FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Jan Górowski, Adam Łomnicki

Tożsamości dla uogólnionych symboli Newtona*

Abstract. In the present work the coefficients of the polynomial $(1 + z + z^2 + \ldots + z^{\mu-1})^n$ are studied. They may be treated as a generalization of the binomial coefficients. Numerous identities for these coefficients are proved. Further, the basic properties of these numbers are provided.

L. Comtet (1974, s. 77) podaje, że André w 1875 r. oraz Montel w 1942 r. zajmowali się wielomianami postaci

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^{\mu-1})^n = \sum_{j=0}^{n(\mu-1)} \binom{n,\mu}{j} z^j, \quad (n \in \mathbb{N},\ \mu \geqslant 2). \tag{1}$$

W ostatnich latach znaleziono zastosowanie współczynników (symboli) $\binom{n,\mu}{j}$ przy badaniu tzw. uogólnionych liczb Fibonacciego i uogólnionych wielomianów Fibonacciego (Belbachir, Bouroubi, Khelladi, 2008; Hoggatt, Bicknel, 1973; Koshy, 2001; Philippon, Georghin, Philippon, 1983; Schork, 2008).

Pojawiło się też wiele własności tych współczynników (Belbachir i inni, 2008; Bollinger, 1986; Kallos, 2006; Walser, 2000).

W tej pracy podamy elementarne dowody dwóch znanych z literatury własności oraz szereg nowych tożsamości dla liczb $\binom{n,\mu}{j}$, które w pewnym sensie są uogólnieniami symboli Newtona. Ze względu na widoczne związki z klasycznym trójkątem Pascala, nierozerwalnie związanym z nauczaniem matematyki w szkołach średnich, materiał przedstawiony w artykule szczególnie nadaje się do wykorzystania w kształceniu przyszłych nauczycieli matematyki (np. na seminariach). Niebanalne uogólnienia i rozumowania są też kształcące dla studentów matematyki, którzy winni mieć na swoich studiach możliwość do tworzenia „własnej matematyki".

Zbior liczb naturalnych większych bądź równych od k oznaczać będziemy symbolem $\mathbb{N}_k$.

Definicja

Wielomian $W_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ o współczynnikach zespolonych nazywamy *wielomianem lustrzanym*, gdy $a_s = a_{n-s}$ dla $s \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$.

*Identities for the generalized Newton symbols

Łatwo można udowodnić

Twierdzenie 1
Wielomian $W(z) \in \mathbb{C}[z]$ stopnia n jest lustrzany wtedy i tylko wtedy, gdy

$$z^n W\left(\frac{1}{z}\right) = W(z) \quad dla\ z \neq 0.$$

Na podstawie twierdzenia 1 łatwo wykazuje się także następujące

Twierdzenie 2
Iloczyn wielomianów lustrzanych jest wielomianem lustrzanym.

Udowodnimy

Twierdzenie 3
Jeżeli $W_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ jest wielomianem lustrzanym, to suma kwadratów jego współczynników jest równa „środkowemu" współczynnikowi wielomianu lustrzanego $W_n^2(z)$, czyli jeśli $W_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ jest wielomianem lustrzanym stopnia n, to $\sum_{j=0}^{n} a_j^2 = b_n$, gdzie b_n jest współczynnikiem przy z^n wielomianu $(W_n(z))^2$.

Dowód. Ponieważ $W_n(z)$ jest wielomianem lustrzanym, to

$$W_n(z) \cdot W_n(z) = (a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0) \cdot (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n),$$

stąd współczynnik przy z^n wielomianu $W_n^2(z)$ jest równy $\sum_{j=0}^{n} a_j^2$, co kończy dowód twierdzenia 3.

Wykorzystując fakt, że wielomiany

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^{\mu-1})^n = \sum_{j=0}^{n(\mu-1)} \binom{n,\mu}{j} z^j$$

są lustrzane, co łatwo uzasadnić, wykorzystując warunek podany w twierdzeniu 1 oraz twierdzenie 3, dostajemy

Wniosek 1
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$ zachodzi równość

$$\sum_{j=0}^{n(\mu-1)} \binom{n,\mu}{j}^2 = \binom{2n,\mu}{(\mu-1)n}. \tag{2}$$

Zauważmy, że $\binom{n,2}{j} = \binom{n}{j}$ i tożsamość podana we wniosku 1 przyjmuje postać

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{3}$$

Tożsamość (3) jest znaną tożsamością z literatury; wynika ona także wprost z tożsamości Cauchy'ego dla symboli Newtona:

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n},\quad r,s\in\mathbb{N} \tag{4}$$

(Graham, Knuth, Patashnik, 2002, s. 198).

