FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka

Przykłady zagadnień z różnych działów matematyki niezbędnych do studiowania teorii miary*

Abstract. In the education of mathematicians, including teachers of mathematics, the measure theory plays an important role. From the experience in and research on teaching the measure theory it follows that one of the important reasons why students encounter difficulties in the subject is their insufficient ability to apply their knowledge of other branches of mathematics, especially of the set theory and topology.

In this article we propose a series of problem analyses and exercises aimed at preparing students to study the measure theory, especially to understand the proofs of theorems on properties of the measure, including the Lebesgue measure. Most of these problems and exercises are presented with solutions, outlines of solutions, hints, didactic remarks and comments.

In this paper we point out, in a practical way, the significance of active reading of mathematical texts and skilful use of mathematical literature. This article is dedicated to both students of mathematics and their academic teachers.

1. Wstęp

Teoria miary należy do podstawowych działów matematyki wyższej. Znajomość tej teorii jest ważnym elementem wykształcenia nauczyciela matematyki (Major, Powązka, 2008; Powązka, 2009; Gunčaga, Fulier, Eisenmann, 2008).

Do jej studiowania niezbędna jest wiedza zdobywana przez studentów podczas realizacji takich przedmiotów, jak np. teoria mnogości, topologia, analiza matematyczna. Wieloletnie obserwacje zajęć prowadzonych ze studentami studiów matematycznych ujawniają duże trudności studentów przy opanowaniu tego działu matematyki. Na niektóre z nich wskazano w pracy (Powązka, 2012). Jedną z ich przyczyn jest niewystarczająca umiejętność studentów w posługiwaniu się potrzebnymi faktami z innych działów matematyki. Dodatkowym powodem jest niewielka liczba zbiorów zadań z teorii miary prezentujących rozwiązania przykładowych zadań. Wynika stąd, że zaawansowana teoria matematyczna, nieobudowana

*Examples of problems from different branches of mathematics indispensable to the study of the measure theory

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 97B50; Secondary 28A12

Key words and phrases: measure, problems, exercises

potrzebnymi materiałami dydaktycznymi, stawia studentom wyzwania, którym w wielu przypadkach nie potrafią sprostać. Świadomi tych przyczyn, pragniemy w tym artykule wskazać przykłady zagadnień z teorii mnogości, topologii i analizy matematycznej, których znajomość, naszym zdaniem, może ułatwić zrozumienie podstaw teorii miary. Nie ograniczymy się wyłącznie do sformułowania stosownego zestawu tematów, ale podejmujemy próbę stworzenia listy zadań do samodzielnego rozwiązania przez studentów i przedyskutowania na ćwiczeniach poprzedzających wykład z teorii miary. Zadania te, naszym zdaniem, w istotny sposób przyczynią się do lepszego zrozumienia prezentowanych przez wykładowcę zagadnień w trakcie wykładu. Powszechnym ujęciem materiału z teorii miary jest schemat oparty na opracowaniach tych zagadnień w książkach: W. Kołodziej (2010) i R. Sikorski (1969). Poniższe zadania stanowią integralną część tych wykładów. Wcześniejsza znajomość faktów występujących w prezentowanych zadaniach pozwoli studentom koncentrować się na głównych zagadnieniach z teorii miary. Trudniejsze zadania są rozwiązane lub wyposażone w odpowiednie wskazówki. Przy okazji omawianych zadań przedstawiamy również pewne uwagi dydaktyczne związane z zagadnieniami merytorycznymi występującymi w tych zadaniach.

W uwagach i komentarzach, które są zamieszczone po wielu zadaniach, proponujemy studentom udzielenie odpowiedzi na postawione pytania, sformułowanie stosownych twierdzeń, wyszukanie w literaturze matematycznej odpowiednich definicji i twierdzeń wykorzystywanych w rozwiązaniach zadań. Wymienione propozycje dydaktyczne mają na celu kształtowanie aktywności matematycznych, które student powinien stosować podczas analizy tekstów rozwiązań zaproponowanych zadań.

Wiedząc, że przedstawione problemy w poniższych zadaniach są w sposób istotny potrzebne na wykładach z teorii miary, warto zastanowić się nad wcześniejszą realizacją niektórych z tych zagadnień w ramach ćwiczeń z wstępu do teorii mnogości i topologii.

Artykuł w swojej części zadaniowej, łącznie z pewnymi propozycjami i uwagami dydaktycznymi dotyczącymi zadań, jest napisany przede wszystkim jako pomoc dydaktyczna dla studentów w przygotowaniu się do realizacji tematyki miary Lebesgue'a. Dla nauczycieli akademickich prowadzących kurs analizy matematycznej artykuł ten może stanowić pewną propozycję dydaktyczną w przygotowaniu ćwiczeń w taki sposób, aby stanowiły one spójną całość z wykładem.

Najpierw przyjmujemy podstawowe oznaczenia zbiorów liczbowych, które będą stosowane w tym artykule:
$\mathcal{N}$ – zbiór liczb naturalnych (bez zera),
$\mathcal{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,
$\mathcal{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych.

2. Przykładowe zagadnienia z teorii zbiorów użyteczne przy studiowaniu teorii miary

Wykład z teorii miary rozpoczyna się od zdefiniowania ciała i σ-ciała S podzbiorów przestrzeni X. Następnie wprowadza się określenie miary i miary zewnętrznej. Udowadnia się wtedy różne własności tych pojęć, a w szczególności podstawowe dla tego fragmentu teorii twierdzenie Carathéodory'ego. Należy w tym celu posłużyć się różnymi własnościami działań mnogościowych na zbiorach oraz własnościami rodzin indeksowanych. W obecnym programie treści te pojawiają się na zajęciach z logiki i teorii mnogości.

Przed wykładami z teorii miary i miary zewnętrznej warto zaproponować studentom samodzielne rozwiązanie następujących trzech zadań, gdyż wymienione w tych zadaniach własności działań na zbiorach będą wykorzystane w trakcie wykładów.

