FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Zbigniew Powązka

Z badań nad trudnościami studentów w rozumieniu pojęcia miary i całki*

Abstract. Measurement is an important form of human activity. It appears at all levels of secondary school education, while discussing the length of a segment, the area of a plane figure and the volume of a solid. The definition of a measure, understood as a non-negative real function defined on a σ-field of sets of a space, is taught during the classes on mathematical analysis. It is observed that the concept of measurement causes great difficulties to students. This paper presents the results of research on students' difficulties in understanding and using the basic concepts of measure theory and integral. The research conducted in years 2006-2009 shed some light on the causes of those difficulties. The study involved students of the third year of the Mathematics Department at the Pedagogical University of Krakow.

1. Wstęp

Jedną z ważnych form działalności człowieka jest mierzenie. Pojawia się ona w życiu codziennym, np. podczas wyznaczania odległości, czasu, wymierzania powierzchni mieszkania, domu lub działki, objętości naczynia. We wszystkich tych sytuacjach należy posłużyć się pojęciem miary.

Jest ono bardzo ważnym pojęciem matematycznym i znajduje zastosowanie np. w geometrii, rachunku prawdopodobieństwa, analizie matematycznej. W analizie matematycznej przez miarę rozumie się nieujemną, rzeczywistą funkcję określoną na σ-ciele zbiorów pewnej przestrzeni X. Funkcja ta przyjmuje wartość zero na zbiorze pustym i jest przeliczalnie addytywna na zbiorach parami rozłącznych. Tak rozumiane pojęcie miary stanowi uogólnienie pojęć: długości odcinka, pola powierzchni figury płaskiej i objętości bryły, które są opracowywane w szkole podstawowej, gimnazjum lub szkole ponadgimnazjalnej na poziomie przeddefinicyjnym.

Definicje tego pojęcia poznają studenci studiów matematycznych podczas wykładów z analizy matematycznej.

---

*From the research on students' difficulties in understanding the concepts of measure and integral

2010 Mathematics Subject Classification Primary: 97B50; Secondary 28A12

Key words and phrases: measure, integral, problems

W nauczaniu matematyki pojęcie miary budowane jest więc poczynając od miary Jordana, poznawanej bardziej czy mniej świadomie przez zdecydowaną większość dzieci i młodzieży, do miary Lebesgue'a, z którą zaznajamiają się przede wszystkim studenci studiów matematycznych na ogół na drugim stopniu tych studiów. Proces kształtowania tego pojęcia jest długotrwały i wymaga na każdym poziomie edukacji wielu zabiegów dydaktycznych.

Studiowanie teorii miary wymaga bowiem od studenta posiadania dobrze ugruntowanej wiedzy z logiki, teorii mnogości, topologii przestrzeni metrycznej oraz analizy matematycznej (Chronowski, Powązka, 2012).

Koncepcje kształtowania pojęcia miary na różnych szczeblach edukacji zostały opisane w pracy (Powązka, 2009b). Podano tam również ważny, moim zdaniem, przykład ilustrujący najważniejsze własności miary tworzonej za pomocą twierdzenia Carathéodory'ego z miary zewnętrznej. Zaletą tego przykładu jest jego prostota, ale nie banalność. Student posługując się nim może zrozumieć wzajemne związki między pojęciami, zachodzące w bardziej skomplikowanych abstrakcyjnych sytuacjach.

Z pojęciem miary związane jest pojęcie całki. W kursie analizy matematycznej omawia się całkę Riemanna i całkę względem miary, a w szczególności całkę Lebesgue'a. Problem całkowalności funkcji względem miary interesuje wielu matematyków i dydaktyków matematyki. Ciekawą koncepcję dydaktyczną opracowania pojęcia całki proponują matematyce słowaccy (por. np. Gunčaga, 2009).

W niniejszej pracy przedstawione zostaną wyniki badań nad trudnościami studentów trzeciego roku nauczycielskich studiów matematycznych na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie w zakresie teorii miary i całki. Prowadzone w latach 2006-2009 obserwacje rzucają nieco światła na ich przyczyny.

2. Zagadnienia metodologiczne

W tej części pracy sformułowany zostanie cel badań, opisane będzie narzędzie badawcze oraz sposób prowadzenia badań.

Jak już wspomniano powyżej, od roku 2006 podczas zajęć z analizy matematycznej na trzecim roku stacjonarnych studiów nauczycielskich były prowadzone obserwacje stopnia przyswojenia przez studentów treści z teorii miary, a zwłaszcza miary i całki Lebesgue'a. Szukano odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

1. Czy wiedza zdobyta przez studentów z teorii miary i całki jest operatywna, czy odtwórcza?
2. Jakie trudności towarzyszą studentom przy poznawaniu tego działu i jakie są przyczyny tych trudności?

Uzyskanie choćby częściowych odpowiedzi na powyższe pytania badawcze może być pożyteczne przy przygotowywaniu i prowadzeniu zajęć z tego przedmiotu. Zdobyte informacje przydadzą się zapewne w doborze odpowiednich zadań ułatwiających studentom poznawanie teorii miary.

