1} = a_n + (n+2)$

$a_1=3$ $a_2=3+3=6$ $a_3=3+3+4=10$

b. Z ilu kwadratów złożona będzie 7, 10,100 i *n*-ta figura?

Na podstawie odkryłem wzór $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $a_1=\frac{(1+1)(1+2)}{2}=\frac{6}{2}=3$ ok

$a_7=\frac{(7+1)(7+2)}{2}=\frac{8\cdot 9}{2}=36$ $a_2=\frac{(2+1)(2+2)}{2}=\frac{12}{2}=6$

$a_{10}=\frac{(10+1)(10+2)}{2}=6\cdot 11=66$ $a_{100}=\frac{(100+1)(100+2)}{2}=51\cdot 101=5151$ $a_3=\frac{(3+1)(3+2)}{2}=\frac{20}{2}=10$

d. Odkryty wzór w punkcie b) udowodnij.

Dowód ~~indukc~~ przeprowadzimy indukcyjnie:

I dla n=1 – już sprawdziłem w podpunkcie b)

II sprawdzamy czy prawdziwa jest implikacja $\forall_{n\geq 1}\left(a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right)$

$a_{n+1}=a_n+(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+(n+2)=\frac{n^2+3n+2}{2}+(n+2)=$

$=\frac{n^2+3n+2+2n+4}{2}=\frac{n^2+5n+6}{2}=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ zatem na mocy twierdzenia o indukcji $\forall_{n\geq 1}\ a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ – jest prawdziwe

d. Oblicz obwody narysowanych figur. Zapisz obwód *n*-tej figury.

Też łatwo odkryć, że gdy za jednostkę przyjmiemy tak: to obwody tych figur są równe obwodom kwadratów obw = zatem $a_1=4\cdot(1+1)=8$ $a_2=4\cdot(2+1)=12$ $a_n=4\cdot(n+1)$

Rysunek 13. Przykład 4, praca S33.

Student dla danych trzech figur najpierw policzył liczbę kwadratów, koncentrował się na sposobie liczenia, rozpisał przy każdej figurze tą sumę na składniki odpowiadające liczbie dokładanych kwadratów w kolejnych schodkach. Kolejne figury oznaczył tak, jak wyrazy ciągu: a_1, a_2, a_3. Zaobserwował rekurencyjną zależność, dobrze ją zapisał słownie (R5) (dodaje $n+2$ kwadraty do n-tej figury) i symbolicznie w postaci wzoru (W5). Warto zauważyć, że uporządkowanie związków z wykorzystaniem symboliki literowej nie przebiegało bez usterek – numer figury $n+1$ jest dopisany nad tekstem, wyrażenie $n+2$ pierwotnie miało postać $n+1$ – świadczy to o weryfikowaniu znaczenia litery n. Odkryty wzór (W9) na liczbę kwadratów w n-tej figurze sprawdził dla $n=1$, $n=2$, $n=3$, a następnie wykorzystał dla siódmej, dziesiątej i setnej figury. Komentarz (OK) przy wyliczeniach dla a_1 potwierdza, że sprawdzał, czy n dobrze oznacza numer figury i liczbę jej kwadratów. Dowód wzoru dla liczby kwadratów n-tej figury przeprowadził indukcyjnie. Dla obwodów figur rozwiązujący posłużył się uogólnieniem indukcyjnym, policzył obwody dwóch pierwszych figur, dokonał dla numeru figury uzmiennienia stałej, zapisał wzór (W12) i uzasadnił swój sposób rozumowania na rysunku.

W powyższych czterech przykładach zostały zaprezentowane strategie (wiedza i umiejętności) wyznaczania liczby kwadratów n-tej figury z wykorzystaniem: sumowania liczb naturalnych od 1 do $n+1$, obliczania pól figur oraz zależności algebraicznych (odkrywanych w postaci wzorów i sprawdzanych). Wystąpiły w nich rozumowania rekurencyjne i indukcyjne. Pojawiły się także trudności z ustaleniem zależności między numerem figury a liczbą dokładanych kwadratów i liczbą kwadratów w figurze. Pojawiły się różne sposoby korzystania ze wzorów.

3.4. Dostrzegane regularności w rysowaniu kolejnych figur i formułowane reguły

Na etapie zrozumienia zadania i poszukiwania reguły dla narysowanych figur rozwiązujący dokonywali obserwacji rysunków, prostych matematyzacji z użyciem liczb, działań arytmetycznych lub pojęć geometrycznych, przedłużali ciąg figur na rysunkach lub w wyobraźni, dostrzegali (abstrahowali) pewne wspólne cechy, które zachowywały się, mimo „zwiększania się" figur. Wykonywali wiele różnych czynności konkretnych lub wyobrażonych. Na tym etapie rodziły się pomysły na to, co i jak uogólnić. Popełnione błędy decydowały o tym, czy sformułowane reguły i uogólnienia są poprawne, czy nie (jak pokazuje przykład 2), a zweryfikowane pomyłki (jak w przykładzie 4) prowadziły do poprawnych uogólnień. Skupienie uwagi na sposobie liczenia kwadratów w figurze, a nie tylko na tym, z ilu kwadratów utworzona jest figura, zwiększało szansę na dobre uogólnienie. Można uznać, że autorzy rozwiązań częściej wnioskowali empirycznie lub intuicyjnie w szczególnych przypadkach (Krygowska, 1967, s. 56-67). Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że analizowane były prace osób o dość dużym doświadczeniu matematycznym, a tych dodatkowych, konkretnych czynności, wychodzących poza dane w zadaniu, na tym etapie było wiele. Najczęściej pojawiające się czynności przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Zestawienie czynności ujawnionych przez studentów i nauczycieli na etapie poszukiwania zależności

Wykonywane czynności na etapie badania danej sytuacji	Liczba prac	
	studentów S=106	nauczycieli N=130
Liczyli dokładane kwadraty do kolejnych figur lub wszystkie kwadraty w figurach, wśród nich:	61 (58%)	110 (85%)
liczyli dla czterech początkowych figur,	25	26
dla siedmiu początkowych figur,	13	31
dla dziesięciu początkowych figur.	11	15
Rysowali kolejne figury (schodki), wśród nich:	51 (48%)	85 (65%)
rysowali jeden rysunek,	46	56
dwa rysunki,	5	29
schodki o numerze 7,	1	6
rysowali, dopełniając do kwadratu,	6	14
dopełniając do prostokąta,	3	9
trójkąt w „schodkach".	1	10
Poszukiwali wzoru albo powoływali się na twierdzenie o sumie skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego.	65+14 (75%)	67+8 (57%)