Z określenia wielomianów zadanych wzorem (1) wynika wprost po podstawieniu $z = 1$

Wniosek 2
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$ zachodzi równość

$$\sum_{j=0}^{n(\mu-1)}\binom{n,\mu}{j}=\mu^2. \tag{5}$$

Z tożsamości algebraicznej

$$\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^2=\sum_{j=1}^{m}x_j^2+2\cdot\sum_{0\leqslant i<j\leqslant m}x_ix_j$$

oraz wniosków 1 i 2 dostajemy

Wniosek 3
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$ zachodzi równość

$$2\cdot\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n(\mu-1)}\binom{n,\mu}{i}\binom{n,\mu}{j}=\mu^{2n}-\binom{2n,\mu}{(\mu-1)n}. \tag{6}$$

Zgodnie z określeniem współczynników $\binom{n,\mu}{j}$ dolny indeks j może przyjmować wszystkie wartości ze zbioru $\{0,1,2,\ldots,(\mu-1)n\}$. Wygodnie jest rozszerzyć zakres zmienności tego indeksu do zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Przyjmijmy zatem umowę obowiązującą w całej pracy: $\binom{n,\mu}{k}=0$, gdy $k\in\mathbb{Z}$ oraz $k<0$ lub $k>(\mu-1)n$.

Lemat 1 (Belbachir, Bouroubi, Khelladi, 2008)
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$ prawdziwe są równości:

(i) $\binom{1,\mu}{k}=1$ *dla* $k\in\{0,1,2,\ldots,\mu-1\}$,

(ii) $\displaystyle\binom{n+1,\mu}{k}=\sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{n,\mu}{k-j}$ *dla* $k\in\{0,1,2,\ldots,(\mu-1)(n+1)\}$.

Tożsamości (i) oraz (ii) podane w lemacie 1 wynikają wprost z definicji liczb $\binom{1,\mu}{k}$ oraz tożsamości

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+1,\mu}{j}=(1+z+\ldots+z^{\mu-1})^{n+1}=(1+z+\ldots+z^{\mu-1})\cdot\sum_{j\geqslant 0}\binom{n,\mu}{j}z^j.$$

Lemat 2 (Graham, Knuth, Patashnik, 2002, s. 188)
Dla dowolnych $l, m \in \mathbb{N}$, $l < m$ zachodzi równość

$$\binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \ldots + \binom{m-1}{l} = \binom{m}{l+1}.$$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 4
Dla dowolnych $n, s \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$ zachodzi równość

$$\binom{n, \mu+1}{s} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{s-j, \mu}{j} \binom{n}{s-j}. \tag{7}$$

Tożsamość (7) podana została w pracach (Belbachir i inni, 2008) oraz (Schork, 2008). Przyjmujemy, że w tożsamości (7) składniki sumy odpowiadające wskaźnikom j, dla których $s - j < 0$ lub $s - j > n$ jest równe zero.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na zmienną s.
Gdy $s = 0$, to $\binom{n, \mu+1}{0} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\mu \in \mathbb{N}_2$.
Ponieważ

$$\sum_{j \geqslant 0} \binom{0-j, \mu}{j} \binom{n}{0-j} = \binom{0, \mu}{0} \cdot \binom{n}{0} = 1$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $\mu \in \mathbb{N}_2$, twierdzenie jest zatem prawdziwe dla $s = 0$.