Zadanie 2.1
Niech A i B będą dowolnymi podzbiorami zbioru X. Wówczas

$$X \setminus A = B \Longleftrightarrow X \setminus B = A. \tag{1}$$

Czy równoważność (1) *jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów X, A i B?*

Zadanie 2.2
Niech A i B będą dowolnymi podzbiorami zbioru X. Wykazać, że:
(a) $A \cap B = A \setminus (X \setminus B) = B \setminus (X \setminus A)$,
(b) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.
Czy równości (a) *oraz* (b) *są prawdziwe dla dowolnych zbiorów X, A i B?*

Zadanie 2.3
Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C:
(a) $A \setminus (A \setminus B) = B \Longleftrightarrow B \subseteq A$,
(b) $[A \cap (B \cup C)] \setminus C = A \cap B \Longleftrightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$,
(c) $(A \cap B \cap C) \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \setminus B) \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

Indeksowane rodziny zbiorów i działania mnogościowe na tych rodzinach są wprawdzie w treściach programowych kursu logiki i teorii mnogości, ale stopień trudności tych zagadnień dla początkujących studentów jest duży i dodatkowo mała liczba godzin przeznaczonych na ćwiczenia do tego kursu powoduje, że zagadnienia te są prezentowane raczej informacyjnie. Ponieważ w teorii miary indeksowane rodziny zbiorów i działania mnogościowe na tych rodzinach są bardzo ważne, więc proponujemy, aby studenci w ramach samodzielnej pracy przygotowali się w zakresie tej tematyki. Dla ułatwienia można udostępnić studentom poniższe materiały zawierające podstawowe definicje i własności działań na indeksowanych rodzinach zbiorów. Zagadnienia te można znaleźć również w książkach: A. Chronowski (2000; 2004).

Najpierw określimy indeksowaną rodzinę zbiorów.

Zakładamy, że T jest niepustym zbiorem i $\mathcal{X}$ jest niepustą rodziną zbiorów. Niech $F : T \longrightarrow \mathcal{X}$ będzie dowolną funkcją. Zamiast $X = F(t)$ będziemy również pisać X_t dla $t \in T$ i $X \in \mathcal{X}$. Oczywiście $X_t \in \mathcal{X}$ dla każdego $t \in T$. Funkcję F będziemy wówczas zapisywać w postaci $F = (X_t)_{t \in T}$. Funkcję $F = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy *indeksowaną rodziną zbiorów* X_t dla $t \in T$. Zbiór T nazywamy *zbiorem indeksów* rodziny $(X_t)_{t \in T}$. Mówiąc o indeksowanej rodzinie zbiorów $(X_t)_{t \in T}$, często nie będziemy wymieniać explicite zbioru $\mathcal{X}$, którego elementami są zbiory X_t dla $t \in T$. Jeżeli $T \subseteq \mathcal{N}$, to indeksowaną rodzinę zbiorów $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy *ciągiem zbiorów.* Ciąg $(X_t)_{t\in T}$ jest skończony lub nieskończony zależnie od tego, czy zbiór T jest skończony, czy nieskończony.

Definicja 2.1
Sumą indeksowanej rodziny zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy zbiór $\bigcup_{t\in T} X_t$ określony następująco:

$$x \in \bigcup_{t\in T} X_t \Longleftrightarrow \exists\, t \in T\, [x \in X_t].$$

Jeżeli $T = \{1, 2, ..., n\}$, to

$$\bigcup_{t\in T} X_t = \bigcup_{m=1}^{n} X_m = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n.$$

Jeżeli $T = \mathcal{N}$, to

$$\bigcup_{n\in\mathcal{N}} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Definicja 2.2
Iloczynem indeksowanej rodziny zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy zbiór $\bigcap_{t\in T} X_t$ określony następująco:

$$x \in \bigcap_{t\in T} X_t \Longleftrightarrow \forall\, t \in T\, [x \in X_t].$$

Jeżeli $T = \{1, 2, ..., n\}$, to

$$\bigcap_{t\in T} X_t = \bigcap_{m=1}^{n} X_m = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n.$$

Jeżeli $T = \mathcal{N}$, to

$$\bigcap_{n\in\mathcal{N}} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

W zadaniach 2.4-2.9 podajemy zwykle przykładowe rozwiązanie jednego zagadnienia. Rozwiązania problemów w pozostałych przypadkach są analogiczne (na ogół różnią się wykorzystaniem innych praw logicznych).

Zadanie 2.4
Wykazać, że dla dowolnego zbioru X i dla dowolnej (niepustej) indeksowanej rodziny zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ spełnione są równości:

(a) $X \cup \bigcup_{t\in T} X_t = \bigcup_{t\in T} (X \cup X_t)$,

(b) $X \cap \bigcup_{t\in T} X_t = \bigcup_{t\in T} (X \cap X_t)$,

(c) $X \cup \bigcap_{t\in T} X_t = \bigcap_{t\in T} (X \cup X_t)$,

(d) $X \cap \bigcap_{t\in T} X_t = \bigcap_{t\in T}(X \cap X_t)$.

Rozwiązanie. (a) Korzystając z prawa wyłączania kwantyfikatora szczegółowego dla alternatywy otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x \in X \cup \bigcup_{t\in T} X_t &\iff (x \in X \vee \exists\, t \in T\, [x \in X_t]) \\ &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X \vee x \in X_t] \\ &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X \cup X_t] \\ &\iff x \in \bigcup_{t\in T}(X \cup X_t). \end{aligned}$$

Zadanie 2.5

Wykazać, że dla dowolnych (niepustych) indeksowanych rodzin zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ i $(Y_t)_{t\in T}$ zachodzą równości:

(a) $\bigcup_{t\in T} X_t \cup \bigcup_{t\in T} Y_t = \bigcup_{t\in T}(X_t \cup Y_t)$,

(b) $\bigcap_{t\in T} X_t \cap \bigcap_{t\in T} Y_t = \bigcap_{t\in T}(X_t \cap Y_t)$.

Rozwiązanie. (a) Korzystając z prawa rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t\in T} X_t \cup \bigcup_{t\in T} Y_t &\iff (x \in \bigcup_{t\in T} X_t \vee x \in \bigcup_{t\in T} Y_t \\ &\iff (\,\exists\, t \in T\, [x \in X_t] \vee \exists\, t \in T\, [x \in Y_t]) \\ &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X_t \vee x \in Y_t] \\ &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X_t \cup Y_t] \\ &\iff x \in \bigcup_{t\in T}(X_t \cup Y_t). \end{aligned}$$

Zadanie 2.6

Wykazać, że dla dowolnych (niepustych) indeksowanych rodzin zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ i $(Y_t)_{t\in T}$ spełnione są inkluzje:

(a) $\bigcup_{t\in T}(X_t \cap Y_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} X_t \cap \bigcup_{t\in T} Y_t$,

(b) $\bigcap_{t\in T} X_t \cup \bigcap_{t\in T} Y_t \subseteq \bigcap_{t\in T}(X_t \cup Y_t)$,

(c) $\bigcup_{t\in T} X_t \setminus \bigcup_{t\in T} Y_t \subseteq \bigcup_{t\in T}(X_t \setminus Y_t)$.