Informacje przedstawione w tabeli dają ogólne spojrzenie, które czynności i jakie środki wykorzystywali rozwiązujący zadania. Nauczyciele częściej niż studenci liczyli kwadraty w figurach. Prawie 10% osób w każdej grupie liczyło (dodawało) kwadraty aż dla dziesięciu „schodków". Warto zwrócić uwagę na to, że prawie 50% studentów i 65% nauczycieli, mając trzy narysowane figury, „chciało widzieć", jaka jest czwarta figura i rysowało ją, a około 20% nauczycieli rysowało dwie kolejne figury. Nauczyciele (25%) częściej niż studenci (9%) próbowali kojarzyć narysowane figury z kwadratami, prostokątami lub trójkątami. Studenci częściej niż nauczyciele poszukiwali wzorów lub wyrażeń algebraicznych dla zapisania dostrzeżonych zależności. 5% studentów i 5% nauczycieli nie podjęło próby sformułowania reguły ani słownie, ani symbolicznie. W kilku przypadkach rozwiązujący nie pisali reguły w pierwszym pytaniu, tylko od razu liczyli i przystępowali do dalszej części zadania, a regułę formułowali dopiero na końcu. Prawie 35% osób z każdej z grup zapisało reguły w formie słownej lub z wykorzystaniem działań arytmetycznych, z pomocą wzorów lub wyrażeń – blisko 50% osób w każdej grupie. Liczba podejmowanych prób i skreśleń potwierdza, że dla większości nauczycieli dostrzeżenie i sformułowanie zależności oraz dokonanie uogólnienia dla liczby kwadratów w dowolnej figurze było zadaniem nietypowym. 75% studentów i 50% nauczycieli poprawnie sformułowało regułę i zapisało dobrze chociaż jedną z nich wzorem. Sformułowane reguły i zapisane wzory w rozwiązaniach zadań 1 i 2 zestawiłam w tabeli 2. Liczby zarówno wskazanych reguł, jak i zapisanych wzorów w tabeli 2 są większe od liczby studentów i nauczycieli, ponieważ prawie połowa studentów podała słownie lub symbolicznie jedną regułę i jeden wzór, a pozostali podali po dwie reguły, pięciu podało nawet trzy, a pięciu nie podało żadnej reguły ani wzoru. Podobnie wśród nauczycieli – więcej niż jedna reguła pojawiła się w 31 pracach, a w jednej pracy pojawiło się nawet 6 reguł.

Reguła R1 pojawiła się w pracach z wyraźnie sformułowanym zapisem sumowania początkowych liczb naturalnych ze wzorem pierwszym i wzorem drugim u prawie 25% studentów i 30% nauczycieli (pierwszy wiersz w tabeli 2). Pojawiała się także R1 w postaci tylko wzoru drugiego, często bez objaśnień, jako sposób sprawnego liczenia sumy liczb naturalnych u 20% studentów i 20% nauczycieli. W kilku uzasadnieniach rozwiązujący ujawniali, że traktowali wzór w postaci iloczynu jako „typowy wzór" lub „odkryty wzór" (przez siebie). Wzór w postaci iloczynu pojawiał się także w wyniku rozumowania wykorzystującego twierdzenia o sumie skończonej ciągu arytmetycznego, na etapie poszukiwaniu wzoru w regule R9. Skojarzenie z ciągiem arytmetycznym i obliczanie skończonej sumy było również wykorzystywane w zapisie wzoru dla reguły R8. Reguła R1 zapisana w postaci wzoru pojawiała się najczęściej zarówno w pracach studentów, jak i nauczycieli. Obserwacja poczyniona dla uczniów, że łatwiej im rozumować na liczbach, ma i w tej grupie badanych potwierdzenie.

Tabela 2. Zestawienie reguł oraz wzorów formułowanych przez studentów i nauczycieli

Formułowane reguły dla liczby kwadratów	Liczba prac S=106	Liczba prac N=130	Zapisane wzory[6] dla $n \geqslant 1$	Liczba prac S=106	Liczba prac N=130
R1 – sumowanie początkowych liczb naturalnych lub korzystanie ze wzoru na sumę początkowych liczb naturalnych	27	40	$f_n = 1+2+3+...+(n+1)$	25	40
	21	26	$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	46	66
R2 – skojarzenie z połową pola prostokąta	3	3	$f_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	1	1
R3 – skojarzenie z polem trójkąta (połową kwadratu)	1	8	$f_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{n+1}{2}$	0	14
R4 – skojarzenie z symetrią kwadratu	0	3	$f_n = ((n+2)^2 - (n+2)):2$	0	2
R5 – dokładanie warstwy o jeden kwadrat większej do figury poprzedniej	61	13	$f_1 = 3$ i $f_n = f_{n-1} + (n+1)$, dla $n \geqslant 2$	27	13
R6 – kwadrat z dwóch kolejnych figur	8	11	$f_1 = 3$, $f_n = (n+1)^2 - f_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$	6	7
R7 – dokładanie do $n-2$ figury warstwy poziomo i pionowo	1	1	$f_1 = 3$, $f_2 = 6$, $f_n = f_{n-2} + (2n+1)$ dla $n \geqslant 3$	0	1
R8 – dodawanie do liczby 3 kolejnych liczb naturalnych od 3 rozpoczynając	45	50	$f_n = 3 + \frac{(n+4)(n-1)}{2}$	22	1
R9 – skojarzenie z ciągiem arytmetycznym	14	8	$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	8	7
R10 – skojarzenie z liczbami trójkątnymi	0	1	$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	0	0
błędne wzory				19(18)%	13(10%)
brak wzorów				5(5%)	32(25%)

Reguła R8 pojawiła się u 42% studentów i 38% nauczycieli jako opis liczby kwadratów w figurach i opis przyrostu liczby kwadratów o kolejne liczby naturalne, od liczby 3 rozpoczynając. Zapisanie tych zależności w postaci wzoru sprawiło zarówno nauczycielom, jak i studentom duże trudności. Nie łatwo było uogólnić, obserwując różnice czy ilorazy liczb, albo odgadując wzór ogólny, gdy znane jest kilka pierwszych wyrazów. Najłatwiej było przejść do sumy początkowych liczb naturalnych, jak w przykładzie 1. Tylko połowa studentów zapisała tą zależność poprawnie w postaci wzoru, a wśród nich 7 studentów powołało się na twierdzenie o sumie skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego. Tylko jednemu nauczycielowi udało się zapisać regułę R8 w postaci wzoru.

[6] Dla innych n warunki przy wzorze.

Więcej niż połowa studentów sprecyzowała regułę R5, dokładniej analizując przejście rekurencyjne między f_{n-1} a f_n (albo f_n i f_{n+1}) istotne dla uogólnień i uzasadnień we wzorach związanych z regułami R1, R8 i R9. Zapisać tą regułę w postaci wzoru potrafiła tylko połowa z tych studentów, którzy ją sformułowali. Jednak sformułowanie tylko reguły R5 (co miało miejsce w przypadku 13 studentów), nie pozwalało podać efektywnego wzoru na liczbę kwadratów w dowolnej figurze. Reguła R5 w powiązaniu z regułami R1 i R8 pozwalała przeprowadzić indukcyjny dowód wzorów związanych z tymi regułami, a w powiązaniu z regułą R6 wyliczyć algebraicznie ilość kwadratów w n-tej figurze.

Reguły R1-R4 pojawiały się w wyniku indukcyjnego rozumowania poprzez **uogólnienie rozumowania i uzmiennienie stałej**. Reguły R5-R7 zostały sformułowane w wyniku **rozumowań rekurencyjnych** i opisują, przy początkowych danych przedstawionych na rysunku, zależności pomiędzy dowolnymi dwoma kolejnymi figurami (lub, jak w R7, pomiędzy daną i przed poprzednią figurą). Reguły R8-R10 są wynikiem **uogólnień indukcyjnych lub zastosowania twierdzeń o ciągach liczbowych** z wykorzystaniem rozumowań rekurencyjnych w początkowym etapie. Po uświadomieniu sobie konieczności żmudnego liczenia wartości pośrednich w rozumowaniach rekurencyjnych (jak w przykładach 1 i 4) pojawiały się uogólnienia indukcyjne. Najczęściej pojawiały się reguły R1, R5 i R8, w których liczba kwadratów w kolejnych „schodkach" opisana została z pomocą liczb i działań na liczbach. Reguły związane z dostrzeganiem zależności geometrycznych i użyciem języka geometrii (R2-R4 i R6) pojawiły się w 12% prac studentów i 20% prac nauczycieli.

