FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Anna K. Żeromska

Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki – wyzwanie edukacyjne*

Abstract. The purpose of this paper is to draw attention to the still current (as compared to the reform of higher education) issue: how should we train mathematics teachers in order to attain the desired outcomes? The article presents an extensive range of thought-provoking questions about what knowledge of well-educated mathematics teachers should be. References to the already existing didactic literature are included. Reflections on this question, containing some arguments as to the direction of the desired changes are presented. In support of these statements, two studies were carried out among students acting as teachers. Both studies point to the specificity of the necessary mathematical knowledge of teachers, and especially their need to have some flexibility in the transition from higher mathematics to school mathematics and vice versa.

1. Wstęp

Kształcenie nauczycieli jest bez wątpienia jedną z ważniejszych części składowych systemu edukacji w Polsce. Jak wszyscy wiemy, system ten ulega ciągłym przeobrażeniom, których celem jest stworzenie możliwie doskonałej i dobrze działającej konstrukcji. Zmianom podlega również tryb kształcenia nauczycieli. Te zmiany następują stopniowo, czasem wręcz niezauważalnie, a ich skutki są odroczone w czasie, co oznacza, że niekiedy trudno jest powiązać w tej kwestii rezultaty z ich przyczynami. Nieodpowiednie kształcenie nauczycieli może skutkować po wielu latach, a jego konsekwencje w sposób niezawiniony ponoszą uczniowie i absolwenci szkół. Weryfikacja i ewaluacja procesu kształcenia nauczycieli i jego rezultatów musi mieć zatem charakter ciągły i powinna być prowadzona już w trakcie trwania tego procesu. Natomiast sama struktura trybu kształcenia nauczycieli powinna powstawać w wyniku wielostronnego i interdyscyplinarnego podejścia przedstawicieli nauki i praktyki nauczania oraz specjalistów w dyscyplinach akademickich związanych bezpośrednio z odpowiednimi przedmiotami szkolnymi. Edukacja nauczycielska jest bowiem procesem wielofunkcyjnym i wielostronnym.

*Training the future mathematics teachers – an educational challenge

2010 Mathematics Subject Classification Primary: 97B50; Secondary 97C70

Key words and phrases: subject knowledge of mathematics teachers, teacher pedagogical knowledge, specific mathematical knowledge

Interdyscyplinarna współpraca na etapie projektowania edukacji nauczycielskiej powinna, moim zdaniem, mieć na celu ustalenie i ciągłe udoskonalanie koncepcji postępowania prowadzącego do wykształcenia nauczyciela tak, aby był przygotowany do pełnienia w pracy zawodowej różnych ról, a w szczególności: roli eksperta-specjalisty w dziedzinie macierzystej dla danego przedmiotu nauczania; eksperta-specjalisty w jej szkolnym ujęciu; refleksyjnego obserwatora i stymulatora przebiegu nauczania-uczenia się (znawcy i organizatora procesów poznawczych); refleksyjnego wychowawcy wspierającego wszechstronny rozwój ucznia (w tym jego systemu wartości); roli osoby integrującej zbiorowość klasową, motywującej do pracy (również do pozaszkolnego uczenia się) i celnie oceniającej jej rezultaty; organizatora i specjalisty od technicznej strony procesu nauczania (w tym rozwój użycia środków wspomagających ten proces), administratora itd. Zauważmy, że są to tylko te aspekty zawodu, które dotyczą pracy nauczyciela bezpośrednio z uczniem. A przecież wykonywanie tej profesji to także konieczność współpracy z innymi nauczycielami, władzami szkoły i rodzicami. Oprócz tego nauczyciel powinien być badaczem, posiadać umiejętność prowadzenia fragmentarycznych eksploracji dydaktycznych, odczuwać potrzebę wprowadzania do swojej praktyki innowacji, mieć postawę otwartą na ciągłe aktualizowanie swojej wiedzy itd. (Nowecki, 2006b).

W takim ujęciu, zarówno studia, jak i wykonywanie zawodu nauczycielskiego, jawią się jako wyjątkowe, ogromnie wymagające i trudne, z koniecznością humanistycznego i holistycznego podejścia do tematu. Edukację nauczycieli należy analizować i rozumieć w kategoriach szerszego kontekstu kulturowego, a brak takiego stanowiska może hamować procesy zmian na wszystkich poziomach całego systemu kształcenia. Edukacja nauczycieli powinna być ujęta w system ciągłego dokształcania i doskonalenia nauczycielskiej wiedzy i umiejętności (Nowecki, 2006a).

Wymagania stawiane przed nauczycielami są ogromne, a rezultaty ich pracy często bywają przedmiotem krytyki, co może powodować niekiedy zmęczenie lub zniechęcenie do wykonywania zawodu, a czasem wręcz występowanie syndromu nazywanego „wypaleniem zawodowym".

Pytania, jakie nasuwają się w wyniku powyższych rozważań, brzmią: czy faktycznie studia nauczycielskie spełniają wymagania przed nimi stawiane? Czy dobrze przygotowujemy studentów – przyszłych nauczycieli do pełnienia wszystkich wcześniej wspomnianych ról zawodowych?

Niniejsza praca oczywiście nie da komplementarnej odpowiedzi na te pytania. Zawierać będzie jednak pewne refleksje odnoszące się do kształcenia nauczycieli matematyki, częściowych rezultatów tego kształcenia (widocznych poprzez badania dydaktyczne dotyczące studentów) oraz wniosków, które – być może – z takich rozważań wynikają.