Czy podane inkluzje można zastąpić równościami?

Rozwiązanie. (a) Korzystając z prawa rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem koniunkcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t\in T}(X_t \cap Y_t) &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X_t \cap Y_t] \\ &\iff \exists\, t \in T\, [x \in X_t \wedge x \in Y_t] \\ &\implies (\,\exists\, t \in T\, [x \in X_t] \wedge \exists\, t \in T\, [x \in Y_t]) \\ &\iff (x \in \bigcup_{t\in T} X_t \wedge x \in \bigcup_{t\in T} Y_t) \\ &\iff x \in \bigcup_{t\in T} X_t \cap \bigcup_{t\in T} Y_t. \end{aligned}$$

(c) Mamy:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t\in T} X_t \setminus \bigcup_{t\in T} Y_t &\iff [x \in \bigcup_{t\in T} X_t \wedge x \notin \bigcup_{t\in T} Y_t] \\ &\iff [\,\exists\, t \in T(x \in X_t) \wedge \forall\, t \in T(x \notin Y_t)] \\ &\implies \exists\, t \in T[x \in X_t \wedge x \notin Y_t] \\ &\iff \exists\, t \in T[x \in X_t \setminus Y_t] \\ &\iff x \in \bigcup_{t\in T}(X_t \setminus Y_t). \end{aligned}$$

Podanych inkluzji nie można zastąpić równościami dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów. Sprawdzić, że dla rodzin zbiorów: $X_n = \{x \in \mathcal{R} : x \leqslant n\}$ oraz $Y_n = \{x \in \mathcal{R} : x > n\}$, gdzie $n \in \mathcal{N}$, nie zachodzą równości w przypadkach (a), (b) i (c)

Uwagi i komentarze:

- Podać stosowne kontrprzykłady w zadaniu 2.6 za pomocą skończonych rodzin zbiorów skończonych.

Zadanie 2.7

Wykazać, że dla dowolnego zbioru X i dla dowolnej (niepustej) indeksowanej rodziny zbiorów $(X_t)_{t\in T}$ spełnione są równości:

(a) $X \setminus \bigcup\limits_{t\in T} X_t = \bigcap\limits_{t\in T}(X \setminus X_t)$,

(b) $X \setminus \bigcap\limits_{t\in T} X_t = \bigcup\limits_{t\in T}(X \setminus X_t)$.

Rozwiązanie. (a) Korzystając z praw zaprzeczania i wyłączania kwantyfikatorów otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus \bigcup_{t\in T} X_t &\iff (x \in X \wedge x \notin \bigcup_{t\in T} X_t) \\
&\iff (x \in X \wedge \sim (x \in \bigcup_{t\in T} X_t)) \\
&\iff (x \in X \wedge \sim (\,\exists\, t \in T\, [x \in X_t])) \\
&\iff (x \in X \wedge\ \forall\, t \in T\, [x \notin X_t]) \\
&\iff\ \forall\, t \in T\, [x \in X \wedge x \notin X_t] \\
&\iff\ \forall\, t \in T\, [x \in X \setminus X_t] \\
&\iff x \in \bigcap_{t\in T} (X \setminus X_t).
\end{aligned}
$$

Zadanie 2.8
Wykazać, że dla dowolnej (niepustej) indeksowanej rodziny podzbiorów $(X_t)_{t\in T}$ zbioru X spełnione są równoważności:
(a) $X \setminus \bigcup_{t\in T} X_t = \bigcap_{t\in T}(X \setminus X_t) \iff \bigcup_{t\in T} X_t = X \setminus \bigcap_{t\in T}(X \setminus X_t)$,
(b) $X \setminus \bigcap_{t\in T} X_t = \bigcup_{t\in T}(X \setminus X_t) \iff \bigcap_{t\in T} X_t = X \setminus \bigcup_{t\in T}(X \setminus X_t)$.

Wskazówka:
Wystarczy zastosować równoważność (1).

Przyjmujemy następujące oznaczenie:

$$\bigotimes_{i=1}^{m} X_i = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$$

dla dowolnych zbiorów $X_1, X_2, ..., X_m$.

Zadanie 2.9
Niech $A_1, ..., A_m$ i $B_1, ..., B_m$ będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Wykazać, że:
(a) $\bigotimes_{i=1}^{m} A_i \subseteq \bigotimes_{i=1}^{m} B_i \iff \forall\, i \in \{1, ..., m\}[A_i \subseteq B_i]$,
(b) $\bigotimes_{i=1}^{m} A_i = \bigotimes_{i=1}^{m} B_i \iff \forall\, i \in \{1, ..., m\}[A_i = B_i]$,
(c) $(\bigotimes_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigotimes_{i=1}^{m} B_i) = \bigotimes_{i=1}^{m}(A_i \cap B_i)$.

Czy założenie niepustości zbiorów jest istotne w warunkach (a), (b) *i* (c)*?*

Rozwiązanie. (c) Mamy:

$$\begin{aligned}
&(x_1, ..., x_m) \in (\bigotimes_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigotimes_{i=1}^{m} B_i) \\
&\qquad\qquad \iff ((x_1, ..., x_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} A_i \wedge (x_1, ..., x_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} B_i) \\
&\qquad\qquad \iff (\forall\, i \in \{1, ..., m\}[x_i \in A_i] \wedge \forall\, i \in \{1, ..., m\}[x_i \in B_i]) \\
&\qquad\qquad \iff \forall\, i \in \{1, ..., m\}[x_i \in A_i \wedge x_i \in B_i] \\
&\qquad\qquad \iff \forall\, i \in \{1, ..., m\}[x_i \in A_i \cap B_i] \\
&\qquad\qquad \iff (x_1, ..., x_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} (A_i \cap B_i).
\end{aligned}$$

Uwagi i komentarze:

- Jakie prawo logiczne dla kwantyfikatorów zostało wykorzystane w rozwiązaniu zadania 2.9(c)?

Paragraf ten kończymy zadaniami poświęconymi ciągom podzbiorów. W dowodach twierdzeń dotyczących podstawowych własności miary i miary zewnętrznej duże znaczenie mają różne własności specjalnych ciągów zbiorów. Aby ułatwić studentom zrozumienie tych dowodów proponujemy im, żeby przygotowali rozwiązania podanych niżej zadań. Pewne istotne fragmenty rozwiązań tych zadań powinny być przedyskutowane na ćwiczeniach poprzedzających odpowiednie wykłady.