Wzory związane z regułami R1, R8 i R9 częściej pojawiały się wówczas, gdy wnioskowanie empiryczne dotyczące narysowanych lub dorysowanych figur ukierunkowane było na **sposób liczenia**, a nie tylko na liczbę wszystkich kwadratów w figurze. Sformułowanie reguły słownie wymagało „giętkości" i precyzji języka, a ich zapis symboliczny był sprawdzianem ich poprawności i dokładności. Zapis symboliczny w postaci wzorów ukazuje „siłę" formalnego języka, gdy się go rozumie i umie zinterpretować. Przełożenie słowno-symbolicznego języka reguł na język wzorów okazało się trudne, jak wskazują liczby w tabeli 2 w drugiej i trzeciej kolumnie oraz piątej i szóstej (za wyjątkiem pierwszego i drugiego wiersza).

Drugą sytuacją, w której należało zapisać uogólnienia, były obwody narysowanych figur. Sposoby zapisu, jakie się pojawiły, przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Uogólnienia dla obwodów figur podane przez studentów i nauczycieli

Formułowane uogólnienia dla obwodów figur	Liczba prac	
	S=106	N=130
W11: $b_n = (n+1) + (n+1) + 2(n+1)$	18	9
W12: $b_n = 4(n+1)$	16	27
W13: $b_1 = 8$ i $b_n = b_{n-1} + 4$ dla $n \geqslant 2$	17	4
W14: $b_n = 8 + 4(n-1)$ dla $n \in N_1$	28	8
W15: $b_n = 4(n+1)$ wzór ogólny ciągu 8, 12, 16, ...	38	49
Wśród nich błędne uogólnienia	14 (13%)	12 (9%)
Brak prób uogólnienia	7 (7%)	43 (33%)

Stały przyrost w obwodach kolejnych figur o 4 jednostki najprawdopodobniej dostrzegli ci, którzy napisali wzory W14, W13 i W15. Tylko 12 studentów i 1 nauczyciel dostrzegło w tych zmianach ciąg arytmetyczny. Błędne uogólnienia dla obwodów figur, gdy n oznacza numer figury, przedstawiają przykłady: $4n$; $4(n-1)$; $2n+6$; $(n+1)(n+4)$. Pierwsze dwa błędy wynikają z ustalenia złej zależności pomiędzy numerem figury a długością „boku". Ostatni przykład błędu sugeruje mylenie obwodu z polem figury – miało to miejsce w 4 przypadkach. Pojawiły się obliczenia obwodów tylko dla konkretnych liczb w 8 pracach, brak w tych przypadkach uogólnień pozwala z dużą pewnością sądzić, że osoby te nie umiały uogólnić.

3.5. Umiejętność uogólnienia

W serii tych zadań należało zapisać dwa uogólnienia: jedno dotyczące liczby kwadratów w n-tej figurze i drugie dla obwodu tej figury. Porównując uogólnienia dla liczby kwadratów i obwodów figur u poszczególnych osób, można stwierdzić, że tego **samego rodzaju uogólnienia** (poprawnie lub nie) zastosowało 45 studentów (42%) oraz 46 nauczycieli (35%). Najczęściej stosowali uogólnienie indukcyjne i zapis W1 i W11 (43 osoby spośród nauczycieli i 32 osoby wśród studentów). Uogólnienia i zapis W8 oraz W14 wystąpiły u 7 osób, które wykorzystywały twierdzenie o sumie skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego zarówno w liczeniu kwadratów, jak i obwodów figur. Dostrzeżone zależności rekurencyjne (W5 i W13) pojawiły się u 6 studentów. Istotniejsze dla umiejętności uogólniania jest jednak to, czy **w obu przykładach uogólnienia** zostały dobrze przeprowadzone. Takie ilościowe zestawienie przedstawia tabela 4.

Tabela 4. Zestawienie liczby uogólnień dokonanych w obu przykładach przez studentów i nauczycieli

Uogólnienia dla liczby kwadratów i dla obwodów figur	Liczba prac	
	S = 106	N = 130
poprawne obydwa uogólnienia	69	65
jedno błędnie albo jeden brak	28	33
żadne niepoprawne (błędnie lub brak)	8	12
brak prób w obu przykładach	1	20

Poprawnie zapisało uogólnienie w obu przykładach 65% studentów i 50% nauczycieli. Można z dość dużą pewnością uznać, że potrafią oni uogólniać. Obu uogólnień poprawnie nie potrafiło zapisać 9% studentów oraz 24% nauczycieli, wliczając tych, którzy nie podjęli prób w obu przykładach. Studenci, którzy nie podali żadnego uogólnienia poprawnie, otrzymali z egzaminu z dydaktyki niskie oceny (ich wynik z całego egzaminu zaliczony został do „dolnej ćwiartki" wyników). 25% nauczycieli i taka sama część studentów popełniała błędy i ujawniła trudności w uogólnieniu. Nauczyciele z uogólnianiem mieli większe trudności niż studenci.

3.6. Uzasadnienia dla sformułowanego uogólnienia, dowód

Uzasadnieniem zapisanego wzoru dla liczby kwadratów w figurze był najczęściej dowód indukcyjny, taki jak w przykładzie 4. Podawali go studenci, nie wszyscy jednak umieli sobie z tym poradzić. Poprawnie przeprowadziło dowód indukcyjny prawie 40% studentów i jeden nauczyciel a prawie 30% studentów popełniło w dowodzie błędy lub nie umiało go przeprowadzić (możemy to odczytać z tabeli 5).

Tabela 5. Rodzaje uzasadnień i dowodów podane przez studentów i nauczycieli

Rodzaj dowodu lub uzasadnienia dla podanego wzoru	Liczba prac	
	S=106	N=130
D1: Dowód indukcyjny:		
przeprowadzony poprawnie,	**40**	**1**
przeprowadzony z błędami,	30	0
zapowiedziany, ale nieprzeprowadzony.	7	0
D2: Dowód z powołaniem się na twierdzenie o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego (ze wskazanie pierwszego wyrazu i różnicy)	**6**	**4**
D3: Dowód dla sumy $n+1$ początkowych liczb naturalnych	**2**	**13**
D4: Uzasadnienie przez uogólnienie rozumowania z przykładu z wykorzystaniem wzoru na pola figur	**2**	**7**
D5: Uzasadnienie z wykorzystaniem wzorów rekurencyjnych	0	**4**
D6: Uzasadnienie przez podanie wzoru (wpisanie w miejscu na uzasadnienie)	0	17
D7: Uzasadnienie przez przekształcenie algebraiczne jednego wzoru na inny	1	13
D8: Słowne wyjaśnienia (cytaty oddzielone średnikami): *na podstawie obserwacji*; *z rysunku*; *tworząc n-tą figurę dodawaliśmy kwadraty 1, potem 2, i tak dalej*; *pole całego kwadratu podzielone przez 2 i dodana liczba kwadratów na przekątnej.*	0	8
Sprawdzanie przez podstawienie konkretnych liczb do wzoru	1	3
Brak dowodu lub uzasadnienia	17 (16%)	60 (48%)

Studenci dowodzili indukcyjnie zapisany przez siebie wzór określający liczbę kwadratów, nieliczni uświadamiali sobie, że dowodzili twierdzenie o sumie skończonej szczególnego ciągu arytmetycznego. Trójka studentów dowodziła równoważności pomiędzy rekurencyjnym a ogólnym określeniem ciągu. Liczba studentów, którzy poprawnie udowodnili to twierdzenie nie jest zadowalająca. Dowód indukcyjny jest uważany za trudny[7]. Oczekujemy od studentów matematyki, żeby nie tylko rozumieli sens (wiedzieli, kiedy i jak) ale i umieli przeprowadzić tego typu dowód w typowej sytuacji. Widać wyraźną różnicę pomiędzy podejściem studentów do polecenia *udowodnij* a nauczycieli do polecenia *uzasadnij*. Sformułowanie „uzasadnij odkryty wzór" nie było dla wszystkich nauczycieli zrozumiałe, pytało o to 4 albo 5 nauczycieli (w trzech z siedmiu grup) indywidualnie podczas samodzielnego rozwiązywania zadania[8]. Otrzymywali odpowiedź, by podali argumenty, że podany przez nich wzór pozwala dobrze liczyć, ile jest kwadratów w figurze albo opisali rozumowanie, jak „doszli" do wzoru. Podejmowane przez nauczycieli czynności ujawniają jak rozumieli oni, „co to znaczy uzasadnić". Indukcyjne uogólnienia rozumowania przez uzmiennianie stałych (D3, D5) podało 15% nauczycieli.