Teoretyczne i praktyczne spojrzenie na przygotowanie przyszłego nauczyciela matematyki do pracy nie jest tematem nowym i nie można go rozważać w oderwaniu od bogatej tradycji rozważań na ten temat. Istnieje wiele teorii i stanowisk odnoszących się do tematyki związanej z konieczną wiedzą nauczycielską odnośnie do matematyki i innych przedmiotów nauczania (por. Shulman, 1986; Ball, Cohen, 1996; Danek, 1996; Kwiatkowska, 2004; Sajka, 2006; Nowecki, 2006a; Nowecki, 2006b; Ma, 2010). Autorzy formułują różne kategorie wiedzy, która jest niezbędna nauczycielowi w praktyce zawodowej oraz wskazują na różnorodne niedostatki w tym zakresie. Nie ulega bowiem wątpliwości, że nauczycielom nieodzowna jest pewna szczególna wiedza, którą będą oni stosować dzień po dniu w trakcie swojej praktyki nauczania, aby próbować pomóc wszystkim uczniom. Swoistość zawodu nauczyciela polega jednak na tym, że nie da się go sprowadzić do zamkniętego systemu zasad, metod i technik działania. Znajomość tych zasad, metod i technik jest rzecz jasna potrzebna, ale nauczyciel najczęściej nie działa w sytuacjach powtarzalnych. Pomimo wielu stałych elementów procesu kształcenia, sytuacje edukacyjne są niestereotypowe i otwarte. To, co nauczycielowi czasem wydaje się regułą, może zaskoczyć swoją unikalnością i koniecznością innego – czasem odmiennego – postępowania. Aby umieć reagować adekwatnie do sytuacji, nauczyciel musi być do tego przygotowany (choćby poprzez refleksyjne uprzednie przeżycie wielu różnych sytuacji edukacyjnych w trakcie studiów i po ich ukończeniu). Etapem najsilniej odpowiedzialnym za przygotowanie nauczyciela jest oczywiście etap studiów. Ten etap powinien dostarczyć studentowi – przyszłemu nauczycielowi – wiedzy i doświadczeń pozwalających na świadomą weryfikację tych doświadczeń w późniejszej własnej praktyce. Pamiętajmy jednak, że wiele czynników, które wywierają wpływ na ludzkie myśli i nauczycielskie praktyki w klasach jest niewidocznych i niełatwych do zidentyfikowania. Wpływy te są czasami niedostrzegalne, są często niewerbalizowanymi zasadami, filozofiami i przekonaniami, które nieświadomie wnikają w edukacyjne przedsięwzięcie. Dydaktyka matematyki akcentuje na przykład fakt, że nauczycielskie pedagogiczne praktyki, w szczególności w początkowych etapach życia zawodowego nauczycieli, pozostają w dużej mierze pod wpływem wielu przeżytych lat nauki szkolnej w roli ucznia – podczas tysięcy godzin tzw. praktyki obserwującej (Lortie, 1975). Na ten aspekt chcę tu zwrócić szczególną uwagę: zajęcia akademickie dla przyszłych nauczycieli matematyki powinny, moim zdaniem, stanowić wzór, który mogliby oni naśladować we własnej praktyce. Takie założenie ma swoje poważne konsekwencje; składa bowiem duży ciężar odpowiedzialności na barki nauczycieli akademickich pracujących z przyszłymi nauczycielami szkolnymi. Tym bardziej zatem temat edukacji nauczycieli powinien być przedmiotem wzmożonej troski zarówno teoretyków, praktyków, jak i administratorów tego nurtu edukacyjnego, niezależnie od przedmiotu nauczania, do którego ten nurt przygotowuje.

2. O niezbędnej wiedzy nauczycieli raz jeszcze

Skupmy się na przygotowaniu nauczyciela matematyki w okresie studiów i wyróżnijmy (dokonując własnego podsumowania) trzy wzajemnie uzupełniające się zakresy wiedzy potrzebnej nauczycielowi matematyki w jego pracy zawodowej:

- treściowy;
- kompetencyjny;
- instrumentalny.

Zwróćmy uwagę, że taki sposób określenia całości wiedzy nauczyciela nie jest podziałem tej wiedzy pod względem obszarów akademickich typu: przedmiot wiodący (chemia, matematyka itd.), pedagogika, psychologia czy dydaktyka. A tak przecież najczęściej podchodzi się do konstrukcji programu kształcenia nauczycieli, wyróżniając: przedmioty kierunkowe, psychologiczno-pedagogiczne etc.

Wymienione przeze mnie komponenty wykształcenia nauczyciela dotyczą raczej różnych rodzajów jego wiedzy w trzech kategoriach: wiedza o faktach, posiadanie odpowiednich umiejętności oraz świadomość istniejących i możliwych do wykorzystania technik i środków.

W takim ujęciu, mówiąc o *komponencie treściowym wiedzy nauczyciela matematyki*, mam na myśli: głęboką wiedzę z zakresu matematyki, znajomość jej natury, metodologii, języka i specyfiki jej pojęć i struktur (Krygowska, 1986; Konior, 2002; Klakla, 2006). Konieczna jest tu wieloaspektowa biegłość w operowaniu pojęciami matematycznymi (w tym umiejętność konkretyzacji tych pojęć), znajomość relacji pomiędzy nimi (intuicyjnych i formalnych), ich modelowania oraz reguł teoretycznego i aplikacyjnego wykorzystywania dużych fragmentów tej wiedzy. Niezbędna jest przecież orientacja w relacji matematyki do rzeczywistości otaczającej człowieka (Ponte, 1994). Nauczycielowi potrzebne jest również (a może przede wszystkim) ukształtowane odniesienie wiedzy akademickiej do szkolnego ujęcia matematyki i biegłość w widzeniu matematyki szkolnej z „wyższego” stanowiska. Wzajemne relacje pomiędzy wiedzą szkolną i wiedzą akademicką powinny być przedmiotem szczególnej troski nauczycieli akademickich, zarówno badaczy, jak i praktyków edukacji nauczycielskiej.