Aby znaleźć choćby częściową odpowiedź na te pytania, został skonstruowany test jednokrotnego wyboru złożony z 20 zadań (zob. aneks). Pytania testowe dotyczyły trzech zagadnień:

a) teoria miary, w tym miary Lebesgue'a (zad. 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16),
b) funkcje mierzalne (zad. 3, 4, 13, 17, 20),
c) różnego typu całki i ich zastosowania (zad. 11, 12, 14, 18, 19).

W roku 2006 w badaniach uczestniczyło 99 studentów III roku matematyki studiów dziennych. Analiza ich odpowiedzi pozwoliła wyłonić zestaw pytań testu, z którymi badani studenci mieli trudności. W następnych dwóch latach prowadzono ze studentami rozmowy indywidualne nad tymi pytaniami, obserwując, na czym polegały trudności ze wskazaniem poprawnej odpowiedzi. Uzyskane w ten sposób informacje starałem się wykorzystać w prowadzonym przez siebie wykładzie w roku akademickim 2008/2009 na studiach dziennych i zaocznych. W roku 2009 ponownie poddałem badaniem testowym grupę 19 studentów studiów zaocznych oraz przeprowadziłem rozmowy indywidualne z 60 studentami obu rodzajów studiów na temat wybranych zadań z testu. Uzyskane na tej drodze wyniki zostały opisane w części trzeciej tej pracy.

3. Analiza uzyskanych wyników

W tym paragrafie omówimy wyniki ilościowe i jakościowe przeprowadzonych badań. Dane ilościowe zostały opracowane procentowo dla obu grup studentów (z roku 2006 i 2009). Analiza jakościowa powstała na podstawie dyskusji błędnych odpowiedzi z testów oraz w oparciu o wyniki rozmów indywidualnych ze studentami oraz obserwacji ich pracy w czasie ćwiczeń.

3.1. Zadania związane z pojęciem miary

Test zawierał 10 pytań dotyczących najważniejszych treści wykładu teorii miary. Poruszały one następujące zagadnienia:

a) ciała i σ-ciała zbiorów i przykłady miar (zad. 1, 9),

b) własności miary i miary zewnętrznej (zad. 2, 5, 15),

c) twierdzenie Carathéodory'ego (zad. 6, 7, 8),

d) związki między miarą Jordana i Lebesgue'a (zad. 10, 16).

Zadanie 1 miało na celu zbadanie, czy studenci rozróżniają pojęcia ciała oraz σ-ciała zbiorów. Pojęcia te są fundamentalne dla całej teorii, gdyż na σ-ciele podzbiorów dowolnej przestrzeni określana jest miara. Nie zapytano jednak wprost o definicję, ale posłużono się rodziną zbiorów otwartych lub domkniętych, o której wiadomo, że nie jest rodziną addytywną, a więc nie może być ciałem, a zatem i σ-ciałem. Może się jednak zdarzyć, że dziedziną miary jest rodzina wszystkich podzbiorów przestrzeni E. Przykład takiej miary znajduje się w zadaniu 9.

Procentowy rozkład odpowiedzi uzyskanych w zadaniach 1 i 9 przedstawia tabela 1.

Odpowiedzią poprawną w zadaniu 1 jest odpowiedź b), wskazana przez większość uczestników badań. Niepokoi jednak fakt, że znalazła się grupa studentów

(27,3% w 2006 r. i 15,8% w 2009 r.), która nie dostrzegła, że suma np. przedziału otwartego i domkniętego nie musi być ani zbiorem otwartym, ani domkniętym. Takim zbiorem jest np. $[0,1] \cup (2,3)$.

Tabela 1. Odpowiedzi w zadaniach 1 i 9.

Numer zadania	Rodzaj odpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
1	a)	9,1	0
1	b)	60,0	84,2
1	c)	3,0	0
1	d)	27,3	15,8
9	a)	7,1	5,3
9	b)	9,1	15,8
9	c)	82,7	78,8
9	d)	1.0	0

W tym miejscu należy zauważyć, że zagadnienia teoriomnogościowe sprawiały studentom poważne trudności i niewiele pomagało im użycie schematu Venna. Studenci na ogół wiedzieli, że suma, iloczyn i różnica zbiorów z σ-ciała do niego należy, ale w większości nie potrafili wyrazić iloczynu i różnicy zbiorów za pomocą sumy i dopełnienia odpowiednich zbiorów. Oznacza to, że wiedza w tym zakresie była jedynie wyuczona na pamięć, bez głębszej refleksji nad tymi faktami.

Odpowiedzią poprawną w zadaniu 9 jest odpowiedź c), która w obu grupach uzyskała nalepszy procentowy wynik. Fakt, że około 30% studentów udzielio błędnych odpowiedzi sygnalizuje trudności w rozumieniu pojęć miara zupełna i miara unormowana.

Zadania 2, 5, 15 dotyczyły różnych własności miary i miary zewnętrznej. Celem pytań 2 i 15 było zbadanie, czy studenci znają definicje tych funkcji, dostrzegają, że są one określone na ogół na różnych dziedzinach. Ponadto miara zewnętrzna, jako funkcja przeliczalnie podaddytywna, spełnia pewną nierówność, zaś miara, jako funkcja przeliczalnie addytywna, spełnia stowarzyszone z tą nierównością odpowiednie równanie.