[7] Z Komentarza do Podstawy Programowej kształcenia ogólnego z grudnia 2008 roku: „Zasada indukcji matematycznej została usunięta całkowicie, również z zakresu rozszerzonego. Jest specyficznie trudna. Jej stosowanie stało się pewnym rytuałem, którego sens pojmowali nieliczni uczniowie" (Semadeni, Karpiński, Sawicka, Jucewicz, Dubiecka, Guzicki, Tutaj, 2009, s. 80).

[8] Pytali o to również uczniowie trzeciej klasy gimnazjum, i pierwszej klasy liceum, gdy rozwiązywali podobne zadania, wśród nich było zadanie „schodki" w łatwiejszej wersji (pierwsza figura składała się z jednego kwadratu). Spośród badanych 114 uczniów uogólnić potrafiło 24% uczniów, uzasadnienia podało 8% uczniów (Legutko, 2009).

Dla innych nauczycieli znaczyło to: „podaj wzór, z jakiego korzystasz” (dla 13% nauczycieli); „przekształć wzór do prostszej postaci” (9%) lub „objaśnij słownie” (6%), „sprawdź dla kilku liczb” (3%).

Uznałam za poprawne uzasadnienia podane przez 22% nauczycieli (w tab. 5. zaznaczone pogrubioną czcionką). Uzasadnienie wzoru dla liczby kwadratów w n-tej figurze z wykorzystaniem reguł rekurencyjnych R5 i R6 pojawiło się w pracach 4 nauczycieli. Na podstawie zależności R5 i R6 zapisany został układ równań:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = n + 1, \\ a_n + a_{n-1} = (n+1)^2. \end{cases}$$

Po dodaniu stronami wyznaczone zostało $2a_n = (n+1) + (n+1)^2$, a stąd $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Nie uznawałam wpisania wzoru ani jego przekształcania do postaci równoważnej w tym zadaniu, jako poprawne uzasadnienie, jeśli rozwiązujący nie przedstawił rozumowania, z którego otrzymał ten wzór, albo nie powołał się na twierdzenie o sumie n wyrazów ciągu arytmetycznego i nie sprawdził, że stosuje go do ciągu arytmetycznego. Brak uzasadnienia u połowy nauczycieli wiąże się z tym, nie mieli czego uzasadniać, bo tylko połowa z nich podała uogólnienie.

3.7. Trudności z użyciem liter w zapisaniu zależności

Wśród podejmowanych prób użycia liter w zapisie zależności można było wyróżnić:

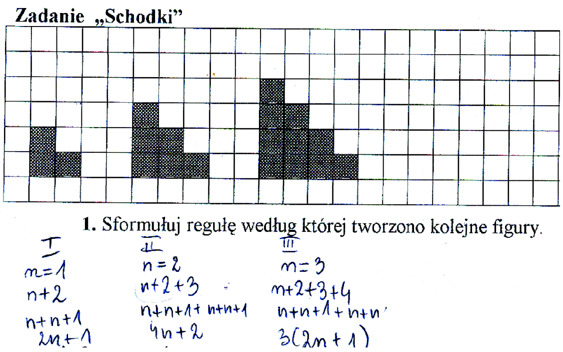
T1. Trudności z **uogólnieniem przez uzmiennienie stałej i wprowadzeniem opisu w języku matematycznym** dla jednej z trzech zależności w taki sposób, by później równocześnie ująć wszystkie te trzy zależności jednym wzorem (Te zależności to spostrzeżenia 4, 5, 6 w p. 2.1). Niektóre z tych trudności pojawiły się w sformułowaniu reguły w przykładzie 1, np. co oznacza litera n, ile kwadratów dokładamy do poprzedniej figury. Dalsze trudności tego typu pokazują poniżej przykłady 5-9 Potwierdzały te trudności osoby w rozmowach: *nie umiałam powiązać numeru figury z liczbą dokładanych kwadratów* albo *nie powiązałem numeru figury z liczbą jej wszystkich kwadratów.*

T2. Trudności **z użyciem litery** n, **w działaniach na wskaźnikach** np. $n-1$, $n+2$, czyli w innych podzbiorach liczb naturalnych innych niż $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Ilustrują to przykłady 1, 2, 10 i 11 Pierwsza figura składała się z trzech kwadratów (a nie jednego), do pierwszej figury dokładane są trzy kwadraty (a nie jeden); dla n-tej figury dodajemy liczby od 1 do $n+1$). Wymusza to sformułowanie ograniczeń dla zmiennej n albo zmiany w numeracji figur (w istocie określenie nowego ciągu). Studenci mówili o tym: *wiedziałem, że trzeba „przenumerować wskaźniki”, ale nie umiałam (nie zrobiłem) tego dobrze.*

T3. Trudności **w sumowaniu nieparzystej ilości liczb naturalnych** (przedstawione w przykładzie 12 i 13). Wynikają one z błędnych „ułatwień” w liczeniu bądź z nieznajomości sposobu sumowania kolejnych liczb naturalnych niezależnego od liczby składników sumy.

Poniżej zacytowane są przykłady popełnionych błędów i ujawnionych trudności wraz z komentarzami i próbami interpretacji.

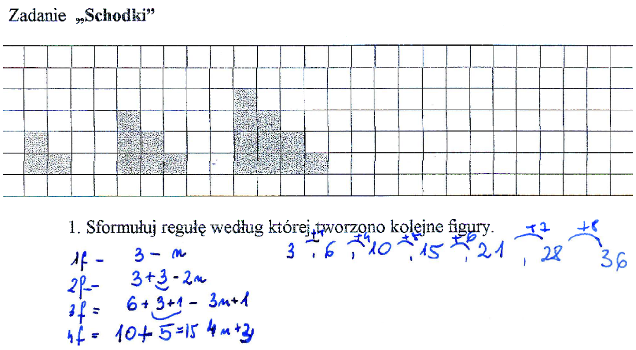
Przykład 5. Trudności z powiązaniem liczby dokładanych kwadratów z numerem figury w poszukiwaniu wzoru ogólnego (T1)



Rysunek 14. Przykład 5, praca N1.