Zawartość treściowa wiedzy nauczyciela matematyki nie może ograniczać się oczywiście jedynie do treści bezpośrednio związanych z matematyką. Nauczyciel powinien być biegły w organizowaniu świadomego procesu uczenia się przez swoich uczniów, a zatem jego wiedza w zakresie psychologii poznawczej oraz rozwojowej winna być głęboka i wyraźnie powiązana z procesem poznawania matematyki właśnie, gdzie wiele elementów struktury wiedzy powstaje w wyniku abstrahowania – konieczna jest wiedza o dostępnym asortymencie stymulatorów tego sposobu myślenia (Boero, 2002; Gray, Tall, 2002). Tu właśnie konieczna jest integracja psychologii z matematyką i pedagogiką, gdyż nauczyciel powinien także znać zasady procesów wychowawczych i socjologicznych, zważając na to, że nauczanie jest postępowaniem społecznym i nierozerwalnie związanym z koniecznością podejmowania odpowiednich oddziaływań. W zakresie wiedzy matematycznej oznacza to traktowanie tej wiedzy jako „społecznie skonstruowanej i uzasadnionej” (Sierpinska, Lerman, 1996) (przejście do takiego ujęcia wiedzy od „wiedzy a priori”, a także od „wiedzy, jako indywidualnej konstrukcji”). Skoro wiedzę matematyczną traktujemy jako wytwór społeczny – konieczne jest przygotowanie nauczyciela do zarządzania procesem powstawania tego wytworu. W programie kształcenia nauczycieli powinno znaleźć się miejsce na wiedzę, która umożliwi poznawanie zależności i zjawisk zachodzących w procesie rozwoju i kształtowania się jednostki w ujęciu holistycznym.

Komponent treściowy wiedzy nauczyciela byłby martwy, gdybyśmy nie wyposażyli tego nauczyciela w asortyment umiejętności pozwalających stosować wiedzę w praktyce. Stereotypowe myślenie o praktyce w przygotowaniu studenta do wykonywania zawodu nauczyciela ogranicza się do kwalifikacji do sporządzania scenariuszy (konspektów) lekcji, dobierania metod i środków ich realizacji. Zwróćmy uwagę na konieczność szerszego rozumienia zawartości *komponentu kompetencyjnego wie-*

dzy nauczyciela. Najogólniej mówiąc, w zakresie rozważanego komponentu chodzi o „transformację teorii do praktyki". Cóż bowiem z tego, że nauczyciel będzie znał pojęcie procesu poznawczego, roli wiedzy uprzedniej i emocji w tym procesie, jeśli nie będzie umiał takiego procesu zaaranżować w praktyce. Mówiąc prościej, nauczyciel powinien wiedzieć, że na matematykę można patrzeć jak na „dynamiczną, problemami napędzaną i nieustannie rozwijającą się dziedzinę ludzkiego tworzenia i inwencji, w której schematy są generowane, a następnie włączane do wiedzy". Tak więc matematyka jest procesem badania i dochodzenia do wiedzy dodawanego potem do sumy tej wiedzy (Bessot, 1996). Matematyka nie jest gotowym produktem, jej wyniki pozostają otwarte do refleksji (Klakla, 2006). Świadomość takiego poglądu to jest za mało; nauczyciel powinien umieć prowokować taki proces badania. Aby taki proces umieć reżyserować – samemu najpierw trzeba wielokrotnie go przeżyć. Kiedy? Właśnie w trakcie studiów nauczycielskich i nie musi się to kończyć odkrywaniem „wielkiej matematyki" – ważniejszy jest proces niż wytwór. Skoro wiemy, że absolwenci studiów nauczycielskich w swojej przyszłej pracy odtwarzają wzorce nauczania, których doświadczyli w trakcie własnej nauki szkolnej i akademickiej to uświadommy sobie, że student, który wiele lat spędził na uczeniu się matematyki jako gotowej wiedzy (czasem – o zgrozo – na pamięć), nie będzie prawdopodobnie potrafił inaczej spojrzeć na budowę wiedzy matematycznej i konstruktywistyczny sposób jej konstytuowania się. Idea prowadzenia zajęć ze studentami tak, aby mieli okazję osobiście doświadczać twórczej aktywności matematycznej, tak jak jest istotna, tak i często zapomniana (Klakla, 2002).

Kolejna umiejętność konieczna przyszłemu nauczycielowi to zdolność do refleksyjnego oceniania przebiegu i rezultatów własnej pracy oraz wyciągania z tych refleksji wniosków. Faktem jest, że w trakcie praktyk szkolnych studenci pod okiem nauczycieli akademickich i szkolnych dokonują bardzo drobiazgowych czasem analiz przeprowadzonych przez siebie lekcji. Ta refleksja jest ważna i potrzebna. Jednakowoż chodzi też o inny rodzaj refleksji, nie dotyczącej jeszcze praktyk dydaktycznych, ale refleksji nad **własną** aktywnością matematyczną. Sądzę, że studenci powinni umieć i być prowokowani do refleksyjnego oceniania np. przebiegu własnych procesów rozwiązywania zadań i konstatowania przeszkód i punktów zwrotnych w tych procesach – będą wówczas wiedzieli jak czuwać nad przebiegiem takiego procesu u uczniów tak, aby umieć „postawić się na miejscu ucznia, zobaczyć jakie jest jego położenie, zrozumieć, co dzieje się w jego umyśle" tak, aby „pozostawić mu przynajmniej złudzenie samodzielnej pracy" (Polya, 2009, s. 21). Nauczyciel powinien umieć zidentyfikować i nazwać własne strategie uczenia się, ich stymulatory i przeszkody, łącznie z przeszkodami natury epistemologicznej (Sierpińska, 1994; Żeromska, 2010c, 2010b). Nauczyciel powinien także mieć świadomość roli komponentów emocjonalnych w procesach poznawczych i edukacyjnych i wykorzystywać tę wiedzę w praktyce (Żeromska, 2009).