Zadanie 2.10
Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dowolnych zbiorów. Określamy ciąg zbiorów $(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$ następująco:

$$B_n = A_1 \cup ... \cup A_n$$

dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$.

Wykazać, że:

(a) $B_n \subseteq B_{n+1}$ *dla dowolnego* $n \in \mathcal{N}$;

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Zadanie 2.11
Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dowolnych zbiorów. Określamy ciąg zbiorów $(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$ następująco:

$$B_n = A_1 \cap ... \cap A_n$$

dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$.

Wykazać, że:

(a) $B_{n+1} \subseteq B_n$ *dla dowolnego* $n \in \mathcal{N}$;

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Zadanie 2.12
Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dowolnych zbiorów. Określamy ciąg zbiorów $(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$ następująco:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{n-1})$$

dla dowolnego $n \geqslant 2$.

Wykazać, że:

(a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,
(b) $A_1 \cup ... \cup A_m = B_1 \cup ... \cup B_m$ *dla* $m \in \mathcal{N}$,
(c) $\forall\, i,j \in \mathcal{N} [i \neq j \Longrightarrow B_i \cap B_j = \emptyset]$,
(d) *jeżeli $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ jest ciągiem podzbiorów zbioru X, to $B_1 = A_1$ oraz $B_n = A_n \cap (X \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{n-1})) = X \setminus ((X \setminus A_n) \cup (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}))$ dla $n \geqslant 2$.*

Rozwiązanie. (a) Inkluzja

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

jest oczywista. Uzasadnimy zatem, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Niech $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Stąd $x \in A_n$ dla pewnego $n \in \mathcal{N}$. Rozważmy zbiór

$$I = \{k \in \mathcal{N} : x \in A_k\}.$$

Ponieważ $n \in I$, więc $I \neq \emptyset$. Niech $k_0 \in I$ będzie najmniejszą liczbą w zbiorze I. Jeżeli $k_0 = 1$, to $x \in A_1$, czyli $x \in B_1$, a więc $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Jeżeli $k_0 > 1$, to $x \in A_{k_0} \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{k_0-1}) = B_{k_0}$. Stąd $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Zatem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

(b) Niech $m \in \mathcal{N}$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Rozważmy ciąg $(C_n)_{n\in\mathcal{N}}$ taki, że $C_1 = A_1, ..., C_m = A_m$, $C_i = \emptyset$ dla $i > m$. Określamy ciąg $(D_n)_{n\in\mathcal{N}}$ następująco:

$$D_1 = C_1, \quad D_n = C_n \setminus (C_1 \cup ... \cup C_{n-1})$$

dla $n \geqslant 2$. Zauważmy, że $D_1 = B_1, ..., D_m = B_m, D_i = \emptyset$ dla $i > m$. Wobec tego na podstawie równości (a) mamy:

$$A_1 \cup ... \cup A_m = C_1 \cup ... \cup C_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D_1 \cup ... \cup D_m = B_1 \cup ... \cup B_m.$$

(c) Niech $i, j \in \mathcal{N}$ oraz $i \neq j$. Przypuśćmy, że istnieje element x_0 taki, że $x_0 \in B_i \cap B_j$. Rozważmy przypadek, gdy $i < j$. Wiemy, że:

$$B_i = A_i \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{i-1}), \quad B_j = A_j \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{j-1}).$$

Ponieważ $x_0 \in B_i$, więc $x_0 \in A_i$. Jednak $1 \leqslant i \leqslant j-1$, czyli $x_0 \in A_1 \cup ... \cup A_{j-1}$, a więc $x_0 \notin B_j$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypadek, gdy $j < i$ jest analogiczny. Zatem $B_i \cap B_j = \emptyset$.

(d) Wystarczy do zbioru B_n dla $n \geqslant 2$ zastosować równość (b) z zadania 2.2, a następnie prawa de Morgana dla zbiorów.

Uwagi i komentarze:

- Z jakiego twierdzenia o uporządkowaniu zbioru $\mathcal{N}$ liczb naturalnych korzystaliśmy w rozwiązaniu zadania 2.12(a)?

Zadanie 2.13
Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ zbiorów takich, że

$$\forall\, n \in \mathcal{N}[A_n \subseteq A_{n+1}].$$

Określamy ciąg zbiorów $(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$ następująco:

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

dla dowolnego $n \geqslant 2$.

Wykazać, że:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$;

(b) $\forall\, n \in \mathcal{N}[A_n = B_1 \cup ... \cup B_n]$;

(c) $\forall\, i,j \in \mathcal{N}[i \neq j \Longrightarrow B_i \cap B_j = \emptyset]$.

Wskazówka:
W rozwiązaniach (a) i (c) w zadaniu 2.13 można skorzystać odpowiednio ze schematów rozwiązań (a) i (c) w zadaniu 2.12. Rozwiązanie zadania 2.13(b) można przeprowadzić stosując indukcję matematyczną.

Zadanie 2.14
Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ zbiorów takich, że

$$\forall\, n \in \mathcal{N}[A_{n+1} \subseteq A_n].$$

Wykazać, że:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n).$$

Rozwiązanie. Z równości (a) w zadaniu 2.7 wynika, że

$$A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus (A_1 \setminus A_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

bo $A_n \subseteq A_1$ dla każdego $n \in \mathcal{N}$.

Zadanie 2.15
Niech $A, A_1, ..., A_n$, gdzie $n \geqslant 2$, będą dowolnymi zbiorami takimi, że $A_n \cap A_i = \emptyset$ dla $i = 1, ..., n-1$. Wykazać, że:

$$[A \cap (A_1 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n)] \setminus A_n = A \cap (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}).$$

Wskazówka:
W rozwiązaniu zadania 2.15 wystarczy zastosować równoważność (b) z zadania 2.3.

3. O pewnych własnościach przedziałów użytecznych przy studiowaniu teorii miary

W tej części artykułu symbolem $\mathcal{R}^m$, gdzie $m \in \mathcal{N}$, będziemy oznaczać przestrzeń kartezjańską m-wymiarową.