W tym przykładzie litera n ma równocześnie wiele znaczeń. Przy zapisie $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ litera n oznacza numer kolejnej figury. Zapoczątkowane uzmiennienie stałej nie jest kontynuowane. Dalsze zapisy wskazują na jakąś próbę uzmienniania liczby dokładanych kwadratów w kolejnych figurach. Gdy w trzecim z dopisanych wierszy podstawimy $n = 1$, otrzymamy liczbę kwadratów w figurach, w pozostałych wyrażeniach już nie. Podstawienie $n = 3$ w wyrażeniach pod trzecią figurą w żadnym wyrażeniu nie opisuje liczby jej kwadratów. W tworzonych wyrażeniach jest podstawianie za $n+2$ wyrażenia $n+n+1$, a dalsze przekształcenia nie zawsze są wykonane zgodnie z regułami obowiązującymi przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych ($4n + 1 \neq 3(2n + 1)$). Za n podstawiane są kolejne liczby, nie ma miejsca uogólnianie, jest raczej specyfikacja. W konsekwencji dobry początek pracy nad sformułowaniem reguły kończy się napisaniem różnych wzorów, które nie określają liczby kwadratów w figurach. Próby zapisu (i odczytu) znaczenia litery n z zapisanych wyrażeń zakończone zostały niepowodzeniem.

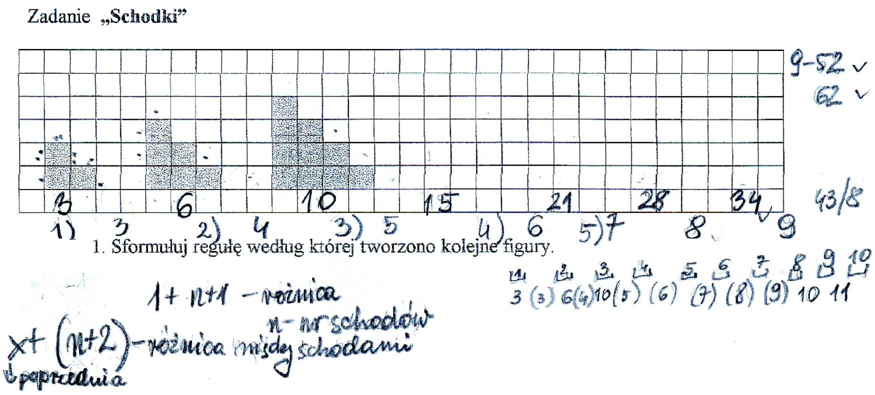
Przykład 6. Trudności z zapisaniem liczby kwadratów w dowolnej figurze (T1)



Rysunek 15. Przykład 6, praca N41.

W tym przykładzie została wyróżniona liczba $n = 3$ jako stała (pierwsza figura składa się z 3 kwadratów i do niej dołożono 3 kwadraty, by powstała druga). Przy takim rozumieniu litery n widoczne są starania, by zapisać z jej użyciem konkretne wartości wyliczonej liczby kwadratów w kolejnych figurach, przedstawione na grafie. Pomysł, by liczby kwadratów w ponumerowanych figurach opisywały kolejne wielokrotności liczby 3 zawodzi już dla trzeciej i czwartej figury, więc dodawane są kolejne liczby naturalne, by liczba kwadratów w figurze się zgadzała (**by wynik się zgadzał**). W efekcie dla każdej figury jest inny wzór na liczbę jej kwadratów, brakuje wzoru ogólnego. Rekurencyjna obserwacja, jak się zmienia liczba kwadratów pomiędzy dwoma kolejnymi dowolnie wybranymi figurami, nie została zapisana z użyciem litery n. Być może zabrakło także sprecyzowania sposobu, jak liczyć wszystkie kwadraty w figurze.

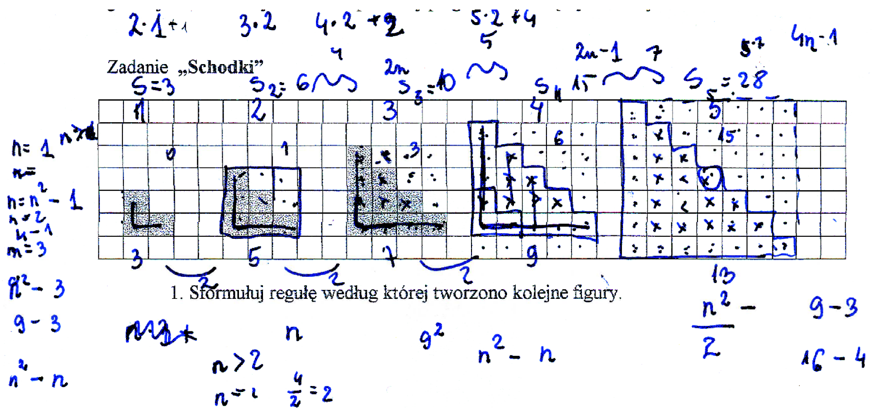
Przykład 7. Trudności z zapisem zależności pomiędzy kolejnymi figurami (T1)



Rysunek 16. Przykład 7, praca N48.

Autor rozwiązania ponumerował figury (liczbami z nawiasem) literą n oznaczył numer „schodków” zgodnie z treścią zadania i zauważył konieczne trzy zależności dla dziesięciu figur (poprawnie dla sześciu). Zapisał, że w kolejnych figurach jest dokładanych o jeden więcej kwadratów niż ich było dokładanych do figury poprzedniej (liczby w podwójnym nawiasie). Zauważył i uogólnił, że w każdej kolejnej figurze ilość kwadratów zwiększa się o 2 w stosunku do numeru figury. Zaobserwował, że w ciągu figur zmienia się zarówno numer figury, jak i liczba dokładanych kwadratów, wprowadził dwie różne litery, funkcjonujące niezależnie od siebie. Nie powiązał numeru figury i liczby dokładanych kwadratów z (trzecią zależnością) liczbą kwadratów w figurze. Przykład ten ujawnia istotną trudność, że uogólnienie dotyczy całości sytuacji i w pewnym momencie równocześnie trzeba powiązać wszystkie te elementy. Lubomirski (1983, s. 91) ujmuje to zwięźle tak: „uogólnić cokolwiek – to znaczy w pewnym sensie uogólnić wszystko od razu”. Jednak, gdy chce się wszystkie zależności ująć równocześnie, trzeba mieć każdą z nich jasno sprecyzowaną. Ilustruje tę uwagę także przykład 8.

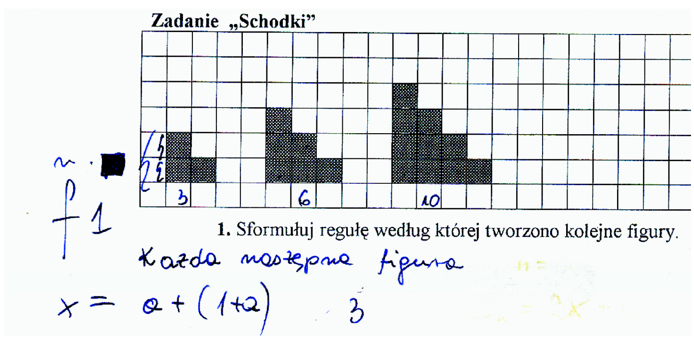
Przykład 8. Swobodne posługiwanie się zapisem literowym, brak jasno sprecyzowanej reguły



Rysunek 17. Przykład 8, praca N58.

Można przypuszczać, że po policzeniu kwadratów w figurach ($S_1 = 3$, $S_2 = 6$, $\ldots, S_6 = 28$) i liczeniu dokładanych kwadratów (3, 5, 7, 9), osoba ta wypisywała zależności algebraiczne i sprawdzała, która z nich określa liczbę kwadratów w figurze. Mimo swobody w posługiwaniu się zapisem literowym (w uogólnianiu i sprawdzaniu), żadna z podjętych (co najmniej trzech) prób uogólnienia zaobserwowanych regularności nie zakończyła się powodzeniem. U źródeł tych symbolicznych zapisów można się dopatrywać reguł (R6, R7 i R4). Jednak zabrakło dokładnej obserwacji poszczególnych elementów sytuacji, wyróżnienia i oznaczenia zmieniających się wielkości oraz sformułowania i zapisania zależności pomiędzy nimi. Zabrakło umiejętności w zakresie elementarnej matematyzacji dotyczącej np. nieparzystej liczby kwadratów przy prostokątnych bokach figury (zaznaczonych kreską i policzonych, ale uogólnionych niepoprawnie), czy też zapisania liczby kwadratów w połowie n-tego kwadratu i „na przekątnej”.