Przyjmijmy teraz, że dla dowolnie ustalonego $s \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_2$

$$\binom{n, \mu+1}{k} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{k-j, \mu}{j} \binom{n}{k-j} \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \ldots, s\}.$$

Pokażemy, że

$$\binom{n, \mu+1}{s+1} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{s+1-j, \mu}{j} \binom{n}{s+1-j}.$$

Z lematu 1 wiemy, że

$$\binom{n+1, \mu+1}{s+1} = \sum_{j=0}^{\mu} \binom{n, \mu+1}{s+1-j} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \text{ i } \mu+1 \in \mathbb{N}_2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\binom{n+1, \mu+1}{s+1} - \binom{n, \mu+1}{s+1} = \sum_{j=1}^{\mu} \binom{n, \mu+1}{s+1-j} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \binom{n, \mu+1}{s-j}. \tag{8}$$

Kładąc w tożsamości (8) za n kolejno $0, 1, 2, \ldots, n-1$ i dodając stronami otrzymane równości i biorąc pod uwagę fakt, że $\binom{0, \mu+1}{s+1} = 0$, otrzymamy

$$\binom{n, \mu+1}{s+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\mu-1} \binom{k, \mu+1}{s-j}.$$

Wykorzystując teraz założenie indukcyjne, a następnie lemat 2, dostajemy:

$$\begin{aligned}
\binom{n,\mu+1}{s+1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\mu-1}\binom{k,\mu+1}{s-i}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j\geqslant 0}\binom{s-i-j,\mu}{j}\binom{k}{s-i-j}\\
&= \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j\geqslant 0}\binom{s-i-j,\mu}{j}\binom{n}{s+1-i-j}\\
&= \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j\geqslant i}\binom{s-j,\mu}{j-i}\binom{n}{s+1-j}\\
&= \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j\geqslant 0}\binom{s-j,\mu}{j-i}\binom{n}{s+1-j}\\
&= \sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{s+1-j}\sum_{i=0}^{\mu-1}\binom{s-j,\mu}{j-i}.
\end{aligned}$$

Na podstawie tożsamości (ii) lematu 1 otrzymujemy

$$\binom{n,\mu+1}{s+1} = \sum_{j\geqslant 0}\binom{s+1-j,\mu}{j}\binom{n}{s+1-j}.$$

To kończy dowód twierdzenia 4.

Trójkąty Pascala zbudowane z symboli $\binom{n,\mu}{k}$ oraz ilustracja twierdzenia 4

Klasyczny trójkąt Pascala, a właściwie jego fragment związany z rozwinięciem $(1+\ z)^n$ przedstawiamy poniżej (tablica 1). Liczby występujące w tym trójkacie na liniach tworzących z kolumną jedynek kąt o mierze $\frac{\pi}{4}$ pojawiają się we wzorach podanych poniżej.

1						$\binom{n,2}{k}$
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Tablica 1.

Wzory:

$\binom{n,3}{0} = \binom{n}{0}$

$\binom{n,3}{1} = \binom{n}{1}$

$\binom{n,3}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,3}{3} = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2}$
$\binom{n,3}{4} = \binom{n}{4} + 3\binom{n}{3} + \binom{n}{2}$
$\binom{n,3}{5} = \binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}$
$\binom{n,3}{6} = \binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 6\binom{n}{4} + \binom{n}{3}$
wynikają wprost z twierdzenia 4, gdy przyjmiemy w nim $\mu = 3$, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wyznaczają one pierwszych siedem kolumn w następnym trójkącie Pascala związanym z rozwinięciem $(1 + z + z^2)^n$.

1												$\binom{n,3}{k}$
1	1	1										
1	2	3	2	1								
1	3	6	7	6	3	1						
1	4	10	16	19	16	10	4	1				
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

Tablica 2.

Poniższe wzory zbudowane na bazie tablicy 2 w sposób analogiczny jak odpowiednie wzory na bazie tablicy 1:
$\binom{n,4}{0} = \binom{n}{0}$
$\binom{n,4}{1} = \binom{n}{1}$
$\binom{n,4}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,4}{3} = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,4}{4} = \binom{n}{4} + 3\binom{n}{3} + 3\binom{n}{2}$
$\binom{n,4}{5} = \binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{3} + 2\binom{n}{2}$
$\binom{n,4}{6} = \binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 10\binom{n}{4} + 7\binom{n}{3} + \binom{n}{2}$
ilustrują twierdzenie 4, gdy $\mu = 4$ i wyznaczają siedem pierwszych kolumn w następnym trójkącie Pascala, związanym z rozwinięciem $(1 + z + z^2 + z^3)^n$.