Pojęcie przedziału jest jednym z podstawowych pojęć w teorii miary Lebesque'a w przestrzeni $\mathcal{R}^m$. W powszechnie wykorzystywanej na wykładach z tej tematyki literaturze (np. Kołodziej, 2010; Sikorski, 1969) wiele własności przedziałów w $\mathcal{R}^m$ jest przyjętych bez dowodu, raczej z odwołaniem się do intuicji w tym zakresie. Uważamy, że aby studenci lepiej mogli zrozumieć studiowany materiał z tego zakresu, powinni wcześniej w ramach ćwiczeń i samodzielnej pracy własnej wykonać przedstawione niżej zadania, gdyż wszystkie własności przedziałów zawarte w tych zadaniach są wykorzystywane przy analizie podstawowych własności miary Lebesque'a. Zaproponowane rozwiązania zadań lub zamieszczone wskazówki do tych zadań są możliwie elementarne, tzn. unikamy korzystania z bardziej zaawansowanych pojęć i twierdzeń znanych w topologii, gdyż z doświadczenia wiemy, że albo tych pojęć i twierdzeń studenci nie realizowali w ramach kursu elementów topologii, albo nie potrafią z nich efektywnie skorzystać. Oczywiście niektóre podstawowe pojęcia i twierdzenia z teorii przestrzeni metrycznych muszą być używane w rozwiązaniach zadań z zakresu własności przedziałów w $\mathcal{R}^m$. Następujące pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych są stosowane w sformułowaniach i rozwiązaniach poniższych zadań:

1) Przestrzeń metryczna (X, d), gdzie d jest metryką w zbiorze X.
2) Przestrzeń kartezjańska m-wymiarowa $\mathcal{R}^m$ z metryką:

$$||a-b|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)^2}$$

   dla $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathcal{R}^m$ i $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathcal{R}^m$. Oczywiście, jeśli $a, b \in \mathcal{R}$, to przyjmujemy $||a-b|| = |a-b|$.
3) Średnica $\mathrm{diam}A$ zbioru A.
4) Kula otwarta $K(x_0, r)$ i kula domknięta $\bar{K}(x_0, r)$.
5) Zbiory otwarte i domknięte.
6) Wnętrze $\mathrm{int}A$ zbioru A i jego podstawowe własności.

7) Domknięcie cl$A$ zbioru A i jego podstawowe własności.
8) Zbieżność ciągów w przestrzeniach metrycznych.
9) Metryka i zbieżność ciągów w iloczynie metrycznym (kartezjańskim) przestrzeni metrycznych (wymienione w tym punkcie zagadnienia można ograniczyć do przestrzeni kartezjańskiej $\mathcal{R}^m$).

Zauważmy, że nawet elementarne podejście do rozważanych zagadnień w teorii miary Lebesgue'a wymaga od studenta pewnego przygotowania z zakresu topologii. Studentom lepiej przygotowanym z topologii i zainteresowanym tym przedmiotem, proponujemy alternatywny sposób rozwiązania niektórych zadań z zastosowaniem bardziej zaawansowanego aparatu topologicznego.

Warto studentom zaproponować szczegółowe rozwiązania problemów zawartych w poniższych zadaniach, nawet w tych przypadkach, gdy zadania są oczywiste intuicyjnie, gdyż z praktyki wiadomo, że studenci mają duże trudności w poprawnym merytorycznie i redakcyjnie zapisie prowadzonych rozumowań.

Definicja 3.3
Przedziałem w przestrzeni $\mathcal{R}^m$ nazywamy dowolny iloczyn kartezjański

$$P = I_1 \times ... \times I_m = \bigotimes_{i=1}^{m} I_i$$

przedziałów $I_1, ..., I_m$ w przestrzeni $\mathcal{R}$.

Ogólną definicję przedziału w przestrzeni $\mathcal{R}$ można znaleźć np. w książce: W. Kołodziej (2010).

Definicja 3.4
Niech $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m \in \mathcal{R}$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a_i \leqslant b_i$ dla każdego $i = 1, ..., m$.

Przedział postaci

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i] \tag{2}$$

nazywamy przedziałem *domkniętym*, a przedział postaci

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m} (a_i, b_i) \tag{3}$$

nazywamy przedziałem *otwartym*.

Przedziały

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m} (a_i, b_i] \ \text{ i } \ P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i) \tag{4}$$

nazywamy odpowiednio przedziałem *prawostronnie domkniętym* i *lewostronnie domkniętym*.

Przyjmujemy, że *zbiór pusty* jest przedziałem zarówno domkniętym, jak i otwartym.

DEFINICJA 3.5
Jeżeli P jest przedziałem postaci (2), (3) lub (4), to *objętością* przedziału P nazywamy liczbę

$$\mathrm{vol}P = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_m - a_m) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $\mathrm{vol}\emptyset = 0$.

Zadania o przedziałach w przestrzeni $\mathcal{R}^m$ rozpoczniemy od dwóch zadań (3.1, 3.2) dotyczących elementarnych własności przedziałów.

ZADANIE 3.1
Niech

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i, b_i] \text{ oraz } P' = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i', b_i']$$

będą przedziałami domkniętymi w $\mathcal{R}^m$.
Wykazać, że

$$P \subseteq P' \Longleftrightarrow [a_i, b_i] \subseteq [a_i', b_i']$$

dla $i = 1, ..., m$.

Wskazówka:
Można skorzystać z zadania 2.9(a).

Uwagi i komentarze:

- Sformułować i rozwiązać analogiczne zadanie do zadania 3.1 dla równości przedziałów domkniętych P i P'.

ZADANIE 3.2
Niech

$$Q = \bigotimes_{i=1}^{m}(a_i, b_i) \text{ oraz } Q' = \bigotimes_{i=1}^{m}(a_i', b_i')$$

będą przedziałami otwartymi w $\mathcal{R}^m$.
Rozważmy równoważność:

$$Q \subseteq Q' \Longleftrightarrow (a_i, b_i) \subseteq (a_i', b_i') \tag{5}$$

dla $i = 1, ..., m$.
Przeprowadzić dyskusję (oczywiście z uzasadnieniem) nad następującymi stwierdzeniami:
(a) *Równoważność (5) jest spełniona.*
(b) *Równoważność (5) nie jest spełniona.*
(c) *Równoważność (5) jest spełniona przy stosownych założeniach o przedziałach otwartych Q i Q'.*

Uwagi i komentarze:

- Sformułować i rozwiązać analogiczne zadanie do zadania 3.2 dla równości przedziałów otwartych Q i Q'.

W zadaniach 3.3-3.13 będziemy badać topologiczne własności przedziałów w przestrzeni $\mathcal{R}^m$, które są wykorzystywane przy opracowaniu miary Lebesgue'a w przestrzeni $\mathcal{R}^m$ (zob. np. Kołodziej, 2010). Głównymi pojęciami topologicznymi stosowanymi w tych zadaniach są: kule otwarta i domknięta, zbiory otwarty i domknięty, wnętrze zbioru, domknięcie zbioru, średnica zbioru.

