FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Jan Górowski, Adam Łomnicki

Cechy równoboczności trójkątów*

Abstract. The paper presents some non-standard (in the sense: not yet presented in the literature), necessary and sufficient conditions for a triangle to be isosceles.

W pracy podamy kilkanaście cech równoboczności trójkątów, których nie spotkaliśmy w literaturze. Inspiracją do poszukiwań były nasze wcześniejsze artykuły (Górowski, Klakla, Łomnicki, 1997a; 1997b; 2004), dotyczące tzw. zadań „na wymuszanie” oraz pozycja (Kourliandtchik, 2006), w której między innymi podano szereg nierówności dla funkcji trygonometrycznych miar kątów trójkąta. Na początku wzmocnimy niektóre wyniki z (Kourliandtchik, 2006), by z nich następnie skorzystać w dalszej części pracy.

Lemat 1
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzą równości:

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{y+z}{2},$$

$$\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z) = 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}.$$

Dowód. Dla dowodu pierwszej z tych tożsamości wystarczy wykorzystać dla sumy

$$(\sin x + \sin y) - (\sin(x+y+z) - \sin z)$$

kolejno wzory na sumę sinusów, różnicę sinusów, a następnie wzór na różnicę cosinusów.

Dla uzasadnienia drugiej z tych tożsamości wystarczy do sumy

$$(\cos x + \cos y) + (\cos(x+y+z) + \cos z)$$

zastosować trzykrotnie wzór na sumę cosinusów.

*Some necessary and sufficient conditions for a triangle to be isosceles

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97G40

Key words and phrases: isosceles triangle, necessary and sufficient condition

Lemat 2
Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$,

(2) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dowód. Zauważmy, że co najmniej dwie spośród liczb α, β, γ należą do przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Przyjmijmy, że są to β i γ. Wtedy:

$$\mid \frac{\gamma-\beta}{2} \mid < \frac{\gamma+\beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \cos\frac{\gamma-\beta}{2} > \cos\frac{\gamma+\beta}{2} > 0$$

oraz

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\gamma-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\left(1 - \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}u(1-u),
\end{aligned}$$

gdzie $u = \cos\dfrac{\gamma+\beta}{2}$ i $u \in (0,1)$.

Oczywiście największą wartością funkcji kwadratowej $f(u) = \frac{1}{2}u(1-u)$ jest $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{8} = f(\frac{1}{2})$.

Wobec tego

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Ponadto

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}.$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \cos\frac{\gamma-\beta}{2} = 1,$$

a więc wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

To kończy dowód lematu 2.

Lemat 3
Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy:

(1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4}$,

(2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dowód. Korzystajac z lematu 1 dostajemy:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma
&= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma)\\
&= \frac{1}{2}[3-(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)]\\
&= \frac{1}{2}[3-(-\cos(2\alpha+2\beta+2\gamma) + 4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma))]\\
&= 2 + 2\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy jedna z liczb α, β, γ należy do przedziału $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, to $2 + 2\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha \leqslant 2$ i nierówność z tezy (1) jest wtedy oczywista.

Przyjmijmy zatem teraz, że $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha'}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta'}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma'}{2}$. Wtedy α', β', γ' są miarami kątów trójkąta oraz $2+2\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha = 2 + 2\sin\frac{\alpha'}{2}\cdot\sin\frac{\beta'}{2}\cdot\sin\frac{\gamma'}{2}$ i na mocy lematu 2 mamy $2 + 2\sin\frac{\alpha'}{2}\cdot\sin\frac{\beta'}{2}\cdot\sin\frac{\gamma'}{2} \leqslant \frac{9}{4}$ oraz $2 + 2\sin\frac{\alpha'}{2}\cdot\sin\frac{\beta'}{2}\cdot\sin\frac{\gamma'}{2} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$.

Ponieważ warunek $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$ jest równoważny warunkowi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, zatem dowód lematu 3 został zakończony.

Z lematu 3 wynika wprost

Lemat 4
Załóżmy, że α, β, γ są miarami kątów trójkąta. Wtedy:

(1) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$,

(2) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Udowodnimy teraz dwa twierdzenia, w których podamy sześć cech równoboczności trójkątów.

Twierdzenie 1
Jeżeli w trójkącie ABC boki długości a, b, c znajdują się naprzeciw kątów o miarach odpowiednio α, β, γ oraz $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, a R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to następujące warunki są równoważne:

(1) $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = p$;

(2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;

(3) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}$;

(4) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dowód poprowadzimy według schematu (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (1).