Następna kategoria umiejętności, o której chcę wspomnieć, dotyczy prowadzenia przez nauczycieli własnych małych prób badawczych i wyciągania trafnych wniosków z tych badań (Arends, 1994; Zaczyński, 1995; Czarnocha, 2008). Szczególnie istotna jest tu kompetencja w określaniu celów takiego badania, dobierania narzędzi badawczych i umiejętnego wyciągania wniosków aplikowalnych w dalszej praktyce nauczania. Jeśli nauczyciele będą badać skutki własnego nauczania i konfrontować je z tym, co inni już zbadali w tym zakresie, staną się bardziej wrażliwi na zmiany i bardziej świadomi tego, jakie środki stosować, aby osiągać zamierzone cele, jak patrzeć na własną praktykę z różnych perspektyw oraz jak wykorzystywać zdobytą w ten sposób wiedzę. Bez wątpienia absolwent studiów nauczycielskich, chociaż raz w trakcie tych studiów powinien mieć okazję przeprowadzić takie badanie dydaktyczne, choćby przy okazji pisania pracy dyplomowej.

Cały szereg umiejętności niezbędnych nauczycielowi dotyczy jego pozamatematycznej działalności. Myślę tu o kompetencjach pedagogiczno-psychologiczno-socjalnych, które są niezbędne do pracy w szkole. Wiele z nich jest uniwersalnych (niezależnych od przedmiotu, którego nauczyciel naucza), choćby elastyczne reagowanie w sytuacjach wychowawczych (np. konfliktowych), zapobieganie agresji i przemocy, stymulowanie do zachowań altruistycznych, kierowanie zespołem i uczenie współpracy, motywowanie do nauki, organizowanie czasu pozalekcyjnego (np. wycieczek szkolnych) itd. Inne jeszcze kompetencje potrzebne są do pracy w układzie społecznym: klasa szkolna – grono pedagogiczne – dyrekcja szkoły – władze oświatowe i inne. Niektóre jednak (z pozoru pozamatematyczne) umiejętności pedagogiczno-psychologiczno-socjalne nauczyciela, nierozerwalnie jednak z tą matematyką są związane. Chcę podkreślić m.in. zaniedbywany fakt wpływu nauczyciela na kształtowanie się postawy ucznia wobec matematyki i jej szkolnego nauczania-uczenia się oraz często nieuświadomiony przez nauczyciela przekaz dotyczący konstytuującej się hierarchii wartości ucznia (Bishop, 1999; Żeromska, 2009, 2010a, 2010b, 2010c).

Ostatni z wymienionych wcześniej zakresów wiedzy nauczycielskiej nazwałam *instrumentalnym komponentem wiedzy nauczyciela* i mam tu na myśli przede wszystkim wiedzę o zasadach, metodach i środkach nauczania matematyki, orientację w literaturze dydaktycznej, znajomość programów szkolnych i tendencji w ich konstruowaniu, znajomość podręczników szkolnych i posiadanie umiejętności trafnej oceny ich przydatności etc. Wreszcie posiadanie wiedzy instrumentalnej odnosi się do fazy planowania, prowadzenia i oceny nauczania i uczenia się, do wiedzy bezpośrednio związanej z organizacją i konkretyzacją praktyki w klasie. O podobnej kategorii wiedzy pisze S. Turnau, wymieniając „arsenał dostępnych metod i środków dydaktycznych wraz z umiejętnością posługiwania się nimi" jako niezbędny składnik wiedzy zawodowej nauczyciela (1990, s. 14)

Jedno z bardziej trafnych spostrzeżeń w literaturze dotyczącej tematu poruszanego w tej pracy określa, że „nauczyciel potrzebuje takiej świadomości swego przedmiotu, która jest ponad i poza właściwą treścią przedmiotu" (Pearson, 1994, s. 163). To sformułowanie oddaje głębię odrębności i elitarność charakteru wiedzy, jakiej potrzebuje nauczyciel. Niestety w dość powszechnym odczuciu, koniecznym a zarazem wystarczającym warunkiem kompetencji zawodowych nauczyciela jest jego w miarę biegła znajomość dziedziny akademickiej, której dotyczy dany przedmiot nauczania. Odnosząc to spostrzeżenie do matematyki, można by twierdzić: ten będzie dobrym nauczycielem matematyki, który sam jest dobrym matematykiem. Z takim stanowiskiem polemizuję w niniejszej pracy i chcę podać przykłady dowodzące, że dla nauczania matematyki potrzeba innej wiedzy niż tylko biegłość w tej dziedzinie akademickiej. Takiego samego zdania są i inni badacze, niektórzy nawet twierdzą, że posiadanie czystej wiedzy matematycznej może wręcz hamować odpowiednie działanie nauczyciela w klasie (Leikin, Levav-Waynberg, 2007).

