FOLIA 82

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Jan Górowski, Adam Łomnicki

O średnich*

Abstract. This paper presents a structural approach to widely known numerical averages. Several equivalent conditions for a sequence to be an arithmetic sequence are formulated and proved. Further, these conditions, expressed by the arithmetic mean, are transferred by an isomorphism to other structures with other averages.

1. Definicje średnich i wybrane twierdzenia o średnich

Definicja 1

Średnią m liczb nazywamy funkcję $M : (0,\infty)^m \longrightarrow (0,\infty)$ spełniającą warunki:

(1) $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \leqslant M(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,

(2) jeśli $x_i \leqslant y_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, to $M(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant M(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Uwaga: Dla niektórych średnich zamiast standardowej dziedziny $(0,\infty)^m$ będziemy przyjmowali zbiór $\mathbb{R}^m$ lub I^m, gdzie I jest przedziałem.

Przykłady średnich:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \quad \text{(średnia arytmetyczna)},$$

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m} \quad \text{(średnia geometryczna)},$$

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \quad \text{(średnia harmoniczna)}.$$

Wiadomo, że

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant G(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

dla $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in (0,\infty)^m$.

*On averages

Niech

$$\hat{M}_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad \text{gdzie } x_i \in \mathbb{R}_+ \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Można udowodnić, że:

(1) $\lim\limits_{\mu \to -\infty} \hat{M}_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,

(2) $\hat{M}_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = H(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(3) $\lim\limits_{\mu \to 0} \hat{M}_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m) = G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(4) $\hat{M}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(5) $\lim\limits_{\mu \to \infty} \hat{M}_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Dowody równości (1), (2), (4), (5) są oczywiste. Dowód równości (3) można znaleźć np. w (Kourliandtchik, 2006, s. 145).

Niech

$$L_p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^p}{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{p-1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{p-1}}, \quad \text{gdzie } x_i \in \mathbb{R}_+ \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Łatwo udowodnić, że:

(1) $\lim\limits_{p \to -\infty} L_p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,

(2) $L_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = H(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(3) $L_{\frac{1}{2}}(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$,

(4) $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(5) $\lim\limits_{p \to \infty} L_p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Definicja średniej Heinza:

$$H_\mu(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^\mu y^{1-\mu} + x^{1-\mu} y^\mu\right), \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{R}_+,\ \mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Zauważmy, że:

(1) $H_0(x, y) = A(x, y)$,

(2) $H_{\frac{1}{2}}(x, y) = G(x, y)$,

(3) $H_{\frac{1}{2}}(x,y) \leqslant H_\mu(x,y) \leqslant H_0(x,y)$.

Definicja średniej logarytmicznej:

$$E(x,y) = \frac{y-x}{\log y - \log x}, \quad \text{gdzie } x,y \in \mathbb{R}_+.$$

Można wykazać, że:

$$\sqrt{xy} \leqslant E(x,y) \leqslant \frac{x+y}{2}$$

(zob. Witkowski, 2004, s. 111).

Inne spojrzenie na średnie uzyskujemy wykorzystując osiągnięcia J. Aczela i J. Dhombresa, którzy zdefiniowali podobnie jak A. Kołmogorow średnią dwóch liczb (odpowiednio m liczb) następująco:

DEFINICJA 2

$$M_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right),$$

$$M_f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = f^{-1}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right),$$

gdzie $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i silnie monotoniczną, a I jest przedziałem zawartym w $\mathbb{R}$.

Średnimi w sensie definicji 2 zajmowali się m.in.: Aczel i Dhombres (1989), Hardy, Littlewood i Polya (1952), Kołmogorow (1930), Powązka i Wachnicki (2004).