Zadanie 3.3
Uzasadnić, że w przestrzeni metrycznej $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych ze zwykłą metryką spełnione są warunki:
(a) $K(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$,
(b) $\bar{K}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$,
gdzie $x_0 \in \mathcal{R}$ i $r > 0$.

Zadanie 3.4
Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$. Wykazać, że:
(a) $(a, b) = K(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$,
(b) $[a, b] = \bar{K}(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$.

Rozwiązanie. (a) Dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$ mamy: $x \in K(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}) \iff |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2} \iff -\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \iff a < x < b \iff x \in (a, b)$.
Uzasadnienie w przypadku (b) jest analogiczne.

Zadanie 3.5
Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a \leqslant b$. Wykazać, że przedział otwarty (a, b) jest zbiorem otwartym w $\mathcal{R}$.

Rozwiązanie. Jeżeli $a = b$, to $(a, b) = \emptyset$, a więc (a, b) jest zbiorem otwartym w $\mathcal{R}$. Następnie zakładamy, że $a < b$. Niech $c \in (a, b)$. Weźmy liczbę dodatnią $s < \min\{c-a, b-c\}$. Oczywiście $c \in (c-s, c+s)$. Pokażemy, że $(c-s, c+s) \subseteq (a, b)$. Niech $x \in (c-s, c+s)$, wtedy $c-s < x < c+s$. Ponieważ $s < c-a$ oraz $s < b-c$, więc $a < c-s$ oraz $c+s < b$. Zatem $a < x < b$, czyli $x \in (a, b)$, a więc $(c-s, c+s) \subseteq (a, b)$. Korzystając z zadania 3.4(a), stwierdzamy, że przedział otwarty (a, b) jest zbiorem otwartym w $\mathcal{R}$.

Uwagi i komentarze:

- Korzystając z zadania 3.4(a) i z faktu, że kula otwarta w przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym (zob. np. Engelking, Sieklucki, 1986) otrzymujemy natychmiast rozwiązanie zadania 3.5.

Zadanie 3.6
Dane są liczby rzeczywiste $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m$ takie, że $a_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$. Udowodnić, że przedział otwarty

$$Q = \bigotimes_{i=1}^{m} (a_i, b_i)$$

jest zbiorem otwartym w $\mathcal{R}^m$.

Rozwiązanie. Podamy schemat rozwiązania zadania:

1) Rozważyć przypadek, gdy $Q = \emptyset$. Opisać ten przypadek za pomocą odpowiednich warunków na liczbach a_i, b_i dla $i \in \{1, ..., m\}$.
2) Rozważyć przypadek, gdy $Q \neq \emptyset$. Jakie warunki w tym przypadku spełniają liczby a_i, b_i dla $i \in \{1, ..., m\}$?

   2.1) Rozważyć dowolny punkt $c = (c_1, ..., c_m) \in Q$. Czy istnieją liczby rzeczywiste dodatnie $r_1, ..., r_m$ takie, że $(c_i - r_i, c_i + r_i) \subseteq (a_i, b_i)$ dla $i \in \{1, ..., m\}$? Dlaczego?
   2.2) Za pomocą liczb $r_1, ..., r_m$ określić promień r kuli $K(c, r)$. Pomysł na określenie promienia r można znaleźć w zadaniu 3.5.
   2.3) Wykazać, że $K(c, r) \subseteq Q$. Dlaczego?

   a) Niech $x = (x_1, ..., x_m) \in K(c, r)$. Rozważyć $||c - x||$.
   b) Wykazać, że $(c_i - x_i)^2 < r^2 \leqslant r_i^2$ dla $i \in \{1, ..., m\}$.
   c) Czy spełniona jest nierówność $|c_i - x_i| < r_i$ dla $i \in \{1, ..., m\}$?
   d) Czy na podstawie powyższych informacji można wywnioskować, że $K(c, r) \subseteq Q$? W jaki sposób?

3) Na zakończenie ustalić najbardziej istotne etapy rozwiązania tego zadania.

Uwagi i komentarze:

- Ponieważ przestrzeń kartezjańska $\mathcal{R}^m$ jest iloczynem metrycznym przestrzeni metrycznej $\mathcal{R}$, więc korzystając z twierdzenia o iloczynie kartezjańskim zbiorów otwartych w iloczynie metrycznym (zob. Engelking, Sieklucki, 1986, twierdzenie 1.6.6, s. 53), otrzymujemy natychmiast rozwiązanie zadania 3.6.

ZADANIE 3.7
Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a \leqslant b$. Wykazać, że przedział domknięty $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{R}$.

Rozwiązanie. Niech $x_n \in [a, b]$ dla $n \in \mathcal{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ponieważ $a \leqslant x_n \leqslant b$ dla $n \in \mathcal{N}$, więc $a \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant b$, czyli $x \in [a, b]$. Zatem przedział domknięty $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{R}$.

Uwagi i komentarze:

1. Sformułować twierdzenia o granicy ciągu i o zbiorach domkniętych, które zostały wykorzystane w rozwiązaniu zadania 3.7 (zob. np. Kołodziej, 2010).
2. Korzystając z zadania 3.4(b) i z faktu, że kula domknięta w przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym (zob. np. Engelking, Sieklucki, 1986), otrzymujemy natychmiast rozwiązanie zadania 3.7.

Zadanie 3.8
Dane są liczby rzeczywiste $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m$ *takie, że* $a_i \leqslant b_i$ *dla* $i = 1, ..., m$. *Udowodnić, że przedział domknięty*

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$$

jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{R}^m$.

Rozwiązanie. Niech $x_n \in P$ dla $n \in \mathcal{N}$. Przyjmujemy, że $x_n = (x_{1n}, ..., x_{mn})$ dla $n \in \mathcal{N}$. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, gdzie $x = (x_1, ..., x_m)$. Stąd $\lim_{n\to\infty} x_{in} = x_i$ dla $i = 1, ..., m$. Ponieważ $a_i \leqslant x_{in} \leqslant b_i$, więc $a_i \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{in} \leqslant b_i$, czyli $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, co oznacza, że $x_i \in [a_i, b_i]$ dla $i = 1, ..., m$. Wobec tego

$$x = (x_1, ..., x_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i] = P.$$

Zatem przedział domknięty P jest zbiorem domkniętym w R^m.