W zadaniu 5 studenci mieli wskazać stosowne własności miary Lebesgue'a, która należy do najważniejszych przykładów miar poznawanych przez studentów.

Otrzymane odpowiedzi na te pytania prezentuje tabela 2.

Z danych w tej tabeli wynika, że najtrudniejszym zadaniem dla studentów było zadanie 2, którego poprawną odpowiedzią jest d). Wybór odpowiedzi c) przez dużą grupę studentów w 2006 r. jak również 2009 r. może świadczyć o niezrozumieniu zakresu pojęć: przeliczalna i skończona addytywność. Autorowi testu wydawało się, że właśnie ta odpowiedź, jak również odpowiedź b), zostanie odrzucona przez wszystkich studentów. Tak jak stało się tylko z odpowiedzią b) w badaniach z 2009 roku. Wybór odpowiedzi a) w obu badaniach może świadczyć o powierzchownym czytaniu tekstu matematycznego. Odpowiadający w ten sposób zapominali, że pytanie dotyczyło miary zewnętrznej, a nie miary Lebesgue'a. Odnotujmy również i to, że w zadaniu tym nie jest istotne, że rozważana miara zewnętrzna jest miarą zewnętrzną Lebesgue'a.

Tabela 2. Odpowiedzi w zadaniach 2, 5 i 15.

Numer zadania	Rodzaj odpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
2	a)	19,2	26,3
2	b)	12,1	0
2	c)	43,4	26,3
2	d)	25,3	47,4
5	a)	8,1	10,5
5	b)	64,6	80,0
5	c)	17,2	4,2
5	d)	10,1	5,3
15	a)	0	0
15	b)	0	0
15	c)	100	100
15	d)	0	0

Poprawną odpowiedzią w zadaniu 5 jest odpowiedź b), która została wybrana przez zdecydowanie największą grupę studentów w obu badaniach. Okazuje się jednak, że istnieją tacy studenci (8,1% w 2006 r. i 10,5% w 2009 r.), którzy albo nie wiedzieli, w jakiej przestrzeni określona jest miara Lebesgue'a, albo nie rozumieli, co oznacza fakt, że miara jest unormowana. Oba te fakty potwierdziły rozmowy ze studentami. Wybór odpowiedzi d) jako zdanie prawdziwe również jest niejakim zaskoczeniem. Studenci, z którymi rozmawiano, nie mieli wątpliwości, że punkt jest zbiorem miary zero, ale zapewne zapominali, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a miara Lebesgue'a przeliczalnie addytywna.

Najłatwiejszym w tym teście okazało się zadanie 15. Uzyskało ono najlepszą zgodność udzielonych odpowiedzi w obu badaniach.

Tabela 3. Odpowiedzi w zadaniach 6, 7 i 8.

Numer zadania	Rodzaj dpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
6	a)	2,0	0
6	b)	94,0	94,6
6	c)	4,0	5,4
6	d)	0	0
7	a)	89,9	78,9
7	b)	4,0	5,3
7	c)	6,1	10,5
7	d)	0	5,3
8	a)	41,4	10,5
8	b)	43,4	73,7
8	c)	3,0	5,3
8	d)	12,2	19,5

Podstawowym twierdzeniem w rozważanej teorii jest twierdzenie Carathéodory'ego. Przy jego pomocy z miary zewnętrznej buduje się miarę przez zawężenie dziedziny z rodziny wszystkich podzbiorów przestrzeni X do σ-ciała S podzbiorów tej przestrzeni spełniajacych warunek Carathéodory'ego. Dla każdego zbioru A należącego do S miara tego zbioru jest wtedy równa jego mierze zewnętrznej.

Zagadnieniom tym były poświęcone trzy zadania (zad. 6, 7, 8). Otrzymane wyniki przedstawia tabela 3.

Zadanie 6 sprawdzało ten fragment omawianego twierdzenia, który podawał sposób tworzenia miary z miary zewnętrznej. Warto tu odnotować zadziwiającą zgodność otrzymanych wyników w dwu różnych grupach studentów. Oznacza ona, że respondenci przyswoili sobie to twierdzenie w sposób zadowalający. Z drugiej jednak strony należy zauważyć, że ci sami studenci bardzo często, mimo poprawnego zacytowania twierdzenia, nie potrafili poprawnie odpowiedzieć na następujące pytanie: *Wiadomo, że zbiór Z ma pewną miarę zewnętrzną i spełnia warunek Carathéodory'ego. Jest więc zbiorem mierzalnym. Ile wynosi jego miara?* Fakt ten wydaje się znowu przemawiać za przyswajaniem wiedzy przez tych studentów bez zrozumienia. Nieliczne błędne odpowiedzi a), c) na to pytanie świadczą o tym, że niektórzy studenci mylą pojęcia miara zupełna i miara unormowana.

Zadanie 7 dotyczyło postaci warunku Carathéodory'ego. Zdecydowana większość studentów (89,9% w roku 2006 i 78,9% w 2009) znała poprawną odpowiedź. Wszyscy badani wiedzieli, że w warunku tym występuje duży kwantyfikator na zbiory weryfikujące jego spełnianie. Nieliczne błędy dotyczyły działań algebraicznych lub mnogościowych, występujących w tym wzorze.