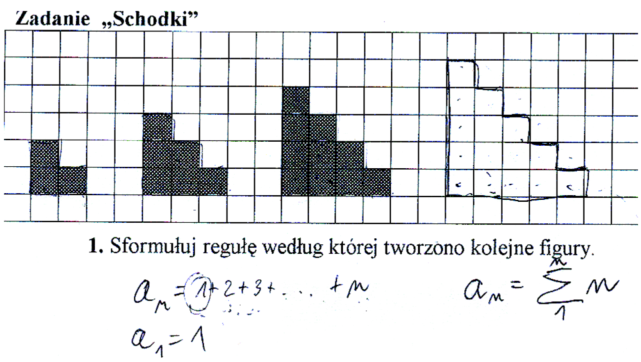
Przykład 9. Trudność w ustaleniu zależności między wielkościami i brak opisu znaczenia liter



Rysunek 18. Przykład 9, praca N3.

Wprowadzono trzy litery, żadnej nie opisano. Mimo zapisania znaku równości, nie można mówić o próbach powiązania z sobą zmiennych x i a, co do których możemy się jedynie domyślać, że oznaczają liczbę kwadratów w kolejnych figurach. Litera a najpierw jest kodem dla liczby kwadratów w figurze, a zaraz obok w nawiasie oznacza prawdopodobnie liczbę kwadratów w warstwie dokładanej do figury. Zabrakło dokładnego sprecyzowania zależności.

Przykład 10. Trudności z „przenumerowaniem” figur (T2)

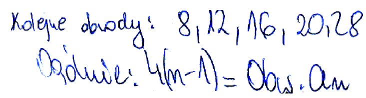


Rysunek 19. Przykład 10, praca N2.

W tym przykładzie osoba przyjęła figurę złożoną z jednego kwadratu jako pierwszą, by ułatwić sobie zapis. Wówczas a_2 wyznacza liczbę kwadratów w pierwszej figurze, a_n liczbę kwadratów w figurze $n-1$ przy warunku, że wzór zachodzi dla $n \geqslant 2$. Pod znakiem uogólnionej sumy pojawiła się zmienna n sumowana od 1 do n, a wystarczyło zmienić jej nazwę i sumować od 1 do $n+1$, by zapisać poprawnie liczbę kwadratów w n-tej figurze albo „przenumerować” indeks przy a_n z n na $n-1$ dla $n \geqslant 2$. Takie postępowanie można próbować wyjaśniać tym, że najczęściej zapisujemy ciągi i szeregi, począwszy od $n = 1$ albo $a_1 = 1$ i kończymy na n. W tym przykładzie ujawniła się trudność (T3) związana z modyfikacją znanego schematu opisu.

Przykład 11. Trudności z ustaleniem zależności między numerem figury a długością boku (T2)

Przy uogólnieniu dla obwodów figur podawane były wzory $a_n = 4n$ albo $a_n = 4(n-1)$, które nie opisują obwodów w danej sytuacji. Łatwo to można sprawdzić dla narysowanych trzech pierwszych figur o obwodach równych 8, 12, 16 jednostek.

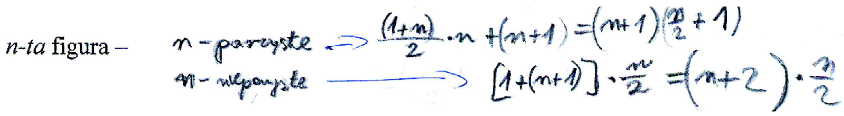


Rysunek 20. Przykład 11, praca N25.

Specyfikacja dla $n = 1$ lub $n = 2$ pozwala w momencie sprawdzić, że uogólnienie nie jest poprawne. Ponieważ takie błędy ujawniło 23 studentów (22% badanych), błędy te można wyjaśniać brakiem samokontroli w zapisie uogólnienia.

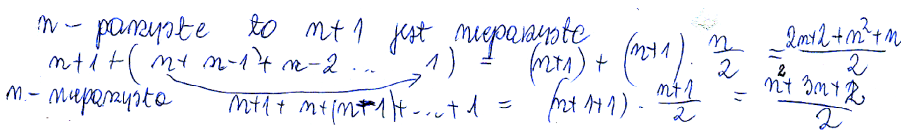
Przykład 12. Błędne sumowanie kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n+1$, gdy n jest liczbą nieparzystą (T3)

Rozwiązujący opisał innymi wyrażeniami sumę liczb dla liczby parzystej i dla liczby nieparzystej. Nie zwrócił uwagi na to, że gdy n jest nieparzyste, to i $n+2$ jest nieparzyste, wówczas iloczyn $(n+2)\cdot\frac{n}{2}$ nie jest liczbą całkowitą i nie wyznacza liczby kwadratów w figurze.



Rysunek 21. Przykład 12, praca N25.

Przykład 13. Trudności w sumowaniu kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n+1$ w zależności od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy nieparzystą (T3)



Rysunek 22. Przykład 13, praca N35.

W tym przykładzie oddzielony został nawiasem największy, nieparzysty składnik od sumy pozostałych, by obliczyć sumę kolejnych liczb naturalnych przez „łączenie w pary" pierwszej z ostatnią liczbą w nawiasie, drugiej z przedostatnią itd., aby następnie obliczyć iloczyn liczby par przez sumę elementów pary. Takie podejście wpływa na rozróżnienie sytuacji, kiedy składników jest parzysta, a kiedy nieparzysta liczba. Osoba ta, chociaż realizowała „pomysł Gaussa", ujawniła, że nie zna jednego sposobu na obliczenie sumy kolejnych liczb naturalnych. Jest on realizowany, ale nie w taki sposób, by osiągnąć cel przy zminimalizowanym wysiłku. Można to także zinterpretować jako brak unifikacji sposobów liczenia, jakie kiedyś osoba ta poznała. Warto jeszcze zwrócić uwagę na końcowy zapis wzoru, nie w postaci iloczynu, ale połowy trójmianu kwadratowego.

Podsumowując, **ujawnione trudności z użyciem liter dotyczą matematyzacji na elementarnym poziomie**: ustalenia zmiennych w danej sytuacji, wprowadzenia dla nich oznaczeń, zbadania zależności między tymi zmiennymi i opisania ich w języku działań i relacji matematycznych. Łatwiej opisać te zależności, gdy dostrzeże się sposób tworzenia kolejnych figur i jasno się go sprecyzuje. Skoncentrowanie się na liczbach i szukanie dla liczb zależności ogólnych okazało się trudniejsze w przypadku określenia liczby kwadratów, z których złożona jest n-ta figura. Widoczne jest to w formułowaniu reguły R8 i jej zapisie w postaci wzoru (w tabeli 2). Jednak błędy i brak prób przy uogólnieniu obwodu tych figur oraz trudności w dodawaniu kolejnych liczb naturalnych do $n+1$ raczej potwierdzają braki umiejętności w elementarnych matematyzacjach.