Jest oczywiste, że każda średnia w sensie definicji 2 jest średnią w sensie definicji 1. Zauważmy, że dla:

(1) $f(x) = x$ mamy $M_f(x,y) = \frac{x+y}{2} = A(x,y)$,

(2) $f(x) = \ln x$ mamy $M_f(x,y) = \sqrt{xy} = G(x,y)$,

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ mamy $M_f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)^{-1} = H(x,y)$,

(4) $f(x) = x^\mu$ mamy $M_f(x,y) = \hat{M}_\mu(x,y)$.

Jest widoczne, że można uzyskać równości analogiczne do powyższych także dla m liczb, gdzie $m \geqslant 2$.

J. Dhombres rozpatrywał średnią M_f jako pewne działanie wewnętrzne w zbiorze I i udowodnił twierdzenie, które podaje warunki konieczne i wystarczające na to, by działanie wewnętrzne w I było średnią w sensie definicji 2.

Oto to twierdzenie:

TWIERDZENIE 1 (ACZELA-DHOMBRESA)
Działanie binarne $\circ$ w przedziale I jest średnią w sensie definicji 2 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:

(1) $x \circ x = x$,

(2) $x \circ y = y \circ x$,

(3) $(x \circ y) \circ (z \circ w) = (x \circ z) \circ (y \circ w)$,

(4) *funkcja* $\phi(x) = x \circ y$ *jest ciągła dla każdego ustalonego* $y \in I$,

(5) *funkcja* $\phi(x) = x \circ y$ *jest ściśle monotoniczna dla każdego ustalonego* $y \in I$.

2. Podejście strukturalne do średnich

Rozważmy $(\mathbb{R}, *)$, gdzie $x * y = \frac{x+y}{2}$. Niech f będzie izomorfizmem struktury $(\mathbb{R}_+, \circ)$ na $(\mathbb{R}, *)$, określonym wzorem $f(x) = \ln x$. Wtedy dla $x, y \in \mathbb{R}_+$ mamy:

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y),$$

a więc

$$\ln(x \circ y) = \frac{\ln x + \ln y}{2},$$

$$x \circ y = \exp\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln xy\right) = \exp(\ln \sqrt{xy}) = \sqrt{xy}.$$

Można zatem powiedzieć, że $(\mathbb{R}_+, \circ)$, gdzie $x \circ y = \sqrt{xy}$, jest strukturą izomorficzną ze strukturą $(\mathbb{R}, *)$, gdzie $x * y = \frac{x+y}{2}$.

Podobnie struktura $(\mathbb{R}_+, \triangle)$, gdzie $x \triangle y = (\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^{-1}) = \frac{2xy}{x+y}$ jest izomorficzna ze strukturą $(\mathbb{R}, *)$, gdzie $x * y = \frac{x+y}{2}$. Izomorfizmem jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^{-1}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Również struktura $(\mathbb{R}_+, \triangledown)$, gdzie $x \triangledown y = (\frac{1}{2}(x^\mu + y^\mu))^{\frac{1}{\mu}}$ jest izomorficzna ze strukturą $(\mathbb{R}_+, *)$, gdzie $x * y = \frac{x+y}{2}$. Izomorfizmem jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^\mu$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Nadmieńmy tutaj, że analogiczne związki będą prawdziwe, gdy zamiast działań binarnych byłyby rozpatrywane działania m-argumentowe.

W dalszej części pracy wykorzystamy to strukturalne podejście do średnich do „przeniesienia" pewnych własności struktury $(\mathbb{R}, *)$ bądź $(\mathbb{R}_+, *)$ z działaniem średniej arytmetycznej na struktury izomorficzne, czyli np. na $(\mathbb{R}_+, \circ)$, $(\mathbb{R}_+, \triangle)$, $(\mathbb{R}_+, \triangledown)$ (określone powyżej).

3. O własnościach średniej arytmetycznej dla wyrazów ciągu arytmetycznego

Niech:

$\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}$, gdzie k jest ustaloną liczbą dodatnią,

$m\mathbb{N} = \{m, 2m, 3m, \ldots\}$, gdzie $m \in \mathbb{N}_2$,

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}_1}$ – oznacza zbiór nieskończonych ciągów o wyrazach z $\mathbb{R}$,

$\mathbb{N}_1^{\{1,2,3,\ldots,m\}}$ – oznacza zbiór ciągów m-wyrazowych o wyrazach z $\mathbb{N}_1$.