Najwięcej trudności sprawiło studentom zadanie 8, którego poprawną odpowiedzią jest zdanie b). Osoby, które uznały za poprawne zdanie a), zapomniały, że miara nie musi być określona w rodzinie wszystkich podzbiorów przestrzeni. Również nie jest prawdziwa odpowiedź c), bo np. dla miary Lebesgue'a poza zbiorami miary zewnętrznej zero mierzalne są przedziały, które na ogół nie są zbiorami miary zero. Oczywiście nieprawdziwe jest także zdanie d).

Dydaktycznie ważne jest rozstrzygnięcie problemu wzajemnego związku między pojęciem miary Jordana i miary Lebesgue'a. Miara Jordana nie jest wprawdzie miarą w sensie ogólnych definicji miary, bo nie jest funkcją przeliczalnie addytywną. Ma jednak olbrzymie znaczenie, gdyż posługujemy się nią zarówno w szkole, jak i w życiu codziennym (Major, Powązka, 2008; Powązka, 2009a). Tego zagadnienia dotyczą dwa pytania testowe (zad. 10, 16). Otrzymane odpowiedzi prezentuje tabela 4.

Tabela 4. Odpowiedzi w zadaniach 10 i 16.

Numer zadania	Rodzaj odpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
10	a)	69,7	73,7
10	b)	10,1	10,5
10	c)	6,1	0
10	d)	15,8	15,8
16	a)	4,0	0
16	b)	33,3	10,5
16	c)	5,1	5,3
16	d)	57,6	84,2

Celem zadania 10 było zbadanie, czy studenci znają i właściwie rozumieją twierdzenie, że każdy zbiór mierzalny w sensie Jordana jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i obie miary są równe. Okazało się, że w obu grupach nie był to fakt oczywisty, gdyż znało go jedynie 69,7% w roku 2006 oraz 73,7% w roku 2009. I tym razem zbieżność wyników w obu grupach jest widoczna. Ponad 25% uczestników badań w każdej grupie udzieliło błędnej odpowiedzi, co może świadczyć o tym, że nie znają oni rozwiązania tego problemu.

W zadaniu 16 postanowiliśmy zbadać, czy studenci potrafią posługiwać się niebanalnymi przykładami zbiorów mierzalnych. Wybrany został zbiór Cantora, który omawia się nie tylko na zajęciach z analizy matematycznej, ale również na topologii. Okazało się jednak, że konstrukcja tego zbioru, choć rekurencyjna, sprawia studentom pewne trudności. Są one związane z wyobrażeniem sobie, jak wyglądają kolejne atraktory tego fraktala, o czym może świadczyć 33,3% błędnych odpowiedzi w roku 2006 (odpowiedź b)).

Z rozmów przeprowadzonych ze studentami wynika, że uważają oni ten zbiór za przykład zbioru niemierzalnego w sensie Jordana i mierzalnego w sensie Lebesgue'a. Tymczasem jest to zbiór miary Jordana zero. Taką odpowiedź udzieliło 57,6% studentów w 2006 roku oraz 84,2% w roku 2009.

3.2. Zadania dotyczące funkcji mierzalnych

Funkcje mierzalne to ważna klasa funkcji o wartościach rzeczywistych, które mogą być całkowalne względem miary. Szereg własności tych funkcji nie zależy od tego, z jakich elementów zbudowana jest przestrzeń X i jak określona jest miara w tej przestrzeni. Istotnym jest wtedy jakie zbiory należą do σ-ciała S.

Tabela 5. Odpowiedzi w zadaniach 3, 4, 13, 17 i 16.

Numer zadania	Rodzaj odpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
3	a)	3,0	0
3	b)	94,0	94,7
3	c)	1,0	0
3	d)	2,0	5,3
4	a)	26,2	5,3
4	b)	10,1	10,5
4	c)	27,3	52,6
4	d)	36,4	31,6
13	a)	0	0
13	b)	3,0	0
13	c)	1,0	0
13	d)	94,0	100
17	a)	76,8	15,8
17	b)	8,1	42,1
17	c)	5,0	5,3
17	d)	10,1	36,8
20	a)	29,3	5,3
20	b)	14,1	68,4
20	c)	32,3	10,5
20	d)	24,2	15,8

W wykładzie analizy matematycznej omawia się również funkcje mierzalne względem miary Lebesgue'a. Funkcje takie mają dodatkowe własności. Dla przykładu w tym modelu rozważa się związek między ciągłością i mierzalnością funkcji.

W omawianym teście było 5 zadań poświęconych tylko własnościom funkcji mierzalnych (zad. 3, 4, 13, 17, 20). Zadania dotyczące związku między mierzalnością i całkowalnością względem miary Lebesgue'a zostaną omówione w następnym paragrafie.