3.8. Wnioski z analizy rozwiązań

1. Rozwiązania zadań serii „schodki" pokazały ogromną **różnorodność matematycznego myślenia w zakresie dostrzegania regularności**. Sformułowanych zostało, co najmniej 10 reguł i co najmniej 8 zapisów uogólnień z pomocą wzorów i wyrażeń algebraicznych. Różnorodność i ilość czynności konkretnych podejmowanych przez rozwiązujących w poszukiwaniu uogólnienia zależności ukazuje, jak indywidualnie przebiega proces matematyzacji w tym przypadku. Jak wiele osób potrzebuje wsparcia dla swojej wyobraźni i abstrakcyjnych operacji w działaniach na konkretnych liczbach i rysunkach, (co najmniej 23% studentów i 35% nauczycieli liczyło kwadraty kolejno, aż do siódmej figury, a prawie połowa dorysowywała czwarte schodki). **Dobre, dokładne wnioskowania w konkretnej sytuacji są podstawą dobrych uogólnień.**

2. **Poprawnie dwa uogólnienia** dla liczby kwadratów i obwodów figur podało 65% studentów i 50% nauczycieli. Możemy uznać, że oni potrafią uogólnić i zapisać symbolicznie dostrzeżone zależności. Podstawą tych uogólnień było najpierw dostrzeżenie rekurencyjnych zależności pomiędzy kolejnymi figurami tworzonymi według reguły przedstawionej na rysunku oraz uogólnienie indukcyjne lub uogólnienie rozumowania z przykładu.

3. **Uzasadnienie** czy **udowodnienie** sformułowanego uogólnienia okazało się trudne. Tą umiejętnością wykazało się 48% studentów, dowodząc indukcyjnie lub powołując się na twierdzenie o sumie skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego, i 22% nauczycieli, korzystając z uogólnienia przez uzmiennienie stałej, twierdzenia o sumie początkowych, kolejnych n liczb naturalnych lub uogólnienie rozumowania z przykładu z wykorzystaniem pola figur.

4. **Trudności z użyciem liter w opisie zależności** w obu zadaniach ujawniło 24% nauczycieli i 9% studentów. Trudności te dotyczyły matematyzacji prostych zależności, które trzeba było uwzględnić w uogólnieniu, w uzmiennianiu stałej dla liczb naturalnych. Większa liczba studentów niż nauczycieli, dokładnie określała, ile trzeba dołożyć kwadratów przy przejściu między dwoma kolejnymi figurami, formułując regułę rekurencyjną (R5). Ta obserwacja i dobre jej zapisanie okazało się niezbędne do poprawnego uogólnienia i uzasadnienia.

5. W zapisie liczby elementów dowolnej figury wiele osób ujawniło swoje podejście do **wyprowadzania, zapisu i stosowania wzorów**. Polecenie uzasadnij „odkryty" wzór, dla wielu nauczycieli nie znaczyło przedstawienia argumentów, na podstawie których wzór został napisany. Ponad 20% nauczycieli podało wzór, z którego korzystało lub przekształcało go algebraicznie. Nie objaśniali, w jaki sposób go wyprowadzili. Pojawiły się różne wzory i czasem w ich poszukiwaniu brakowało naturalnego, dobrze zorganizowanego i ekonomicznego myślenia zakończonego prostym wzorem, z którego łatwo dałoby się obliczyć liczbę kwadratów w figurze. Jako przykład może posłużyć wzór $(n+1)^2 - \frac{(n+1)n}{2}$związany z regułą R6, którym wyznaczano liczbę kwadratów w n-tej figurze, a odjemnik oznacza liczbę kwadratów w poprzedniej

figurze liczoną znacznie prostszym sposobem. W korzystaniu ze wzoru na sumę liczb naturalnych lub sumę ciągu arytmetycznego pojawiała się postać $S_n = \frac{n^2+3n+2}{2}$ (w 15% prac studentów), trudniejsza do zapamiętania i przypomnienia, jakby postać iloczynowa nakazywała wykonanie mnożenia. I tu czasami pojawiały się błędy, które nie były korygowane, gdy osoba nie pamiętała w danym momencie, w jaki sposób pojawia się taki wzór. Przy korzystaniu ze wzoru, podstawianie wyrażenia $n+1$ w miejsce litery w tym wzorze zastępowano dwoma operacjami, najpierw korzystano ze wzoru dla n i dodawano $n+1$. W większości wzorów, tych wyprowadzanych jak i tych, z których korzystano, nie były opisane **oznaczenia liter** i często nie było określone, **dla jakich n wzór ten można stosować.**

6. Na zadanie wymagające policzenia wszystkich kwadratów w figurze spojrzało jak na obliczanie **pola tych figur** niewielu rozwiązujących (9% studentów i 18% nauczycieli). Jeszcze mniejsza ich liczba (około 6% nauczycieli i 2% studentów) wykorzystała to w tworzeniu uogólnienia i uzasadnienia. W dyskusji z nauczycielami widoczne było czasem zaskoczenie, że *nie przeformułowali sobie pytania o liczbę kwadratów, z jakich złożona jest figura, na pytanie o jej pole.* Wielu było zdziwionych tym, jak zmienia się spojrzenie na zadanie przy wykorzystaniu pola i jak staje się ono wówczas dostępne dla uczniów gimnazjum. Na wybór strategii w nowej sytuacji ma wpływ doświadczenie w rozwiązywaniu zadań i przyzwyczajenie do typowych poleceń.

7. Około 12% studentów i 5% nauczycieli dostrzegło w tej serii zadań **ciąg arytmetyczny**. Wykorzystywali go w liczeniu kwadratów w figurach (13 studentów i 1 nauczyciel), w zapisywaniu obwodów (12 studentów i 1 nauczyciel), w uzasadnianiu wzoru (6 studentów i 4 nauczycieli). Nie wszyscy jednak umieli z niego dobrze skorzystać, bo albo nie odtworzyli dobrze wzoru z pamięci, albo stosowali go do ciągu, w którym różnica nie była stała. W jednej tylko pracy dostrzeżona reguła została sformułowana w ten sposób, że *liczby dokładanych kwadratów w kolejnych figurach tworzą ciąg arytmetyczny, a cała (jedna) figura jest sumą $n+1$ wyrazów tego ciągu, gdy $a_1 = 1, r = 1$.*

8. Tylko jedna osoba (z 236) w rozwiązaniu (na rysunku) nawiązała do liczb trójkątnych. Proces uogólniania w tej serii zadań prowadził do sformułowania warunku definiującego **liczby trójkątne**.

Poniżej obserwacja, niezwiązana z celami badań.

9. Podjęte próby powiązania umiejętności uogólniania z wynikami egzaminu u studentów nie dostarczają informacji pozwalającej sformułować jednoznaczne wnioski. Nie napisali żadnego z dwóch uogólnień ci studenci, których wyniki z całości egzaminu należały do „dolnej ćwiartki wyników” a 60% spośród nich popełniło błędy w uogólnieniach. Studenci z wynikami z „górnej ćwiartki” w 80% przypadków uogólnili poprawnie i podali dowód, a pozostali popełnili błędy w którymś zapisie uogólnienia. Dwa przypadki, jakie się zdarzyły wśród rozwiązań tych zadań, uczą ostrożności w formułowaniu

zbyt ogólnych wniosków wiążących umiejętności uogólniania z matematycznymi umiejętnościami: jedna studentka rozwiązała poprawnie na egzaminie tylko zadanie „schodki" (jedno z dziesięciu), a jeden ze studentów (z wysokim stypendium naukowym) zamiast obwodów (w zadaniu 3) policzył pola tych figur przez *błąd nieuwagi w czytaniu polecenia*, jak wyjaśniał w rozmowie, a *pierwszego zadania nie skojarzył z obliczaniem pola figury, bo to było zadanie na uogólnianie.*

4. Podsumowanie

Uogólnieniu w nauczaniu matematyki powinniśmy poświęcić więcej uwagi, zwłaszcza na etapie zapoznawania uczniów z symboliką literową. Przyczyniłoby się to do lepszego rozumienia liter w zapisach symbolicznych i zmniejszyło liczbę popełnianych błędów w przekształceniach algebraicznych. Wymaga to jednak dalszych badań.