W dalszym ciągu symbolem A_m, gdzie $m \in \mathbb{N}_2$, oznaczać będziemy operator

$$A_m \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}_1} \times \mathbb{N}_1^{\{1,2,3,\ldots,m\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowany wzorem:

$$A_m((a_n),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k_j} = A(a_{k_1},a_{k_2},\ldots,a_{k_m}).$$

Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz

$$M(m) = \{(a_n) \in \mathbb{N}_1^{\{1,2,\ldots,m\}} : \sum_{i=1}^{m} a_i \in m\mathbb{N}_1\}.$$

Twierdzenie 2
Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym oraz $(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in M(m)$, to

$$A_m((a_n),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) = a_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}.$$

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, zilustrujmy go na konkretnym przykładzie ciągu arytmetycznego.

Przyjmijmy $m = 3$ oraz $(a_n) = (1,3,5,7,9,11,13,15,\ldots)$. Wtedy:

$$A_3((a_n),(1,1,4)) = \frac{1}{3}(1+1+7) = 3,$$
$$a_{A_3((n),(1,1,4))} = a_{\frac{1}{3}(1+1+4)} = a_2 = 3,$$
$$A_3((a_n),(2,3,7)) = \frac{1}{3}(3+5+13) = 7,$$
$$a_{A_3((n),(2,3,7))} = a_{\frac{1}{3}(2+3+7)} = a_4 = 7.$$

Dowód twierdzenia 2. Niech $a_n = a_1 + (n-1)r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = ms$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}_1$. Stąd oraz z definicji operatora A_m mamy:

$$\begin{aligned}
A_m((a_n),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k_j} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(a_1 - r + k_j r) \\
&= \frac{1}{m}(m(a_1 - r) + \sum_{j=1}^{m} k_j r) \\
&= \frac{1}{m}(m(a_1 - r) + msr) \\
&= a_1 - r + sr \\
&= a_1 + (s-1)r \\
&= a_s \\
&= a_{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j} \\
&= a_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 3
Ciąg (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym* $\Longleftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{a_{n+2}+a_n}{2} = a_{n+1}$.

Dowód. Zauważmy, że warunek $\frac{a_{n+2}+a_n}{2} = a_{n+1}$ jest równoważny kolejno warunkom $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$, $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}_1$.

Własność opisaną w tezie twierdzenia 2, odpowiadającą ustalonemu ciągowi z $M(m)$ oznaczmy symbolem S_a (od słów: średnia arytmetyczna). Wiemy już, że własność S_a, przy każdym wyborze ciągu z $M(m)$, przysługuje ciągom arytmetycznym.

Zanim pójdziemy dalej, rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 1
Z twierdzenia 2 wynika, że jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to

$$\frac{a_n + a_n + a_{n+3}}{3} = a_{n+1}.$$

Pokażemy, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Warunek $\frac{2a_n+a_{n+3}}{3} = a_{n+1}$ równoważny warunkowi $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$ potraktujmy jako zależność rekurencyjną, związek między wyrazami ciągu o trzech początkowych wyrazach równych odpowiednio $0, 1, 1$. Dostaniemy ciąg $(0, 1, 1, 3, 1, 7, -3, \ldots)$, który nie jest ciągiem arytmetycznym.

Przyjmijmy oznaczenia:

A – zbiór nieskończonych ciągów arytmetycznych o wyrazach z $\mathbb{R}$,

$M'(2) = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}_1\}$,

$M'(m) = \{(n, n+1, n+1, \ldots, n+1, n+2) \in \mathbb{N}_1^{\{1,2,\ldots,m\}} : n \in \mathbb{N}_1\}$,

gdy $m > 2$.