1																		$\binom{n,5}{k}$
1	1	1	1															
1	2	3	4	3	2	1												
1	3	6	10	12	12	10	6	3	1									
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1						
1	5	15	35	65	101	135	155	155	135	101	65	35	15	5	1			
1	6	21	56	120	216	336	456	546	580	546	456	336	216	120	56	21	6	1

Tablica 3.

Poniższe wzory zbudowane na bazie tablicy 3 w sposób analogiczny jak odpowiednie wzory na bazie tablicy 1:

$\binom{n,5}{0} = \binom{n}{0}$
$\binom{n,5}{1} = \binom{n}{1}$
$\binom{n,5}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,5}{3} = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,5}{4} = \binom{n}{4} + 3\binom{n}{3} + 3\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
$\binom{n,5}{5} = \binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{3} + 4\binom{n}{2}$
$\binom{n,5}{6} = \binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 10\binom{n}{4} + 10\binom{n}{3} + 3\binom{n}{2}$
ilustrują twierdzenie 4, gdy $\mu = 5$ i wyznaczają siedem pierwszych kolumn w następnym trójkącie Pascala, związanym z rozwinięciem $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)^n$.

Obserwując tablice 1, 2, 3, zauważamy, że trzy pierwsze kolumny tablicy 2 oraz cztery pierwsze kolumny tablicy 3 są takie same jak odpowiednie kolumny w tablicy 1. Nie jest to przypadek. Prawdziwe jest bowiem

TWIERDZENIE 5
Jeśli $s \in \mathbb{N}$ i $\mu \in \mathbb{N}_2$ i $s \leqslant \mu - 1$, to

$$\binom{n,\mu}{s} = \binom{n+s-1}{s}, \quad n \in \mathbb{N}_1. \tag{9}$$

Dowód. Tożsamość (9) została wykazana w pracy (Belbachir i inni, 2008). Do uzyskania tej tożsamości użyto zaawansowanych narzędzi, w tym wielomianów Bella. My wykażemy tę tożsamość, używając bardzo prostych narzędzi matematycznych. Zastosujemy indukcję względem n.
Gdy $n = 1$, to

$$\binom{1,\mu}{s} = 1 \quad \text{dla } s \in \{0, 1, 2, \ldots, \mu - 1\}.$$

Ponieważ $\binom{1+s-1}{s} = \binom{s}{s} = 1$, zatem twierdzenie 5 jest prawdziwe, gdy $n = 1$.
Przyjmijmy teraz, że dla dowolnie ustalonego $n \geqslant 1$ i każdego $s \in \{0, 1, \ldots, \mu - 1\}$ mamy

$$\binom{n,\mu}{s} = \binom{n+s-1}{s}.$$

Pokażemy, że

$$\binom{n+1,\mu}{s} = \binom{n+1+(s-1)}{s} \quad \text{dla } s \in \{0, 1, \ldots, \mu - 1\}.$$

Z lematu 1 wiemy, że

$$\binom{n+1,\mu}{k} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \binom{n,\mu}{k-j} \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \ldots, (\mu-1)(n+1)\}.$$

Ponieważ $s \leqslant \mu - 1$, zatem

$$\binom{n+1,\mu}{s} = \binom{n,\mu}{s} + \binom{n,\mu}{s-1} + \cdots + \binom{n,\mu}{0}.$$

Wykorzystując teraz założenie indukcyjne, a następnie lemat 2, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\binom{n+1,\mu}{s} &= \binom{n+s-1}{s} + \binom{n+s-2}{s-1} + \ldots + \binom{n+1-1}{1} + \binom{n-1}{0} \\ &= \binom{n+s-1}{n-1} + \binom{n+s-2}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} \\ &= \binom{n+s}{n} = \binom{n+s}{s} \\ &= \binom{n+1+(s-1)}{s}.\end{aligned}$$

To kończy dowód twierdzenia 5.

W tej części pracy podamy pewne tożsamości dla współczynników $\binom{n,\mu}{k}$.