Zadanie 3 dotyczy związku między mierzalnością funkcji a mierzalnością wartości bezwzględnej tej funkcji. Z teorii miary wiadomo, że z mierzalności funkcji f wynika mierzalność funkcji $|f|$ (Kołodziej, 1978, s. 293). Natomiast z mierzalności wartości bezwględnej funkcji f nie wynika mierzalność funkcji f. W pracy (Powązka, 2009b) znajduje się przykład ilustrujący niepoprawność odpowiedzi a). Również niepoprawne są odpowiedzi c) i d). Poprawną odpowiedzią jest odpowiedź b), którą w obu grupach badanych zgodnie wybrało nieco ponad 94% respondentów. Odnotujmy tu fakt, że rozkład odpowiedzi w obu grupach jest prawie identyczny (tabela 5).

Celem zadania 4 było zbadanie, czy studenci znają własności mierzalności, całkowalności względem miary i sumowalności funkcji oraz jej wartości bezwzględnej. Przez sumowalność rozumie się tu fakt, że całki z części nieujemnej i niedodatniej funkcji są skończone (Łojasiewicz, 1973, s. 138). Poprawną odpowiedzią w tym zadaniu jest odpowiedź d). Wybrało ją 36,4% ankietowanych w 2006 r oraz 31,6% w roku 2009. Zastanawia duża liczba błędnych odpowiedzi w obu grupach. Rozwiązanie zadania wymagało wskazania zdania fałszywego. Nie jest wykluczone, że spora grupa badanych nie zwróciła na ten szczegół uwagi. Również i tu zastanawia bardzo podobny rozkład uzyskanych odpowiedzi w obu grupach badanych.

Kolejnym zadaniem pytającym o ważny fakt z teorii miary i całki, którym jest twierdzenie o istnieniu niemalejącego ciągu funkcji prostych, zbieżnego do dowolnej funkcji mierzalnej nieujemnej, jest zadanie 13. I tym razem zachodzi zgodność poprawnych odpowiedzi w obu grupach badanych. Należy jednak odnotować, że żadna z osób uczestniczących w badaniach, zapytana o ideę tej konstrukcji, nie potrafiła opowiedzieć, na czym ona polega. Jest to więc kolejny argument za tezą, że studenci uczą się na pamięć i nie są zainteresowani szczegółami dowodu.

W zadaniu 17 należało wskazać zdanie fałszywe. Podano tu trzy twierdzenia, których dowody były prezentowane studentom na wykładzie i jak dowiodły tego rozmowy indywidualne, były znane sporej grupie uczestniczących w badaniach. Nie dziwi więc duża liczba poprawnych odpowiedzi. Mimo tego ponad 20% osób udzieliło błędnych odpowiedzi. Być może zaznaczali oni odpowiedzi losowo. Za losowością wybierania może przemawiać fakt, że na pytanie o mierzalność wartości bezwzględnej funkcji mierzalnej w zadaniu 3b) negatywnie odpowiedziało 6% studentów w 2006 roku, a w zadaniu 17d) aż 10,1% badanych.

Odnotujmy również i to, że analizowane zadanie należy do nielicznej grupy zadań, w których pojawiły się duże rozbieżności między odpowiedziami udzielonymi przez badanych z obu grup.

Zadanie 20 było związane z twierdzeniem o złożeniu funkcji ciągłej i mierzalnej. Okazało się, że twierdzenie to przyswoiła sobie niewielka grupa studentów i jak pokazują wyniki w tabeli 5, pojawiły się duże rozbieżności między grupami badanych.

3.3. Zadania dotyczące całki względem miary

Wybranym zagadnieniom rachunku całkowego w omawianym teście poświęconych było pięć zadań (zad. 11, 12, 14, 18, 19).

Trzy pierwsze dotyczyły pojęcia całki względem miary Lebesgue'a (zad. 11), związkom między pojęciami mierzalności i całkowalności funkcji (zad. 12) oraz relacjom między zbiorami funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a i funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a (zad. 14).

Dwa ostatnie zadania dotyczyły całki krzywoliniowej skierowanej i nie będą tu omawiane. Trudności studentów związane z tymi całkami zostały opisane w pracach Z. Powązki i L. Zaręby (2007) i Powązki (2009a).

Uzyskane odpowiedzi prezentuje tabela 6.

Tabela 6. Odpowiedzi w zadaniach 11, 12, i 14.

Numer zadania	Rodzaj odpowiedzi	Odpowiedzi w roku 2006	Odpowiedzi w roku 2009
11	a)	5,1	0
11	b)	71,7	79,0
11	c)	19,2	21,0
11	d)	4,0	0
12	a)	4,0	0
12	b)	94,0	100
12	c)	2,0	0
12	d)	0	0
14	a)	100	100
14	b)	0	0
14	c)	0	0
14	d)	0	0

Jak widać z danych w tej tabeli studenci w zadaniu 11 wskazali w większości odpowiedź poprawną. Jest nią odpowiedź b). Jednak uzyskany rozkład wyników wskazuje na fakt, że około 20% ankietowanych nie umiało poradzić sobie z tym zadaniem. Trudności te ujawniły również rozmowy indywidualne ze studentami. Funkcja rozważana w tym zadaniu nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ponieważ zbiór jej punktów nieciągłości jest przedziałem $[-2,5]$, a więc ma miarę Lebesgue'a 7, czyli różną od 0. Stwierdzenie to wymagało znajomości warunku koniecznego i wystarczającego całkowalności funkcji w sensie Riemanna.