Udowodnimy

Twierdzenie 4
$(a_n) \in A \Longleftrightarrow (a_n)$ *ma własność* S_a *dla każdego ciągu z* $M'(m)$.

Dowód. Gdy $m = 2$, twierdzenie 4 jest równoważne twierdzeniu 3.
Przyjmijmy zatem, że $m \geqslant 3$.
Wynikanie „$\Rightarrow$” otrzymujemy z twierdzenia 2. Wykażemy teraz wynikanie „$\Leftarrow$”.
Dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}_1$ mamy:

$$\frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+1} + \ldots + a_{n+1} + a_{n+2}}{m} = a_{\frac{n+(m-2)\cdot(n+1)+n+2}{m}} = a_{n+1}.$$

Stąd kolejno:

$$a_n + (m-2)a_{n+1} + a_{n+2} = ma_{n+1},$$

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1},$$

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = a_{n+1},$$

$(a_n) \in A$ (ostatni krok na podstawie twierdzenia 3).

Z twierdzeń 2 i 4 wynika

TWIERDZENIE 5
Jeśli $m \in \mathbb{N}_2$, to: $(a_n) \in A \Longleftrightarrow (a_n)$ ma własność S_a dla każdego ciągu z $M(m)$.

Z twierdzeń 4 i 5 dostajemy

TWIERDZENIE 6
Następujące warunki są równoważne:

(1) $(a_n) \in A$,

(2) $\forall_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in M(m)} A_m((a_n),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) = a_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}$,

(3) $\forall_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(n,\ldots,n+2)\in M'(m)} A_m((a_n),(n,\ldots,n+2)) = a_{A_m((n),(n,\ldots,n+2))} = a_{n+1}$,

(4) $\exists_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in M(m)} A_m((a_n),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) = a_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}$,

(5) $\exists_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(n,\ldots,n+2)\in M'(m)} A_m((a_n),(n,\ldots,n+2)) = a_{A_m((n),(n,\ldots,n+2))} = a_{n+1}$.

Niech teraz J oznacza przedział zawarty w $\mathbb{R}$, zaś I to $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$. Ponadto niech ψ oznacza średnią arytmetyczną n liczb z I, a $f\colon J \longrightarrow I$ niech będzie bijekcją. Przy tych oznaczeniach prawdziwe jest

TWIERDZENIE 7
Następujące warunki są równoważne:

(1) *Ciąg $(f(b_n))$, gdzie $b_n \in J$ dla $n \in \mathbb{N}_1$ jest arytmetyczny,*

(2) $\forall_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in M} f^{-1}(A_m((f(b_n)),(k_1,k_2,\ldots,k_m))) = b_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}$,

(3) $\forall_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(n,\ldots,n+2)\in M'} f^{-1}(A_m((f(b_n)),(n,\ldots,n+2))) = b_{A_m((n),(n,\ldots,n+2))} = b_{n+1}$,

(4) $\exists_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in M} f^{-1}(A_m((f(b_n)),(k_1,k_2,\ldots,k_m))) = b_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}$,

(5) $\exists_{m\in\mathbb{N}_2}\forall_{(n,\ldots,n+2)\in M'} f^{-1}(A_m((f(b_n)),(n,\ldots,n+2))) = a_{A_m((n),(n,\ldots,n+2))} = b_{n+1}$.

Dla dowodu tego twierdzenia wystarczy powołać się na twierdzenie 6 oraz na to, że warunek (2) z twierdzenia 7 jest równoważny warunkowi

$$A_m((f(b_n)),(k_1,k_2,\ldots,k_m)) = f(b_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))}).$$

Jako wniosek z twierdzenia 7 otrzymujemy

Twierdzenie 8
Jeśli I oznacza przedział, φ oraz ψ oznaczają działania m-argumentowe, gdzie $m \in N_2$, odpowiednio w zbiorach I oraz R i ponadto $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$, a funkcja f ustala izomorfizm struktury (I, φ) na $(\mathbb{R}, \psi)$, to dla każdego ciągu (b_n) o wyrazach z I, takiego, że $(f(b_n)) \in A$ oraz dla każdego ciągu $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in M(m)$ zachodzi równość $\varphi(b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_m}) = b_{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j}$.