Twierdzenie 6
Prawdziwe są następujące równości:

$$\text{(I)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,\mu}{k} = \frac{1}{2}(1-(-1)^n),\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N}_2,$$

$$\text{(II)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+2}{2k} = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4},\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N},$$

$$\text{(III)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+2}{2k+1} = \sqrt{2}\sin\frac{n\pi}{4},\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N},$$

$$\text{(IV)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+3}{2k} = \cos\frac{n\pi}{2},\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N},$$

$$\text{(V)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+3}{2k+1} = \sin\frac{n\pi}{2},\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N},$$

$$\text{(VI)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+1}{2k} = 1,\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N}_1,$$

$$\text{(VII)}\quad \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n,4\mu+1}{2k+1} = 0,\ \textit{gdzie } n\in\mathbb{N},\ \mu\in\mathbb{N}_1.$$

Dowód. Ze wzoru (1) wiemy, że

$$(1+z+z^2+\ldots+z^{\mu-1})^n = \sum_{k=0}^{(\mu-1)n}\binom{n,\mu}{k}z^k. \tag{10}$$

Podstawiając w (10) w miejsce z liczbę -1, otrzymujemy (I). Podstawiając w (10) w miejsce z liczbę i, otrzymujemy tezy od (II) do (VII).

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 7
Prawdziwe są następujące równości:

(A) $\binom{n,\mu}{k} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{\mu}\right]} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{n-1+k-j,\mu}{n-1}$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}_1,\ \mu \in \mathbb{N}_2$,

a $\left[\frac{k}{\mu}\right]$ *oznacza cechę z liczby* $\frac{k}{\mu}$,

(B) $\binom{n,\mu}{k} = \sum_{j\geqslant 0} \binom{m,\mu}{j}\binom{n-m,\mu}{k-j}$, *gdzie* $m,\ n \in \mathbb{N},\ m \leqslant n$,

(C) $\binom{n,2\mu}{k} = \sum_{j\geqslant 0} \binom{n,\mu}{j}\binom{n}{k-2j}$, *gdzie* $n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N}_2$,

(D) $\binom{n}{s}(-1)^{k+s}\delta_{k,\mu s} = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \binom{n,\mu}{j}\binom{n}{k-j}$, *gdzie* $n \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N},\ s \leqslant n$, $\mu \in \mathbb{N}_2$, *a* $\delta_{k,\mu s}$ *oznacza deltę Kroneckera.*

Dowód. Tożsamość (A) została wykazana w pracy (Belbachir, Bouroubi, Khelladi, 2008) przy użyciu tożsamości algebraicznej

$$(1+z+z^2+\ldots+z^{\mu-1})^n = (1-z^\mu)^n \cdot (1-z)^{-n}.$$

Wykażemy teraz (B).

Korzystając z tożsamości algebraicznej

$$(1+z+\ldots+z^{\mu-1})^n = (1+z+\ldots+z^{\mu-1})^m \cdot (1+z+\ldots+z^{\mu-1})^{n-m},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n,\mu}{k}z^k &= \sum_{j\geqslant 0}\binom{m,\mu}{j}z^j \cdot \sum_{j\geqslant 0}\binom{n-m,\mu}{j}z^j\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\binom{m,\mu}{j}\binom{n-m,\mu}{k-j}z^k.\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy z^k, dostajemy (B).

Dowód (C).

Korzystając z tożsamości algebraicznej

$$(1+z^2+(z^2)^2+\ldots+(z^2)^{\mu-1})^n(1+z)^n = (1+z+z^2+\ldots+z^{2\mu-1})^n,$$

otrzymujemy

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n,2\mu}{k}z^k = \sum_{j\geqslant 0}\binom{n,\mu}{j}z^{2j}\cdot\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}z^j = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\binom{n,\mu}{j}\binom{n}{k-2j}z^k.$$

Porównując współczynniki przy z^k, dostajemy (C).

Dowód (D).

Wychodząc od tożsamości algebraicznej

$$(1 - z^\mu)^n = (1 + z + \ldots + z^{\mu-1})^n \cdot (1 - z)^n,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j z^{\mu j} &= \sum_{j \geqslant 0} \binom{n, \mu}{j} z^j \cdot \sum_{j \geqslant 0} \binom{n}{j} (-1)^j z^j \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \sum_{j \geqslant 0} \binom{n, \mu}{j} \binom{n}{k - j} (-1)^{k-j} z^k.\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy potęgach z, dostajemy (D).