Nie ma w polskiej szkole tradycji uczenia uogólniania przez dostrzeganie regularności, indukcyjne rozumowania, przez uzmiennianie stałej w zbiorze liczb naturalnych. Formalne nauczanie nakazuje użyć od razu ciągów i indukcji matematycznej.

Zadania dotyczące liczb trójkątnych i liczb kwadratowych czy prostokątnych nie należą do typowych zadań rozwiązywanych w szkole. Podejście od graficznego przedstawienia liczb trójkątnych i poszukiwanie reguł ich tworzenia pozwala „odkrywać na nowo" i sformułować warunek definiujący liczby trójkątne $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, gdzie $n \in N_1$. Systematyzując reguły i uogólnienia, jakie pojawiły się w serii zadań „schodki", możemy z uczniami sformułować następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 1
Liczba 1 jest liczbą trójkątną, liczba trójkątna t_n jest od poprzedniej liczby trójkątnej większa o n. Zapisujemy to symbolicznie: $t_1 = 1$ i $t_n = t_{n-1} + n$.

Można wypowiedzieć je inaczej: Każda liczba naturalna jest różnicą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

TWIERDZENIE 2
Suma dwóch kolejnych liczb trójkątnych jest kwadratem liczby naturalnej n, większej od 1.

Symbolicznie można to zapisać: $t_{n-1} + t_n = n^2$ dla $n \in N_2$.

TWIERDZENIE 3
Liczba prostokątna postaci $p_n = n(n + 1)$ jest równa sumie dwóch liczb trójkątnych t_n.

Dowody tych twierdzeń, z wykorzystaniem definicji liczb trójkątnych, sprowadzają się do prostych algebraicznych przekształceń. Propozycję dydaktyczną dotyczącą liczb trójkątnych, prostokątnych i kwadratowych w dedukcyjnym ujęciu, dla nauczycieli i zainteresowanych matematyką uczniów gimnazjum i liceum, przedstawił A. Chronowski (1999, s. 94-97) w *Podstawach arytmetyki szkolnej.*

Wiele twierdzeń o liczbach trójkątnych, wraz z ich historią i wkładem polskich matematyków w poszukiwaniu własności tych liczb w drugiej połowie XX wieku, przedstawił Sierpiński (1962) w książce *Liczby trójkątne*.

Pozostają **pytania otwarte**: czy w ogóle chcemy zapoznać uczniów z liczbami trójkątnymi; czy będzie to w formie ciekawostki o jednych z liczb, jakich wiele jest w matematyce, jak np. liczby doskonałe, bliźniacze, zaprzyjaźnione; czy będzie to „mała wysepka dedukcyjna" (definicja i kilka dowodzonych twierdzeń); czy wykorzystamy je do uczenia dostrzegania regularności, dostrzeganie wspólnego schematu i uogólniania.

Liczby trójkątne (i liczby wielokątne) okazują się być bogatą sytuacją matematyczną do rozwijania aktywności uczniów. Zadania, takie jak w serii „schodki", dają możliwość „widzenia figur", a nie tylko liczenia, formułowania uogólnień, wprowadzania oznaczeń z użyciem liter i sprawdzania. W sposób naturalny pojawia się potrzeba uzasadniania „dlaczego tak?" i dostępne są środki weryfikacji: podstawianie i sprawdzanie, odwołanie się do konkretu i jego ogólnego symbolu, także wykorzystanie rysunku. Pojawiają się błędne uogólnienia, które uczą ostrożności w uogólnianiu i konieczności weryfikowania, sprawdzania, argumentowania i dowodzenia. Pojawia się w tych zadaniach potrzeba nadania znaczenia słowom „dla dowolnej", „dla każdej" (liczby, figury). Wszystko jednak **zależy od celu**, jaki sobie postawimy.

Nauczyciel będzie wybierał takie podejście, jaki postawi sobie cel nauczania. Będzie wybierał rozwijanie umiejętności uogólniania, gdy sam będzie umiał uogólniać. Jak wskazują przykłady w tych badaniach, nie zawsze potrafi. Musi także umieć poprowadzić z uczniami dyskusję o dostrzeganych, różnorodnych regułach, sposobach zapisywania z użyciem liczb, liter, wyrażeń algebraicznych i wzorów. Zalecane przez Polya (1975, s. 102) wskazówki *obserwować, uogólniać, udowadniać* wciąż pozostają aktualne i czekają na realizację w praktyce.

Literatura

Bazyluk, A., Dałek, K., Dubiecka, A., Fryska, M., Góralewicz, Z., Łakoma, E., Piskorski, P., Sienkiewicz, H.: 2000, *Matematyka 2001, gimnazjum, podręcznik dla klasy 2*, WSiP, Warszawa.

Chronowski, A.: 1999, *Podstawy arytmetyki szkolnej,* cz. 1, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Ciosek, M.: 2005, *Proces rozwiązywania zadania na różnych poziomach wiedzy i doświadczenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Ciosek, M., Krygowska, Z., Turnau, S.: 1974, Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki, *Prace z dydaktyki matematyki* **54**, 5-41.

Demby, A.: 2000, Przegląd koncepcji nauczania algebry w polskich programach szkolnych z lat 1949-1990, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **22**, 25-43.

Encyklopedia szkolna. Matematyka: 1997, WSiP, Warszawa.

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O.: 1998, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1955, O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, *Matematyka* **4**, 21-32.

Krygowska, Z.: 1967, Rozumienie empiryczne, intuicyjne i formalne w nauczaniu matematyki, *Wiadomości Matematyczne* **X**, 49-91.

Krygowska, Z.: 1974, Od szczególnego przypadku do uogólnienia – uzmiennianie stałych, *Delta, matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego* **11**, 1-3.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Legutko, M.: 1987, Przykłady behawioralno-poznawcze postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 51-102.

Legutko, M.: 2009, O matematycznym modelowaniu różnych sytuacji przez uczniów gimnazjum i liceum, *Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, Współczesne problemy nauczania matematyki* **2**, 71-93.

Lubomirski, A.: 1983, *O uogólnianiu w matematyce*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław.

Osiągnięcia uczniów kończacych gimnazjum w roku 2008: 2008, CKE, Warszawa.

Polya, G.: 1964, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Polya, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne*, Wydaw. Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD/PISA, Wyniki badania 2003 w Polsce: 2003, MENiS, Warszawa.

Semadeni, Z.: 2002, Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 93-117.

Semadeni, Z., Karpiński, M., Sawicka, K., Jucewicz, M., Dubiecka, A., Guzicki, W., Tutaj, E.: 2009, Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka, w: MEN (red.), *Reforma programowa z komentarzami, t. 6 Edukacja matematyczna i techniczna*, Warszawa, 51-80.

Sierpiński, W.: 1962, *Liczby trójkątne*, PZWS, Warszawa.

Stygar, A.: 2009, *Umiejętność uogólniania przez nauczycieli na przykładzie zadania „schodki”*, Niepublikowana praca magisterska wykonana w Instytucie Matematyki AP pod kierunkiem dr. M. Legutko, Kraków.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Zaręba, L.: 2003, Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10-14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 151-182.

Zaręba, L.: 2004, Proces uogólniania w matematyce i stosowanie w nim symbolu literowego u uczniów w wieku 10-14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 281-290.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: mlegutko@up.krakow.pl