Dowód. Niech (b_n) oznacza ciąg o wyrazach z I, dla którego ciąg $(f(b_n)) \in A$. Ponadto niech $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in M(m)$. Korzystając z twierdzenia 7, mamy

$$\begin{aligned} b_{A_m((n),(k_1,k_2,\ldots,k_m))} &= f^{-1}(A_m((f(b_n)), (k_1, k_2, \ldots, k_m))) \\ &= f^{-1}(\psi(f(b_{k_1}), f(b_{k_2}), \ldots, f(b_{k_m}))) \\ &= \varphi(b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_m}). \end{aligned}$$

Ustalając w twierdzeniu 8 struktury $(\mathbb{R}_+, \varphi)$ i $(\mathbb{R}, \psi)$, gdzie

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} x_j}, \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \quad \text{oraz} \quad f(x) = \ln x,$$

dostajemy jako wniosek

Twierdzenie 9
Ciąg (b_n) o wyrazach z $\mathbb{R}_+$ jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{m \in \mathbb{N}_2} \forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in M(m)} \sqrt[m]{b_{k_1} \cdot b_{k_2} \cdot \ldots \cdot b_{k_m}} = b_{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j}.$$

Ustalając w twierdzeniu 8 struktury $(\mathbb{R}_+, \varphi)$ i $(\mathbb{R}, \psi)$, gdzie

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j^{-1}\right)^{-1} \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j$$

oraz $f(x) = x^{-1}$, dostajemy jako wniosek

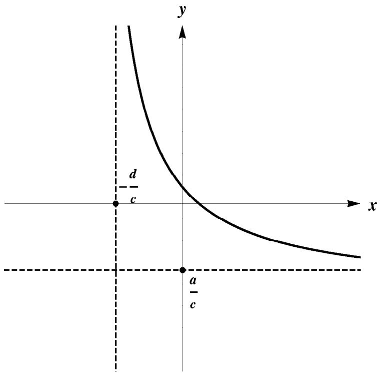
Twierdzenie 10
Ciąg (b_n) o wyrazach z $\mathbb{R}_+$ jest ciągiem harmonicznym, czyli ciągiem spełniającym warunek $\exists_r \forall_{n \in \mathbb{N}_1} b_{n+1}^{-1} - b_n^{-1} = r$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{m \in \mathbb{N}_2} \forall_{(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in M(m)} \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} b_{k_j}^{-1}\right)^{-1} = b_{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j}.$$

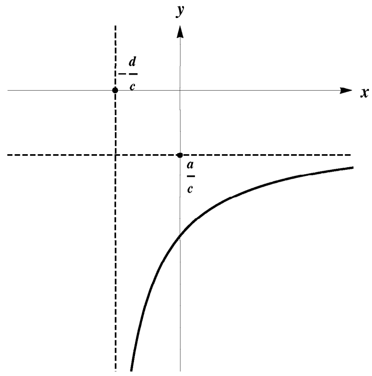
4. Różne rodzaje średnich

Niech $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, $dc \geqslant 0$, $ad - bc \neq 0$, $x \in \left(\frac{-d}{c}, \infty\right)$. Szkic wykresu funkcji f przedstawia rysunek 1 lub rysunek 2.