Moje spostrzeżenia potwierdzają fakt, że to, co nauczyciele muszą wiedzieć i rozumieć o pojęciach i procedurach matematycznych powinno znacznie różnić się od tej wiedzy, która jest zupełnie wystarczająca dla innych osób dorosłych. H. Freudenthal zauważa, że nauczyciele często należą do dużej grupy osób dorosłych, gdzie źródła tego, czego kiedyś się nauczyli, zostały przytłumione przez wiedzę i umiejętności nabyte w międzyczasie. Dorośli pamiętają np., że mnożenie przez 100 powoduje „dodanie dwóch zer", ale nie pamiętają dlaczego można i należy tak robić (Freudenthal, 1981, s. 148-149).

Powyższe rozważania uprawniają do sformułowania dwóch następujących tez:

1. Wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki musi mieć odmienny charakter niż wykształconego matematyka.
2. Matematyczne kształcenie przyszłych nauczycieli musi różnić się od kształcenia „czystych" matematyków.

Na potwierdzenie tych stwierdzeń przytoczę dwa przykłady (odpowiednio dla potwierdzenia pierwszej oraz drugiej tezy), pochodzące z prowadzonych przeze mnie badań.

3. Przykłady

Przykład 1. „Algorytm mnożenia wielocyfrowych liczb naturalnych"

Nauczycielska wiedza na temat pisemnego mnożenia wielocyfrowych liczb naturalnych powinna w szczególności obejmować dobrze opanowaną umiejętność wykonywania takiej czynności, ale nie powinna się do tego ograniczać. Nauczyciel musi rozumieć ten algorytm pojęciowo, bazując na jego matematycznej strukturze w dziesiętnym pozycyjnym systemie liczenia; powinien biegle posługiwać się tą techniką, mając świadomość jej poprawności i jednoznaczności otrzymywanego wyniku. To jednak nie wystarczy. Nauczyciel powinien również umiejętnie operować kontekstualnym znaczeniem czynności mnożenia we wszystkich aspektach liczb naturalnych wraz z możliwością ilustrowania tego na konkretach. Szczególnie ważne jest, aby nauczyciel rozumiał i wykorzystywał intuicje dzieci związane z działaniem mnożenia liczb, zarówno przed wprowadzeniem algorytmu mnożenia pisemnego, jak i po jego wdrożeniu.

Wiadomo, iż dzieci na działanie mnożenia liczb naturalnych patrzą przez pryzmat konkretnego znaczenia mnożenia jako pomnażania liczby elementów w zbiorze. Takie intuicje dzieci wymagają wzmocnienia poprzez wykonywanie czynności konkretnych, aż po ich ujęcie algorytmiczne, a potem, już po zalgorytmizowaniu tych czynności jeszcze wielokrotnie należy wracać do konkretu tak, aby ten powrót zawsze był możliwy. Obowiązują przy tym bowiem, pisze S. Turnau, dwie zasady dydaktyczne: „1) wprowadzanie formalnego algorytmu czy reguły może nastąpić dopiero po takim przyswojeniu operacji, po którym dziecko by tę operację umiało wykonać w prostych przypadkach z użyciem materiałów konkretnych lub przez czynności wykonywane w myśli; 2) po wprowadzeniu algorytmu czy reguły, w toku ćwiczeń sprawnościowych, należy powracać do intuicyjnego, to jest odnoszącego się do konkretów rozumienia operacji tak często, by *taki powrót był zawsze* *możliwy*" (1990, s. 124). Rozumienie tego faktu wymaga od nauczyciela elastyczności w przechodzeniu od algorytmu mnożenia wielocyfrowych liczb naturalnych, opisywanego językiem poleceń typu: „mnożenie zaczynamy od końca…", „podpisujemy jedności pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami…", „dodajemy…, przenosimy…" itd., do ilustrowania kolejno wykonywanych czynności konkretami, wykorzystywania rozdzielności mnożenia względem dodawania, ilustrowania tego np. odpowiednim rysunkiem. Okazuje się, że umiejętności tego typu nie muszą towarzyszyć biegłemu posługiwaniu się omawianym algorytmem. Dowodem tego faktu są wyniki próby badawczej, która będzie przedmiotem opisu w dalszej części tej pracy.

Przez kilka lat prowadziłam zajęcia z dydaktyki matematyki w jednej z uczelni technicznych na kierunku „matematyka stosowana". Zajęcia te były częścią tzw. kursu pedagogicznego, którego zaliczenie dawało studentom (a potem absolwentom wydziału matematycznego) uprawnienia do nauczania matematyki w szkole podstawowej, gimnazjum oraz szkole ponadgimnazjalnej. Uczestnicy tych zajęć z reguły składali się z osób o wyższych niż przeciętne kwalifikacjach matematycznych, które niewątpliwie obejmowały umiejętność pisemnego mnożenia wielocyfrowych liczb naturalnych przez siebie. Osoby te zostały poproszone o rozwiązanie następującego zadania:

Pomnóż sposobem pisemnym liczby 23 i 12, następnie:

1. *Zilustruj to wykonane pisemne mnożenie (np. przy pomocy kresek, kropek itd.).*
2. *Odpowiedz na pytanie: który z następujących zapisów jest klasycznym zapisem mnożenia liczb 213 · 45 wykonanego sposobem pisemnym?*
   (a) $213 \cdot 45 = 5 \cdot 213 + 4 \cdot 213$,
   (b) $213 \cdot 45 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 200 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 200$,
   (c) $213 \cdot 45 = 5 \cdot 213 + 40 \cdot 213$.

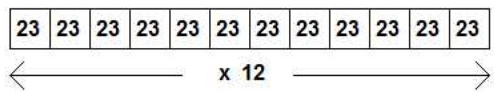
Wśród 84 osób rozwiązujących to zadanie jedynie co czwarty student wykonał oba polecenia poprawnie, natomiast aż 34 studentów oba błędnie.