Uzasadnimy najpierw implikację (1) $\Rightarrow$ (2).

Z (1) wynika kolejno:

$$\frac{a}{\sin\alpha}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{b}{\sin\beta}\sin\beta\cos\beta+\frac{c}{\sin\gamma}\sin\gamma\cos\gamma=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$R\sin 2\alpha+R\sin 2\beta+R\sin 2\gamma=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

z twierdzenia sinusów,

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

(2) $\Rightarrow$ (3)
Mamy kolejno:

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma,$$

$$\sin 2(\alpha+\beta+\gamma)+4\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)$$
$$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)+4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

na podstawie lematu 1,

$$8\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{1}{8},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) wynika bezpośrednio z lematu 2.

Implikacja (4) $\Rightarrow$ (1) jest oczywista.

Twierdzenie 2
Jeżeli α,β,γ są miarami kątów trójkąta ABC, to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$.

Dowód. Wykorzystując tożsamość z lematu 1 oraz fakt, że $0<\alpha+\beta<\pi$, $0<\alpha+\gamma<\pi$, $0<\beta+\gamma<\pi$ dostajemy kolejno:

$$\sin 4(\alpha+\beta+\gamma)+4\sin(2\alpha+2\beta)\sin(2\alpha+2\gamma)\sin(2\beta+2\gamma)$$
$$=-[\sin 2(\alpha+\beta+\gamma)+4\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)],$$

$$8\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma)$$
$$=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma),$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma) = -\frac{1}{8},$$
$$\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha = \frac{1}{8}.$$

Ostatni warunek, na mocy lematu 4, jest równoważny warunkowi $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. Dowód twierdzenia 2 został zakończony.

Z lematu 4 wynika także

Twierdzenie 3
Jeżeli α,β,γ są miarami kątów trójkąta ABC, to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{8}$.

Twierdzenie 4
Jeśli w trójkącie ABC boki długości a,b,c znajdują się naprzeciw kątów o miarach (odpowiednio) α,β,γ, a R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie oraz h_a,h_b,h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości (odpowiednio) a,b,c, to następujące warunki są równoważne:

(1) $2(h_a+h_b+h_c)=9R$,

(2) $2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\frac{9}{4})=(\sin\beta-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$,

(3) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{9}{4}$,

(4) $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2).

Oznaczając przez S pole trójkąta ABC mamy $2h_a=\frac{4S}{a}$, $2h_b=\frac{4S}{b}$, $2h_c=\frac{4S}{c}$ oraz $S=\frac{abc}{4R}$.
Stąd
$$9R=2(h_a+h_b+h_c)=\frac{bc}{R}+\frac{ac}{R}+\frac{ab}{R},$$
$$9R^2=bc+ac+ab,\quad -18R^2=-2bc-2ac-2ab,$$
$$-18R^2=(b-c)^2+(a-c)^2+(a-b)^2-2(a^2+b^2+c^2),$$
$$2(a^2+b^2+c^2)-18R^2=(b-c)^2+(a-c)^2+(a-b)^2.$$

Wykorzysując teraz twierdzenie sinusów otrzymujemy:
$$8R^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\frac{9}{4}\right)=4R^2((\sin\beta-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2),$$
czyli
$$2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\frac{9}{4}\right)=(\sin\beta-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\gamma)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Z lematu 3 wiemy, że

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \frac{9}{4} \leqslant 0.$$

Oczywiście

$$(\sin\beta - \sin\gamma)^2 + (\sin\alpha - \sin\gamma)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant 0.$$

Zatem

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{9}{4}.$$

Wykazaliśmy więc, że z (2) wynika (3).

Implikacja (3) $\Rightarrow$ (4) wynika wprost z lematu 3.

Implikacja (4) $\Rightarrow$ (1) jest oczywista.

Z twierdzenia 4 wynika bezpośrednio

Twierdzenie 5
Jeżeli α, β, γ są miarami kątów trójkąta ABC, to:
trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \frac{9}{4}$.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 6
Jeżeli α, β, γ są miarami kątów w trójkącie ABC, to trójkąt ABC jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma = \frac{3}{4}$.