W przypadku, gdy a, b, c, d są tak dobrane, że rysunek 1 przedstawia wykres funkcji f, zdefiniujemy średnią $x \circ y$ dwóch liczb x, y w zbiorze $(-\frac{d}{c}, \infty)$ tak, by funkcja f była izomorfizmem struktury $((-\frac{d}{c}\infty), \circ)$ na strukturę $((\frac{a}{c}, \infty), *)$, gdzie $x * y = \frac{x+y}{2}$.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Wiemy już, że

$$x \circ y = f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right).$$

Po wykonaniu stosownych obliczeń dostajemy

$$x \circ y = \frac{2cxy + d(x+y)}{c(x+y) + 2d} = \frac{2xy + \frac{d}{c}(x+y)}{x + y + 2 \cdot \frac{d}{c}}.$$

Przyjmijmy teraz, że $\lambda = \frac{d}{c}$ oraz $x \circ y = M_\lambda(x, y)$. Wtedy

$$\widetilde{M_\lambda}(x, y) = \frac{2xy + \lambda(x+y)}{x + y + 2\lambda}$$

jest średnią w sensie definicji 1.

Zauważmy, że $\widetilde{M_0}(x, y) = H(x, y)$ oraz $\widetilde{M_\infty}(x, y) = \frac{x+y}{2}$, gdzie symbolem $\widetilde{M_\infty}$(x,y) oznaczyliśmy granicę $\lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{M_\lambda}(x, y)$.

O funkcji $\widetilde{M_\lambda} : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ można udowodnić, że:

(1) $H(x, y) \leqslant \widetilde{M_\lambda}(x, y) \leqslant A(x, y)$,

(2) $\forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in [0,\infty)} [\lambda_1 < \lambda_2 \Longrightarrow \widetilde{M_{\lambda_1}}(x, y) \leqslant \widetilde{M_{\lambda_2}}(x, y)]$.

Oczywiście można próbować na bazie funkcji f określić wzorem średnią dla większej liczby zmiennych. Nie trzeba przekonywać o trudnościach rachunkowych, które by się pojawiły.

Do zdefiniowania nowych średnich pójdziemy nieco inną drogą.

Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$M_\lambda(x_1,\ldots,x_m)=\frac{K_1(x_1,\ldots,x_m)+\lambda K_2(x_1,\ldots,x_m)}{1+\lambda},$$

gdzie $\lambda\in[0,\infty)$, K_1,K_2 są średnimi w sensie definicji 1, określonymi na I^m (I jest przedziałem).

Zauważmy, że M_λ jest średnią określoną na I^m, ponieważ

$$\min\{x_1,\ldots,x_m\}\leqslant K_1(x_1,\ldots,x_m)\leqslant\max\{x_1,\ldots,x_m\},$$

$$\lambda\min\{x_1,\ldots,x_m\}\leqslant\lambda\cdot K_2(x_1,\ldots,x_m)\leqslant\lambda\max\{x_1,\ldots,x_m\},$$

skąd po dodaniu stronami tych nierówności, a następnie pomnożeniu otrzymanej nierówności przez $\frac{1}{1+\lambda}$ dostajemy:

$$\min\{x_1,\ldots,x_m\}\leqslant M_\lambda(x_1,\ldots,x_m)\leqslant\max\{x_1,\ldots,x_m\}.$$

To, że funkcja M_λ jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną, wynika z tego, że M_λ jest sumą dwóch funkcji niemalejących ze względu na każdą zmienną.

Przy dodatkowym założeniu $K_1\leqslant K_2$ otrzymujemy

$$K_1\leqslant M_\lambda\leqslant K_2\quad\text{dla }\lambda\in[0,\infty).$$

Przy dodatkowym założeniu $K_1\geqslant K_2$ otrzymujemy

$$K_2\leqslant M_\lambda\leqslant K_1\quad\text{dla }\lambda\in[0,\infty).$$

Istotnie, przyjmijmy najpierw, że $K_1\leqslant K_2$. Wtedy warunek

$$K_1\leqslant\frac{K_1+\lambda K_2}{1+\lambda}\leqslant K_2$$

jest równoważny warunkowi

$$K_1(1+\lambda)\leqslant K_1+\lambda K_2\leqslant K_2(1+\lambda),$$

który jest zdaniem prawdziwym przy każdym ustalonym $\lambda\in[0,\infty)$ oraz każdym ustalonym ciągu z I^m.