Aby zbadać całkowalność funkcji D w sensie Lebesgue'a, należy zbadać jej mierzalność. Najłatwiej można to zrobić na podstawie definicji funkcji mierzalnej, tzn. badając mierzalność przeciwobrazów przedziałów przez funkcję D. Stąd wynika natychmiast jej całkowalność w sensie Lebesgue'a, gdyż jest to funkcja prosta. Okazało się, że mimo znajomości formalnych definicji, operatywne posługiwanie się tymi pojęciami nawet w tak prostym modelu jest dla niektórych studentów trudne. Odnotujmy w tym miejscu, że na pytanie badającego to zjawisko o jego przyczynę, ankietowani odpowiadali zgodnie: *to jest bardzo trudne*.

Rozwiązanie zadania 12 wymagało wskazania omawianego na zajęciach twierdzenia. Tego typu zadania nie sprawiały na ogół studentom większych trudności. Nie bez powodu zadanie to pojawiło się bezpośrednio po zadaniu, w którym był przykład funkcji całkowalnej w sensie Lebesgue'a i niecałkowalnej w sensie Riemanna. Zastanawiająca jest duża różnica poprawnych odpowiedzi w grupie studentów studiów dziennych w zadaniach 11 i 12. Może być ona spowodowana tym, że studenci nie znali ważnych kontrprzykładów.

W zadaniu 14 należało ustalić zależności między zbiorami: M-funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a, R-funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, L-funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Zadanie to ma więc ścisły związek z dwoma poprzednimi. Wielkim zaskoczeniem okazał się fakt, że właśnie to zadanie uzyskało w obu badanych grupach maksymalny wynik (100% poprawnych odpowiedzi). Fakt ten rzuca światło na sposób uczenia się studentów. Stosowne twierdzenie było podawane na zajęciach i kilkakrotnie do niego się odwoływano. Badani studenci mogli zapamiętać je na zasadzie rejestracji faktów. Byli jednak tacy, którzy nie potrafili posługiwać się tymi pojęciami, o czym świadczą błędne odpowiedzi w zadaniach 11 i 12.

Jest to kolejny przykład na to, że na każdym poziomie edukacji uczący się ujawniają trudności w pojęciowym rozwiązywaniu zadań i problemów z różnych działów matematyki (por. np. Turnau, 1990; Major, Powązka, 2006; Major, Powązka, 2009).

4. Wnioski wynikające z badań i hipotezy badawcze

Podsumujmy wyniki naszych badań. Odpowiadając na pierwsze pytanie badawcze można stwierdzić, że wiedza studentów studiujących ten dział w naszej uczelni w większości przypadków nie zależała od tego, czy studiowali go w systemie dziennym czy zaocznym. Świadczą o tym wyniki ilościowe zamieszczone w tabelach (tabele 1-6).

Należy jednak odnotować, że w czasie zajęć audytoryjnych, jak również podczas rozmów indywidualnych niektórzy studenci studiów dziennych prezentowali bogatszą bazę pojęciową i lepsze oczytanie w literaturze przedmiotu niż studenci studiów zaocznych. Wiedza zdecydowanej większości studentów obu form studiów była przeważnie odtwórcza. Potrafili sformułować podstawowe definicje, takie jak np. definicja σ-ciała, miary zewnętrznej, miary, funkcji mierzalnej oraz sformułować najważniejsze twierdzenia teorii (np. własności miary i miary zewnętrznej, twierdzenie Carathéodory'ego, warunki równoważne definicji funkcji mierzalnej, niektóre własności całki względem miary). Ale, jak pokazują wyniki testu (np. zad. 1, 11, 12, 14) oraz rozmowy indywidualne, posługiwanie się w miarę biegle tymi pojęciami pozostawiało wiele do życzenia. Badania wskazały także na te fragmenty teorii, z którymi studenci mieli szczególne trudności. Należą do nich przede wszystkim:

a) zagadnienia, które wymagały posługiwania się pojęciami teoriomnogościowymi i topologicznymi przy dowodzeniu różnych własności miary i całki,

b) stosowanie wyuczonych definicji i twierdzeń do rozwiązywania konkretnych problemów, takich jak np. badanie czy dana funkcja jest mierzalna lub całkowalna według danej miary,

c) poprawne posługiwanie się przy dowodzeniu własności całek względem miary trójetapową definicją całki z funkcji mierzalnej (funkcje proste, funkcje mierzalne nieujemne, funkcje mierzalne, przyjmujące dowolne wartości rzeczywiste),

d) pojęcie procesu całkowego przy różnych definicjach całek, a zwłaszcza odróżnianie normalnego ciągu podziałów od pojedynczego, n-tego podziału oraz ciągu sum aproksymacyjnych od n-tej sumy aproksymacyjnej.