Dowód. Uzasadnimy mniej oczywistą implikację „$\Leftarrow$".
Mamy:

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left[(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right] = \frac{3}{4}.$$

Wykorzystując teraz tożsamość z lematu 1, otrzymujemy

$$\left[\left(1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 - (3 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma)\right] = \frac{6}{4},$$

$$\left[\left(1 + 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (3 - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)\right] = \frac{6}{4}.$$

Wobec lematów 2 i 3 największą wartością wyrażenia

$$4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

a tym samym wyrażenia

$$\left(1+4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

jest $(1+4\cdot\frac{1}{8})^2$, czyli $\frac{9}{4}$, zaś najmniejszą wartością wyrażenia

$$3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$$

jest $3-\frac{9}{4}$, czyli $\frac{3}{4}$.
Co więcej, zarówno ta największa wartość, jak i ta najmniejsza, o których mówimy, są przyjmowane dla $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. Stąd

$$\left(1+4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2-(3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma))\leqslant\frac{6}{4}.$$

Wobec tego

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{3}{4},$$

a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Wykażemy teraz

TWIERDZENIE 7
Niech r, R będą (odpowiednio) długościami promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ABC. Wtedy:
trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow R=2r$.

Dowód. Uzasadnimy mniej oczywistą implikację „$\Leftarrow$".
Ponieważ

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

gdzie α,β,γ oznaczają miary kątów trójkąta ABC, to wobec przyjętego założenia mamy,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{8}.$$

Stąd z lematu 2 dostajemy $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Z porównania pola trójkąta obliczonego dwoma sposobami otrzymujemy

TWIERDZENIE 8
Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta ABC oraz r, R (odpowiednio) długościami promieni okręgów wpisanego i opisanego na nim, to:
trójkąt ABC jest równoboczny $\Leftrightarrow \frac{abc}{a+b+c}=R^2$ lub $\frac{abc}{a+b+c}=4r^2$.

Dowód. Wystarczy wykorzystać wzór

$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{lub} \quad S = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r,$$

gdzie S oznacza pole trójkąta ABC oraz twierdzenie 7.

Twierdzenie 9
Jeżeli α, β, γ są miarami kątów w trójkącie ABC, to następujace warunki są równoważne:

(1) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$,

(2) $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$,

(3) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$,

(4) $4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,

(5) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$,

(6) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,

(7) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{2}$,

(8) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2}$.

Dowód. To, że (1) $\Leftrightarrow$ (2) wynika wprost z twierdzenia 8 i twierdzenia sinusów zastosowanego przy warunku $\frac{abc}{a+b+c} = R^2$.
Wykorzystując tożsamość z lematu 1 dostajemy

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta+\gamma) + 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$

a stąd wnosimy, że (2) $\Leftrightarrow$ (3).
Wykorzystując tożsamość z lematu 1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \sin(2\alpha+2\beta+2\gamma) + 4\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\\ &= 4\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.\end{aligned}$$

Stąd

$$4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{8}.$$

Z lematu 4 wynika teraz wprost, że (4) $\Leftrightarrow$ (1).
Wykorzystując tożsamości z lematu 1 oraz lemat 2 uzyskujemy warunki równoważne:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}=\frac{1}{8},$$

$$\sin\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\beta'}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}=\frac{1}{8},$$

gdzie

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma',\quad \frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta',\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\alpha',\quad \gamma'=\beta'=\alpha'=\frac{\pi}{3},\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

Wobec tego (5) $\Leftrightarrow$ (1).
Z lematu 1 mamy

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)=4\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.$$

Stąd oraz z lematu 2 wnosimy, że warunek

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$$

jest równoważny kolejno warunkom

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{8},\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

Zatem (6) $\Leftrightarrow$ (1).
Wykorzystując tożsamość z lematu 1 oraz lematu 2 dostajemy kolejno:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{3}{2},$$

$$1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8},\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

Zatem (7) $\Leftrightarrow$ (1).
Korzystając ponownie z lematu 1, otrzymujemy kolejno:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{3}{2},$$

$$1+4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}=\frac{1}{8}.$$

Otrzymaliśmy warunek taki sam jak w dowodzie (5) $\Leftrightarrow$ (1). Wobec tego (8) $\Leftrightarrow$ (1).

Literatura

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997a, O pewnej charakterystyce trójkątów równoramiennych i równobocznych, *Gradient* **1**, 13-20.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 1997b, Trójkąt – niewyczerpane źródło problemów, *Matematyka* **6**, 357-360.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2004, Zadania „na wymuszanie" jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 61-80.

Kourliandtchik, L.: 2006, *Wędrówki po krainie nierówności*, Aksjomat, Toruń.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail jangorowski@interia.pl