W przypadku dodatkowego założenia $K_1\geqslant K_2$ dowód jest analogiczny.

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}M_\lambda=\frac{K_2-K_1}{(1+\lambda)^2},$$

więc przy każdym z założeń: $K_1\geqslant K_2$ albo też $K_1\leqslant K_2$, funkcja M_λ jest funkcją monotoniczną parametru λ.

Zauważmy dalej, że

$$M_0(x_1,\ldots,x_m)=K_1(x_1,\ldots,x_m),$$

$$M_\infty(x_1,\ldots,x_m)=K_2(x_1,\ldots,x_m),$$

gdzie $M_\infty(x_1,\ldots,x_m)$ oznacza $\lim_{\lambda\to\infty} M_\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_m)$.

Wychodząc od trzech średnich K_1, K_2, K_3, określonych na wspólnej dziedzinie I^m, zdefiniujemy funkcję $M_{\lambda,\mu}$ na I^m następująco:

$$M_{\lambda,\mu}(x_1,\ldots,x_m) = \frac{K_3(x_1,\ldots,x_m) + \mu\frac{K_1(x_1,\ldots,x_m)+\lambda K_2(x_1,\ldots,x_m)}{1+\lambda}}{1+\mu}$$

$$= \frac{(1+\lambda)K_3(x_1,\ldots,x_m)+\mu K_1(x_1,\ldots,x_m)+\lambda\mu K_2(x_1,\ldots,x_m)}{(1+\mu)(1+\lambda)},$$

gdzie $\lambda,\mu \in [0,\infty)$.

Nietrudno pokazać, że przy dowolnych $\lambda,\mu \in [0,\infty)$ funkcja $M_{\lambda,\mu}$ jest średnią w sensie definicji 1. Ponadto zauważmy, że:

$$M_{\lambda,0} = K_3, \qquad M_{0,\mu} = \frac{K_3+\mu K_1}{1+\mu},$$

$$M_{\lambda,\infty} = \frac{K_1+\lambda K_2}{1+\lambda}, \qquad M_{\infty,\mu} = \frac{K_3+\mu K_2}{1+\mu},$$

$$M_{0,\infty} = K_1, \qquad M_{\infty,\infty} = K_2.$$

Symbole $M_{\lambda,\infty}, M_{0,\infty}, M_{\infty,\mu}, M_{\infty,\infty}$ oznaczają odpowiednie granice. Przyjmując we wzorze określającym funkcję $M_{\lambda,\mu}$: $K_3 = H$, $K_2 = G$, $K_1 = A$ oraz $I = (0,\infty)$ (gdzie jak wyżej H, G, A oznaczają odpowiednio średnią harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną), dostajemy

$$H \leqslant \frac{(1+\lambda)H + \mu A + \lambda\mu G}{(1+\mu)(1+\lambda)} \leqslant A$$

dla dowolnych $\lambda,\mu \in [0,\infty)$ oraz $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}_+^m$.

Zauważmy też, że jeśli rozważane średnie K_1, K_2, K_3 są średnimi w sensie definicji 1, to obie średnie M_λ oraz $M_{\lambda,\mu}$ są średnimi w sensie tej definicji.

Powyżej określony proces konstrukcji nowych średnich można „przedłużać".

Literatura

Aczel, J., Dhombres, J.: 1989, Functional equation in several variables, *Encyclop. Math. and its Appl.* **31**, 197-224.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G.: 1952, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Kolmogorov, A.: 1930, Sur la notion de la moyenne, *Alti Accad. Naz. Lincei* **12**(6), 388-391.

Kourliandtchik, L.: 2006, *Wędrówki po krainie nierówności*, Aksjomat, Toruń.

Powązka, Z., Wachnicki, E.: 2004, Sur la monotonie en moyenne des suites, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia Math.* **IV**, 181-190.

Witkowski, A.: 2004, Weighted extended mean values, *Colloquium Mathematicum* **100**(1), 111-117.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail jangorowski@interia.pl