W poszukiwaniu przyczyn takiego stanu rzeczy należy zwrócić uwagę z drugiej strony na abstrakcyjność tego działu, wymagającą większej liczby godzin na zrozumienie materiału oraz na słabą motywację studentów. Spora grupa badanych stwierdzała, że ten materiał jest trudny i nie przekłada się bezpośrednio na pracę w szkole. Stwierdzenia takie mogą świadczyć o tym, że ich kontakt z mierzeniem w szkole podstawowej, gimnazjum lub szkole średniej sprowadzał się jedynie do formalnego stosowania znanych wzorów w nieskomplikowanych sytuacjach. Doświadczenie zdobyte w taki sposób nie inspiruje do poszukiwania bardziej subtelnych narzędzi. Przed takim nauczaniem tego działu matematyki przestrzega H. Siwek w swej książce (2005, s. 63-66).

Literatura

Chronowski, A., Powązka, Z.: 2012, Przykłady zagadnień z różnych działów matematyki niezbędnych do studiowania teorii miary, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 31-59.

Gunčaga, J.: 2009, Regulated functions and integrability, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica* **8**, 43-56.

Kołodziej, W.: 1978, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Pewne problemy dydaktyczne związane z pojęciem wartości bezwzględnej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Major, J., Powązka, Z.: 2008, Utváranie pojmu obsah rovinného útvaru na rôznych stupňoch vzdelávania, *Acta Mathematica* **11**, 135-140.

Major, J., Powązka, Z.: 2009, From research on student difficulties in using the properties of functions while solving equations and inequalities, w: M. Billich (red.), *Mathematica III*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, 69-76.

Łojasiewicz, S.: 1973, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa.

Powązka, Z.: 2009a, From research on developing concept of different types of integrals in students of peagoical studies, w: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (red.), *Teaching Mathematics. Innovation, new trends*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, 217-227.

Powązka, Z.: 2009b, Uwagi o kształtowaniu rozumienia pojęcia miary na różnych poziomach edukacji, *Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, Współczesne problemy nauczania matematyki* **2**, 141-149.

Powązka, Z., Zaręba, L.: 2007, Teachers studies students difficulties concerning the generalization of the concept of the Riemann integral, w: J. Povstenko (red.), *Scientific Issues J. Długosz University of Częstochowa. Mathematics XII*, Częstochowa, 347-354.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl

Aneks

Test jednokrotnego wyboru z teorii miary i całki dla III roku matematyki

1. Niech S oznacza rodzinę podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, które są otwarte lub domknięte. Wskazać zdanie prawdziwe.

a) S jest σ-ciałem zbiorów.
b) S nie jest ciałem, bo nie jest rodziną addytywną.
c) S nie jest ciałem, bo dopełnienie zbiorów należących do S nie musi należeć do S.
d) S jest ciałem zbiorów, ale nie jest σ-ciałem.

2. Którą z własności ma miara zewnętrzna Lebesgue'a?

a) Jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru.
b) Jest skończenie addytywną, ale nie jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru.
c) Jest przeliczalnie addytywną, ale nie jest skończenie addytywną funkcją zbioru.
d) Jest przeliczalnie podaddytywną funkcją zbioru.

3. Niech X będzie przestrzenią, S σ-ciałem, $A \in S$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$ daną funkcją. Wskazać twierdzenie prawdziwe.

a) Jeżeli $|f|$ jest funkcją mierzalną, to f jest funkcją mierzalną, ale nie na odwrót.
b) Jeżeli f jest funkcją mierzalną, to $|f|$ jest funkcją mierzalną, ale nie na odwrót.
c) Funkcja $|f|$ jest funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest mierzalna.
d) Jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej zbiór $\{x \in A : f(x) = a\} \in S$, to funkcja f jest mierzalna.

4. Niech X będzie przestrzenią, S σ-ciałem, $A \in S$ oraz $\mu : S \to \mathbb{R}$ miarą, a $f : A \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją. Wskazać twierdzenie fałszywe.

a) Jeżeli funkcja f jest prosta, to jest mierzalna.
b) Każda funkcja mierzalna nieujemna jest całkowalna względem miary μ.
c) Funkcja f jest sumowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $|f|$ jest sumowalna.
d) Każda funkcja mierzalna jest całkowalna.

5. Wskazać twierdzenie prawdziwe.

a) Miara Lebesgue'a jest unormowana.
b) Miara Lebesgue'a jest zupełna.

c) Miara Lebesgue'a zbioru liczb rzeczywistych jest skończona.
d) Zbiór liczb wymiernych nie jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a.

6. Niech X oznacza przestrzeń, $\mu^* : 2^X \to \mathbb{R}$ miarę zewnętrzną, M rodzinę zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego. Wtedy:

a) Funkcja $\mu = \mu^*|_M$ jest miarą, ale nie jest zupełną.
b) Funkcja $\mu = \mu^*|_M$ jest miarą zupełną.
c) Funkcja $\mu = \mu^*|_M$ jest miarą zupełną i unormowaną.
d) Funkcja $\mu = \mu^*|_M$ jest miarą unormowaną i nie jest zupełna.

7. Niech X oznacza przestrzeń i $\mu^* : 2^X \to \mathbb{R}$ jest miarą zewnętrzną. Który z podanych warunków oznacza, że zbiór Z spełnia warunek Caratheodory'ego?

a) $\forall_{A\subset X} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(A \setminus Z)$.
b) $\forall_{A\subset X} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap Z) - \mu^*(A \setminus Z)$.
c) $\forall_{A\subset X} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A)$.
d) $\exists_{A\subset X} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(A \setminus Z)$.