Decydująca okazała się refleksja w trakcie sporządzania rysunku – to tam rozwiązujący ilustrując strukturę mnożenia pisemnego uświadamiali sobie jak wykonywane jest to mnożenie pisemne. Tylko 7 osób (spośród 28), które poprawnie wykonało polecenie 1, błędnie odpowiedziało na pytanie zawarte w poleceniu 2 (podali odpowiedź b). Zestawienie ilościowe poprawności rozwiązań cytowanego zadania przedstawia się następująco:

Tabela 1.

<table>
<tr><th colspan="4">Polecenie 1 (wykonanie rysunku)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Poprawnie: 28</td><td>Niepoprawnie: 35</td><td>Brak: 21</td></tr>
<tr><th colspan="2">Polecenie 2 (wybór zapisu)</th><th colspan="2">Polecenie 2 (wybór zapisu)</th></tr>
<tr><td>Poprawnie: 21</td><td>Niepoprawnie: 7</td><td>Poprawnie: 22</td><td>Niepoprawnie: 34</td></tr>
<tr><th colspan="4">Razem: 84</th></tr>
</table>

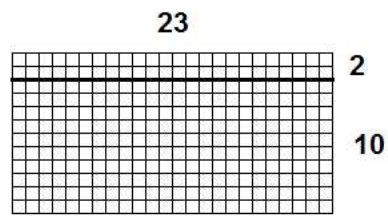
Okazało się, że większość studentów nie potrafiła odpowiednio zilustrować mnożenia pisemnego dwóch liczb. Pomimo podanej w poleceniu sugestii dotyczącej rysowania kropek itp. badani w większości rysowali drzewka liczbowe, czasem pracowicie rysowali np. 276 kreseczek grupując je po 12. Schemat takiego rysunku wygląda następująco:



Rysunek 1.

W rysunkach tego typu brak istoty mnożenia pisemnego (rozkładu czynnika 12 na sumę $2 + 10$).

Niektórzy inni studenci bardzo dojrzale odwoływali się np. do intuicji wiążących mnożenie liczb z obliczaniem pola prostokąta i ilustrowali w sposób, którego schemat przedstawiam poniżej.



Rysunek 2.

Odnośnie do pytania zawartego w poleceniu 2 badani studenci nagminnie podawali odpowiedź a) jako poprawną, nie weryfikując nawet tej odpowiedzi wykonaniem wskazywanego działania ($213 \cdot 45 \neq 5 \cdot 213 + 4 \cdot 213$). Ich wybór potwierdza brak refleksji na temat znaczenia manipulacji wykonywanych w trakcie realizacji algorytmu mnożenia. Największy niepokój wzbudziły jednak we mnie opinie studentów wypowiadane w trakcie omawiania własnych rozwiązań; wielu z nich stwierdzało, że niepotrzebne jest takie, cyt. „dzielenie włosa na czworo”, „w szkole należy pokazać dzieciom algorytm i kazać się go nauczyć, dzieci nie muszą rozumieć tego, co wykonują (sic!), wystarczy, aby nabrały odpowiedniej wprawy w stosowaniu techniki”. Takie postępowanie nauczyciela mogłoby uniemożliwić odpowiednie kształtowanie się w umyśle dziecka pojęcia liczb i działań na nich. S. Turnau pisze: „przyswojenie działań – to przyswojenie wszystkich ich podstawowych aspektów, co wymaga także licznych manipulacji odpowiednio dobranymi materiałami konkretnymi w dostatecznie długim czasie” (Turnau, 1990, s. 122). W innym miejscu czytamy „zarówno brak kontaktu z ważnymi fenomenami, jak i sztuczne stłoczenie tego procesu w zbyt krótkim czasie, prowadzi do abstraktów ułomnych, które nie mogą należycie pełnić swej funkcji, a w pewnych warunkach także do zablokowania dalszego procesu ich doskonalenia” (Turnau, 1990, s. 121).

Powyższy przykład pokazuje odrębność wiedzy matematycznej potrzebnej do nauczania, od tej, którą posiadają dorośli, nawet jeśli na co dzień zajmują się matematyką.

Przykład 2. „Uzmiennianie stałej”

Przykład będący przedmiotem opisu w dalszym ciągu niniejszej pracy w moim założeniu powinien wzmocnić tezę o konieczności głębokiej refleksji nad sposobem matematycznego kształcenia przyszłych nauczycieli. Przedstawię wyniki fragmentarycznego badania przeprowadzonego wśród praktykujących nauczycieli matematyki. 30 osobom dano do wglądu poniższe znane twierdzenie dotyczące liczb naturalnych oraz 3 rodzaje rozumowań to twierdzenie uzasadniających.

TWIERDZENIE: Suma n początkowych liczb naturalnych jest równa $\frac{n(n+1)}{2}$, *czyli* $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

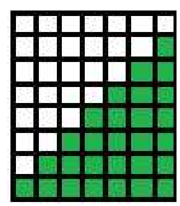
Następnie badanym nauczycielom zadano dwa pytania:

1. Które z rozumowań przedstawionych poniżej akceptujesz jako poprawny dowód matematyczny podanego twierdzenia? Uzasadnij swój wybór.
2. Które z rozumowań wykorzystałbyś w szkole jako dowód podanego twierdzenia dla uczniów (zakładając oczywiście, że uczniowie znają odpowiedni materiał)? Uzasadnij swój wybór.

Respondentom przedstawiono następujące rozumowania (1-3).

Rozumowanie 1

Weźmy sumę pierwszych 7 liczb naturalnych. Dla zilustrowania sytuacji narysujmy następującą figurę:



Rysunek 3.