Uwagi i komentarze:

1. Sformułować twierdzenie o zbieżności ciągów w iloczynie metrycznym, które zostało wykorzystane w rozwiązaniu zadania 3.8 (zob. np. Engelking, Sieklucki, 1986; Kołodziej, 2010).
2. Ponieważ przestrzeń kartezjańska $\mathcal{R}^m$ jest iloczynem metrycznym przestrzeni metrycznej $\mathcal{R}$, więc korzystając z twierdzenia o iloczynie kartezjańskim zbiorów domkniętych w iloczynie metrycznym (zob. Engelking, Sieklucki, 1986, twierdzenie 1.6.21, s. 57), otrzymujemy natychmiast rozwiązanie zadania 3.8.

Zadanie 3.9
Dane są liczby rzeczywiste $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m$ *takie, że* $a_i < b_i$ *dla* $i = 1, ..., m$. *Udowodnić, że jeżeli*

$$Q = \bigotimes_{i=1}^{m} (a_i, b_i) \ \text{ i } \ P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i],$$

to

$$\mathrm{int} P = Q, \ \text{ i } \ \mathrm{cl} Q = P.$$

Rozwiązanie. Udowodnimy, że $\mathrm{int} P = Q$. Ponieważ Q jest zbiorem otwartym (zob. zadanie 3.6) i $Q \subseteq P$, więc $Q \subseteq \mathrm{int} P$. Oczywiście $\mathrm{int} P \subseteq P$. Przypuśćmy, że istnieje $c \in \mathrm{int} P \setminus Q$. Oczywiście $c \in P$. Przyjmijmy, że $c = (c_1, ..., c_m)$. Stąd $a_i \leqslant c_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$. Ponieważ $c \notin Q$, więc $c_k = a_k$ lub $c_k = b_k$ dla pewnego $k \in \{1, ..., m\}$. Rozważmy dowolną kulę otwartą $K(c, r)$. Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą s taką, że $0 < s < r$. Najpierw przyjmujemy, że $c_k = a_k$. Niech $c' = (c_1, ..., c_{k-1}, c_k - s, c_{k+1}, ..., c_m)$. Zauważmy, że $c_k - s < c_k = a_k$, a więc $c' \notin P$. Ponieważ $||c - c'|| = \sqrt{s^2} = s < r$, więc $c' \in K(c, r)$. Zatem $K(c, r) \nsubseteq P$, czyli $c \notin \mathrm{int} P$ (dlaczego?). Podobne rozumowanie można przeprowadzić, gdy

$c_k = b_k$, biorąc $c' = (c_1, ..., c_{k-1}, c_k + s, c_{k+1}, ..., c_m)$. Wobec tego $\mathrm{int}P \setminus Q = \emptyset$, czyli $\mathrm{int}P = Q$.

Udowodnimy, że $\mathrm{cl}Q = P$. Ponieważ $Q \subseteq P$, więc $\mathrm{cl}Q \subseteq \mathrm{cl}P = P$, bo P jest zbiorem domkniętym (zob. zadanie 3.8). Uzasadnimy, że jeżeli $c \in P \setminus Q$, to $c \in \mathrm{cl}Q$. Przyjmujemy, że $c = (c_1, ..., c_m)$. Oczywiście $a_i \leqslant c_i \leqslant b_i$ dla dowolnego $i = 1, ..., m$. Rozważmy ciąg $p_n = (d_n^1, ..., d_n^m)$ dla $n \in \mathcal{N}$ określony następująco:

$$d_n^i = \begin{cases} a_i + \frac{1}{n}, \text{ gdy } c_i = a_i, \\ b_i - \frac{1}{n}, \text{ gdy } c_i = b_i, \\ c_i, \text{ gdy } a_i < c_i < b_i, \end{cases}$$

gdzie $i = 1, ..., m$. Ponieważ $a_i < b_i$ dla $i = 1, ..., m$, więc dla każdego $i \in \{1, ..., m\}$ istnieje liczba $n_i \in \mathcal{N}$ taka, że $a_i < d_n^i < b_i$ dla $n \geqslant n_i$. Niech $k = \max\{n_1, ..., n_m\}$. Wtedy $p_n \in Q$ dla $n \geqslant k$. Zauważmy, że $\lim_{n\to\infty} d_n^i = c_i$ dla $i = 1, ..., m$. Wobec tego $\lim_{n\to\infty} p_n = c$. Zatem $c \in \mathrm{cl}Q$, czyli $\mathrm{cl}Q = P$.

Uwagi i komentarze:

1. Ustalić, w których fragmentach rozwiązania zadania 3.9 korzystaliśmy z własności:

   a) Wnętrze zbioru A jest sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze A.

   b) Ciąg w przestrzeni $\mathcal{R}^m$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie ciągi współrzędnych wyrazów tego ciągu są zbieżne. Sformułować w sposób ścisły w postaci twierdzenia opisaną własność zbieżności ciągów w $\mathcal{R}^m$.

   c) Punkt należy do domknięcia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy ten punkt jest granicą ciągu o wyrazach należących do zbioru A. Sformułować w sposób ścisły w postaci twierdzenia opisaną własność domknięcia zbiorów w przestrzeniach metrycznych.

   d) Zbiór $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych jest gęsto uporządkowany przez relację niewiększości $\leqslant$.

2. Czy własność sformułowana w zadaniu 3.9 jest prawdziwa, przy założeniu $a_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$?

Zadanie 3.10

Dany jest przedział domknięty $P \subseteq \mathcal{R}^m$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje przedział domknięty $S \subseteq \mathcal{R}^m$ taki, że $P \subseteq \mathrm{int}S$ oraz $\mathrm{vol}S < \mathrm{vol}P + \varepsilon$.