8. Niech X będzie dowolną przestrzenią, a 2^X rodziną wszystkich podzbiorów tej przestrzeni. Wskazać zdanie prawdziwe.

a) Każda miara jest miarą zewnętrzną.
b) Miara zewnętrzna jest miarą w X, gdy każdy zbiór przestrzeni X spełnia warunek Caratheodory'ego.
c) Zbiorami mierzalnymi są jedynie zbiory miary zewnętrznej zero.
d) Żadne z powyższych zdań nie jest prawdziwe.

9. W przestrzeni X wyróżniamy punkt x_0 oraz definiujemy funkcję μ wzorem:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, \ x_0 \in X \setminus A, \\ 1, \ x_0 \in A. \end{cases}$$

a) Funkcja μ jest miarą zewnętrzną, ale nie jest miarą.
b) Funkcja μ jest miarą zupełną, ale nie jest miarą unormowaną.
c) Funkcja μ jest miarą zupełną i unormowaną.
d) W przestrzeni X istnieją zbiory niemierzalne według tej miary.

10. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozważmy rodzinę J zbiorów mierzalnych według Jordana i rodzinę L zbiorów mierzalnych według Lebesgue'a. Wskazać zdanie prawdziwe.

a) Każdy zbiór należący do J należy do L.
b) Każdy zbiór należący do L należy do J.
c) Istnieje zbiór, który należy do J i nie należy do L.

d) Istnieje zbiór, który należy do J i do L i ma różne miary.

11. Rozważmy funkcję określoną wzorem:

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \cap [-2,5], \\ 0, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2,5]. \end{cases}$$

a) Funkcja D jest całkowalna w sensie Riemannna.
b) Funkcja D jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.
c) Funkcja D jest całkowalna w sensie Riemannna i Lebesgue'a.
d) Istnieją obie całki, ale całka Lebesgue'a jest różna od całki Riemanna z funkcji D.

12. Wskazać zdanie prawdziwe.

a) Każda funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a jest całkowalna w sensie Riemanna i obie całki są równe.
b) Każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest całkowalna w sensie Lebesgue'a i obie całki są równe.
c) Każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, ale całki mogą być różne.
d) Nie ma żadnego związku między całkowalnością funkcji w sensie Riemanna i Lebesgue'a.

13. Twierdzenie o istnieniu niemalejącego ciągu funkcji prostych zbieżnego do danej funkcji dotyczy:

a) dowolnej funkcji rzeczywistej,
b) wszystkich funkcji mierzalnych,
c) tylko funkcji ograniczonych,
d) funkcji mierzalnych i nieujemnych.

14. Oznaczmy przez R – rodzinę funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, L – rodzinę funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a oraz M – rodzinę funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Który z poniższych związków jest prawdziwy?

a) $R \subset L \subset M$.
b) $M \subset R$.
c) $L \subset R \subset M$.
d) $L = R \cup M$.

15. Wskazać zdanie określające własności miary.

a) Jest to funkcja nieujemna, skończenie addytywna i skończenie multiplikatywna.
b) Jest to funkcja nieujemna, monotoniczna i skończenie multiplikatywna.

c) Jest to funkcja nieujemna, przeliczalnie addytywna, określona na pewnym σ- ciele.
d) Jest to dowolna nieujemna funkcja rzeczywista.

16. Niech C oznacza zbiór Cantora.

a) Jest to przykład zbioru niemierzalnego w sensie Jordana i Lebesgue'a.
b) Miara Jordana zbioru C wynosi 1.
c) Miara Lebesgue'a zbioru C wynosi 1.
d) Miara Jordana tego zbioru wynosi 0.

17. Wskazać zdanie fałszywe.

a) Złożenie funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.
b) Iloczyn funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.
c) Suma funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.
d) Moduł z funkcji mierzalnej jest funkcją mierzalną.

18. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$, gdzie φ, ψ są danymi funkcjami ciągłymi. Krzywa K jest brzegiem obszaru A i jest dodatnio skierowana. Wskazać zdanie fałszywe.

a) $|A| = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx$.
b) $|A| = \int\int_A dxdy$.
c) $|A| = \int\int_A (x + y)dxdy$.
d) $|A| = \int_K (ydx + 2xdy)$.

19. Niech $D \cap \mathbb{R}^2$ będzie obszarem jednospójnym i funkcje $P, Q : D \to \mathbb{R}$ są danymi funkcjami rzeczywistymi. Całka krzywoliniowa nie zależy od drogi całkowania wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) Funkcje P i Q są klasy C^1 w obszarze D.
b) Funkcje P i Q są ciągłe w obszarze D wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$.
c) W obszarze D zachodzi równość $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
d) Zachodzą warunki b) i d).

20. Wskazać twierdzenie prawdziwe.

a) Jeżeli f jest mierzalna, a g ciągła, to złożenie $f \circ g$ jest funkcją mierzalną.
b) Jeżeli funkcje f, g są mierzalne, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją mierzalną.
c) Jeśli funkcja f jest mierzalna, a g ciągła, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją mierzalną.
d) Żadne z twierdzeń nie jest prawdziwe.