Powstał prostokąt podzielony na jednakowe części. Zaznaczono „schodkami" sumę tych części 1+2+3+4+5+6+7. W ten sposób podzielono cały prostokąt na połowę, a zatem liczba małych części (oddzielonych „schodkami") wynosi $\frac{7(7+1)}{2}$.

Tę procedurę można powtórzyć dla dowolnej innej sumy liczb naturalnych, można się więc przekonać, że twierdzenie jest prawdziwe.

Rozumowanie 2

Weźmy dowolną liczbę naturalną, np. 7. Możemy zapisać następujące dwie sumy:

$1+2+3+4+5+6+7$.

$\underline{7+6+5+4+3+2+1}$. Po dodaniu otrzymamy:

$8+8+8+8+8+8+8=7\cdot 8=7(7+1)$.

Jedna z dodawanych sum to połowa wyniku, więc prawdą jest, że $1+2+3+4+5+6+7=\frac{7(7+1)}{2}$.

Tę procedurę można zastosować dla każdej innej liczby naturalnej, a zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Rozumowanie 3

Użyjmy Zasady Indukcji Matematycznej (ZIM).

Weźmy $n = 1$, wtedy L = P. Pokażmy jeszcze prawdziwość implikacji:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

W tym celu dodajmy do obu stron równości z założenia implikacji wyrażenie $n+1$. Otrzymamy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Przekształćmy prawą stronę tej równości:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

co dowodzi faktu, że zachodzi implikacja, której należało dowieść.

A zatem, na podstawie ZIM, wyjściowe twierdzenie jest prawdziwe.

4. Wyniki badania i wnioski

Przedstawmy zestawienie ilościowe odpowiedzi udzielonych na oba pytania przedstawione w opisywanym badaniu odpowiednio w tabelach 2 i 3.

Odnośnie do pytania 1 (Które z rozumowań przedstawionych poniżej akceptujesz jako dowód matematyczny podanego twierdzenia? Uzasadnij swój wybór.) rozkład odpowiedzi wyglądał następująco:

Tabela 2.

Rozumowanie 1	—
Rozumowanie 2	—
Rozumowanie 3	30 osób

Jako uzasadnienie tego wyboru wszyscy nauczyciele zgodnie podawali, że Zasada Indukcji Matematycznej jest **jedynym** poprawnym spośród przedstawionych sposobem uzasadniania twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

Odnośnie do pytania 2 (Które z rozumowań wykorzystałbyś w szkole jako dowód podanego twierdzenia dla uczniów (zakładając, że uczniowie znają odpowiedni materiał)? Uzasadnij swój wybór.) już odpowiedzi i uzasadnienia nie były tak jednoznaczne. Oto rozkład liczbowy tych odpowiedzi.

Tabela 3.

Rozumowanie 1	17 osób
Rozumowanie 2	10 osób
Rozumowanie 3	3 osoby

Widzimy, że tylko 3 osoby uznały, że ZIM może w szkole posłużyć jako dobry sposób udowodnienia omawianego twierdzenia. Większość nauczycieli wybrała rozumowanie 1 uzasadniając, że jest ono „rysunkowe”, więc najlepiej sprawdzi się w warunkach szkolnych. Odpowiedzi nauczycieli pokazują pewną niezgodność przekonań: otóż (w mniemaniu większości przebadanych) „matematycznie” tylko ZIM stanowi podstawę weryfikacji twierdzenia dotyczącego liczb naturalnych, a w „szkolnych" warunkach już prawdziwość może być orzekana na podstawie pewnych (ich zdaniem) „półśrodków". Nauczyciele ci prawdopodobnie nie mieli świadomości, że pierwsze dwa przedstawione im rozumowania zostały przeprowadzone zgodnie ze schematem „uzmienniania stałej" (Krygowska, 1977) i stanowią przykłady poprawnych rozumowań matematycznych. Niepokojąca jest jednak niespójność pomiędzy własnym (być może niepełnym) obrazem tego, co to jest metoda matematyczna a obrazem, który jest przez nauczyciela przekazywany uczniom.

Kształcenie nauczycieli powinno być inaczej ukierunkowane niż kształcenie tzw. „czystego matematyka". Między innymi chodzi o to, aby nie traktować metody matematycznej wyłącznie w jej aspektach formalnych, z pominięciem jej naturalnych (czasem prymitywnych) źródeł i interpretacji tej metody przez niekoniecznie dojrzałe matematycznie umysły. Przyszły nauczyciel powinien mieć okazję m. in. do głębokich refleksji na temat roli wnioskowań empirycznych, intuicyjnych i formalnych w konstytuowaniu się struktury wiedzy matematycznej, przeżywać takie procesy wielokrotnie, mieć szersze spojrzenie na rolę rozumowań intuicyjnych i formalnych, rolę intuicji „przedłużonej" w tworzeniu się wiedzy itd. – między innymi poprzez wielokrotne przeżywanie wzajemnego wpływu tych rodzajów rozumowań na siebie. Uzyskanie tej wyrafinowanej wiedzy i rozwijanie praktyki wymaga możliwości kształcenia nauczycieli, które są bardziej skuteczne niż tylko demonstrowanie i rozmowy na temat nowych pomysłów dydaktycznych (Ball, Cohen, 1996).