Tożsamość (B) jest niewątpliwie uogólnieniem tożsamości Cauchy'ego dla klasycznych symboli Newtona.

Przyjmując $\mu = 2$ w tożsamości (B), dostajemy tożsamość Cauchy'ego (4). Zauważmy tutaj również, że wniosek 1 wynika teraz także z tożsamości (B). Przyjmując bowiem w tożsamości (B) $n = 2m$ oraz $k = (\mu - 1)m$ i korzystając z faktu, że

$$\binom{m, \mu}{j} = \binom{m, \mu}{(\mu - 1)m - j} \quad \text{dla } m \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N}_2,\ j \in \{0, 1, \ldots, (m - 1)\mu\},$$

gdyż wielomian

$$(1 + z + \ldots + z^{\mu-1})^n = \sum_{j \geqslant 0} \binom{n, \mu}{j} z^j$$

jest lustrzany, dostajemy tożsamość (2), wykazaną na innej drodze we wniosku 1.

Przyjmując $\mu = 2$ w (C) i (D), otrzymujemy następujące tożsamości:

$$\binom{n, 4}{k} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{n}{j} \binom{n}{k - 2j},$$

$$\binom{n}{s} (-1)^{k+s} \delta_{k,2s} = \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n}{k - j}.$$

Kładąc w ostatniej tożsamości $k = n$, otrzymamy

$$\binom{n}{s} (-1)^{n+s} \delta_{n,2s} = \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j \binom{n}{j}^2. \tag{11}$$

Podobnego typu tożsamość

$$\sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j}^3 = (-1)^m \frac{(3m)!}{(m!)^3}$$

nosi nazwę tożsamości Dixona (zob. Comtet, 1974, s. 174).

W pracy (Comtet, 1974, s. 168) podano tożsamość

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 z^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{2n-j}{n} (z-1)^j.$$

Kładąc w tej tożsamości $z = -1$ i wykorzystując (11), otrzymamy tożsamość

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{2n-j}{n} (-2)^j = \binom{n}{s} (-1)^{n+s} \delta_{n,2s}.$$

Zauważmy jeszcze, że łącząc na różne sposoby tożsamość (7) z twierdzenia 4 z tożsamościami (A), (B), (C) z twierdzenia 7, można uzyskać całą serię różnych tożsamości, np. łącząc (7) z (B), otrzymamy:

$$\sum_{j\geqslant 0} \binom{k-j,\mu}{j} \binom{n}{k-j} = \sum_{j\geqslant 0} \binom{m,\mu+1}{j} \cdot \binom{n-m,\mu+1}{k-j}.$$

Literatura

Belbachir, H., Bouroubi, S., Khelladi, A.: 2008, Connection between ordinary multinominals, fibonacci numbers, bell polynominals and discrete uniform distribution, *Annales Math. et Informaticae* **35**, 21-30.

Bollinger, R. C.: 1986, A note on Pascal T-triangles multinominal coefficients and Pascal Pyramids, *The Fibonacci Quartely* **24**(2), 140-144.

Comtet, L.: 1974, *Advanced combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Holand, Boston – USA.

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O.: 2002, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa.

Hoggatt, V. E., Bicknel, M.: 1973, Generalized Fibonacci polynominals, *The Fibonacci Quartely* **11**, 457-465.

Kallos, G.: 2006, A generalization of pascal triangles using powers of base numbers, *Annales Math. Blaise Pascal* **13**(1), 1-15.

Koshy, T.: 2001, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Iohn Wiley & Sons, Inc.

Philippon, A. N., Georghin, C., Philippon, G. N.: 1983, Fibonacci polynominals of order k, multinominal expansions and probability, *Internat. J. Math. Science* **6**(3), 545-550.

Schork, M.: 2008, The r-generalized Fibonacci numbers and polynominals coefficients, *Internat. J. Math. Science* **3**(24), 1157-1163.

Walser, H.: 2000, The Pascal pyramid, *The College Math. J.* **31**(5), 383-392.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail jangorowski@interia.pl