5. Zakończenie

Studiując literaturę dydaktyczną można odnieść wrażenie, że istnieje zasadnicza zgoda na całym świecie co do tego, że wiedza niezbędna do nauczania dzieci powinna mieć specyficzny charakter. Jednak bliższe spojrzenie na programy studiów nauczycielskich czy egzaminy zawodowe nauczycieli uprawnia do stwierdzenia, że nie ma zgody co do tego, co nauczyciele matematyki rzeczywiście powinni wiedzieć, aby uczyć tego przedmiotu. Cytowana przeze mnie literatura pokazuje, że naukowcy mają jednak przypuszczenia o potencjalnej możliwości organizacji takiej wiedzy, a te przypuszczenia uprawniają do rozważań przedstawianych w niniejszej pracy. Rozważania są o tyle ważne, że wkraczamy w fazę określania tzw. Krajowych Ram Kwalifikacji[1] i konieczne jest uświadomienie sobie, co to oznacza (i jak sprawdzić), że nauczyciel ma odpowiednie kwalifikacje do nauczania matematyki.

Coraz częściej pojęcie holizmu wkracza do edukacji szkolnej – czas aby wkroczyło też do sfery projektowania procesu kształcenia nauczycieli. Należy bowiem jednoznacznie podkreślić, że jakie będzie kształcenie nauczycieli, taka będzie i cała edukacja, od której w dużym stopniu zależy rozwój cywilizacji i gospodarki na przyszłe lata.

[1] Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego w sprawie Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego z dnia 2 listopada 2011 r.

Literatura

Arends, I. R.: 1994, *Uczymy się nauczać*, WSiP, Warszawa.

Ball, D. L., Cohen, D. K.: 1996, Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform?, *Educational Researcher* **25**(9), 6-8.

Bessot, A.: 1996, Ramy teoretyczne dydaktyki matematyki we Francji, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **18**, 31-56.

Bishop, A. J.: 1999, Mathematics teaching and values educatin – an intersection in need of research, *Zenterblatt für Didaktik der Mathematik* **1**, 1-5.

Boero, P.: 2002, Abstraction: What do we need in mathematics education?, *Proceedings of the 26th Annual Conference PME International Conference, vol. 1*, 133-138.

Czarnocha, B.: 2008, *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment – A Tool for Teacher – Researchers*, University of Rzeszow, Rzeszów.

Danek, K.: 1996, Kształcenie i doskonalenie nauczyciela w kontekście rozwoju jego kompetencji, w: S. Juszczyk (red.), *Twórczy rozwój nauczyciela*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

Freudenthal, H.: 1981, Major problems of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 133-150.

Gray, E., Tall, D.: 2002, Abstraction: What do we need in mathematics education?, *Proceedings of the 26th Annual Conference PME International Conference, vol. 1*, 115-120.

Klakla, M.: 2002, Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 263-273.

Klakla, M.: 2006, Gotowa wiedza i aktywność w matematycznym kształceniu, na przykładzie kątów Langley'a, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 75-93.

Konior, J.: 2002, Tekst matematyczny i jego lektura; nauka czytania tekstów matematycznych w szkole, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 251-375.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Kwiatkowska, H.: 2004, Pedeutologia – stan i kierunki rozwoju w latach 1995-2004, *Rocznik Pedagogiczny* **27**, 199-200.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A.: 2007, Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks, *Educational Studies in Mathematics* **66**, 349-371.

Lortie, D.: 1975, *School-teacher: a sociological study*, The University of Chicago Press, Chicago and London.

Ma, L.: 2010, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics Teachers. Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Routledge, New York.

Nowecki, B. J.: 2006a, Dokształcanie i doskonalenie nauczycieli na studiach podyplomowych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 187-196.

Nowecki, B. J.: 2006b, Koncepcja kształcenia nauczycieli, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 197-203.

Pearson, A.: 1994, *Nauczyciel. Teoria i praktyka w kształceniu nauczycieli*, WSiP, Warszawa.

Polya, G.: 2009, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Ponte, J. P.: 1994, Mathematics teachers' professional knowledge, *Proceedings of the 18th Annual Conference PME International Conference, vol. 1*, 195-210.

Sajka, M.: 2006, Refleksje na temat określania wiedzy przedmiotowej nauczycieli matematyki, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 297-321.

Shulman, L.: 1986, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15**(2), 4-14.

Sierpinska, A., Lerman, S.: 1996, Epistemologies of mathematics and of mathematics education, w: A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (red.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, London, 827-876.

Sierpińska, A.: 1994, Perspektywa diachroniczna w badaniach nad rozumieniem w matematyce – użyteczność i ograniczenia pojęcia przeszkody epistemologicznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **16**, 71-103.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Zaczyński, W.: 1995, *Praca badawcza nauczyciela,* wyd. IV, WSiP, Warszawa.

Żeromska, A. K.: 2009, Uczniowska wizja matematyki szkolnej – fragment badań dotyczących antropomatematycznych aspektów uczenia się i nauczania, *Annales of the Polish Math. Soc., Series V, Didactica Mathematicae* **32**, 175-192.

Żeromska, A. K.: 2010a, Logiczne i merytoryczne aspekty prawdy matematycznej w rozumieniu studentów – przyszłych nauczycieli matematyki, *Pedagogika Szkoły Wyższej* **32**, 243-253.

Żeromska, A. K.: 2010b, Miejsce badań historyczno-epistemologicznych w nurcie kształcenia nauczycieli matematyki, w: A. Kwatera, P. Cieśla (red.), *Rola i zadania dydaktyk przedmiotowych w kształceniu nauczycieli*, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków, 333-340.

Żeromska, A. K.: 2010c, Rola nauczyciela w kształtowaniu postawy ucznia wobec matematyki, *Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku, Pedagogika, Kształcenie pedagogów – strategie, koncepcje, idee „Język – komunikacja – etyczność – twórczość", część I* **8**, 241-247.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: annaz@up.krakow.pl