Rozwiązanie. Niech $P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$. Rozważmy ciąg przedziałów otwartych

$$Q_n = \bigotimes_{i=1}^{m} \left(a_i - \frac{1}{2n}, b_i + \frac{1}{2n} \right)$$

dla $n \in \mathcal{N}$. Oczywiście $P \subseteq Q_n$ dla każdego $n \in \mathcal{N}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{vol}Q_n = \prod_{i=1}^{m}((b_i - a_i) + \frac{1}{n}) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i) + \left(\frac{1}{n}d_1 + ... + \frac{1}{n^{m-1}}d_{m-1} + \frac{1}{n^m}\right)$$

dla pewnych nieujemnych liczb rzeczywistych $d_1, ..., d_{m-1}$. Wobec tego

$$\mathrm{vol}Q_n = \mathrm{vol}P + \left(\frac{1}{n}d_1 + ... + \frac{1}{n^{m-1}}d_{m-1} + \frac{1}{n^m}\right).$$

Rozważmy ciąg

$$p_n = \frac{1}{n}d_1 + ... + \frac{1}{n^{m-1}}d_{m-1} + \frac{1}{n^m}$$

dla $n \in \mathcal{N}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty}p_n = 0$, więc istnieje taka liczba naturalna k, że $p_n < \varepsilon$ dla każdego $n \geqslant k$. Zatem $\mathrm{vol}Q_k < \mathrm{vol}P + \varepsilon$. Przyjmijmy, że

$$S = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i - \frac{1}{2k}, b_i + \frac{1}{2k}].$$

Ponieważ $\mathrm{vol}Q_k =$volS, więc $\mathrm{vol}S < \mathrm{vol}P + \varepsilon$. Z zadania 3.9 wynika, że $\mathrm{int}S = Q_k$, więc $P \subseteq Q_k = \mathrm{int}S$.

Uwagi i komentarze:

1. Czy w rozwiązaniu zadania 3.10 korzystaliśmy z własności iloczynów kartezjańskich zbiorów, które były rozważane w zadaniu 2.9?
2. Z jakich własności granic ciągów liczbowych korzystaliśmy w rozwiązaniu zadania 3.10?

Zadanie 3.11

Dany jest przedział domknięty $P = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i, b_i]$ *w przestrzeni* $\mathcal{R}^m$. *Udowodnić, że*

$$\mathrm{diam}P = ||a - b||,$$

gdzie $a = (a_1, ..., a_m)$ *i* $b = (b_1, ..., b_m)$.

Rozwiązanie. Mamy uzasadnić, że $\mathrm{diam}P = \sup\{||x - y|| : x, y \in P\} = ||a-b||$. Niech $x = (x_1, ..., x_m) \in P$ i $y = (y_1, ..., y_m) \in P$. Wówczas $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ oraz $a_i \leqslant y_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$. Ponadto

$$||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_m - y_m)^2}.$$

Zauważmy, że $|x_i - y_i| \leqslant b_i - a_i$, a więc $(x_i - y_i)^2 \leqslant (a_i - b_i)^2$ dla $i = 1, ..., m$. Wobec tego

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_m - y_m)^2} \\ &\leqslant \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_m - b_m)^2} \\ &= ||a - b||. \end{aligned}$$

Ponieważ $||a - b|| \in \{||x - y|| : x, y \in P\}$, więc $\mathrm{diam}P = ||a - b||$.

Uwagi i komentarze:

- Znaleźć w literaturze matematycznej lub sformułować i udowodnić własność kresu górnego zbioru, która została wykorzystana w rozwiązaniu zadania 3.11.

ZADANIE 3.12
Dany jest przedział otwarty $Q = \bigotimes_{i=1}^{m}(a_i, b_i)$, *przy czym* $a_i < b_i$ *dla* $i = 1, ..., m$, *w przestrzeni* $\mathcal{R}^m$. *Udowodnić, że*

$$\text{diam}Q = ||a - b||,$$

gdzie $a = (a_1, ..., a_m)$ *i* $b = (b_1, ..., b_m)$.

Rozwiązanie. Mamy uzasadnić, że $\text{diam}Q = \sup\{||x - y|| : \ x, y \in Q\} = ||a-b||$. Niech $P = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i, b_i]$. Ponieważ $\text{diam}P = ||a - b||$ na podstawie zadania 3.11 oraz $Q \subseteq P$, więc $\text{diam}Q \leqslant \text{diam}P = ||a-b||$. Niech $a_{in} = a_i + \frac{1}{n}$ oraz $b_{in} = b_i - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathcal{N}$ oraz $i = 1, ..., m$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_{in} = a_i$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_{in} = b_i$ dla $i = 1, ..., m$, więc istnieją liczby $n_i \in \mathcal{N}$ takie, że $a_{in}, b_{in} \in (a_i, b_i)$ dla $n \geqslant n_i$, gdzie $i = 1, ..., m$. Przyjmijmy, że $k_1 = \max\{n_1, ..., n_m\}$. Wobec tego $a_{in}, b_{in} \in (a_i, b_i)$ dla dowolnych $n \geqslant k_1$ oraz $i = 1, ..., m$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty}(a_{in} - b_{in}) = a_i - b_i$, więc

$$\lim_{n\to\infty}(a_{in} - b_{in})^2 = (a_i - b_i)^2$$

dla $i = 1, ..., m$. A zatem

$$\lim_{n\to\infty}[(a_{1n} - b_{1n})^2 + ... + (a_{mn} - b_{mn})^2] = (a_1 - b_1)^2 + ... + (a_m - b_m)^2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sqrt{(a_{1n}-b_{1n})^2 + ... + (a_{mn}-b_{mn})^2} &= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + ... + (a_m-b_m)^2} \\ &= ||a - b||. \end{aligned} \tag{6}$$

Ponieważ $a_{in}, b_{in} \in (a_i, b_i)$ dla dowolnych $n \geqslant k_1$ oraz $i = 1, ..., m$, więc

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_{1n} - b_{1n})^2 + ... + (a_{mn} - b_{mn})^2} &< \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_m - b_m)^2} \\ &= ||a - b|| \end{aligned} \tag{7}$$

dla każdego $n \geqslant k_1$.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Z (6) i (7) wynika, że istnieje liczba $k_2 \in \mathcal{N}$ taka, że

$$||a - b|| - \varepsilon < \sqrt{(a_{1n} - b_{1n})^2 + ... + (a_{mn} - b_{mn})^2}$$

dla każdego $n \geqslant k_2$. Niech $k = \max\{k_1, k_2\}$. Rozważmy punkty $a' = (a_{1k}, ..., a_{mk})$ i $b' = (b_{1k}, ..., b_{mk})$. Ponieważ $a', b' \in Q$, więc $||a' - b'|| \in \{||x - y|| : \ x, y \in Q\}$ oraz $||a - b|| - \varepsilon < ||a' - b'||$. Zatem $\text{diam}Q = \sup\{||x - y|| : \ x, y \in Q\} = ||a - b||$, gdzie $a = (a_1, ..., a_m)$ i $b = (b_1, ..., b_m)$.

Uwagi i komentarze:

1. Z jakiego twierdzenia o średnicach zbiorów korzystamy w rozwiązaniu zadania 3.12?
2. Z jakich własności zbieżności ciągów liczbowych korzystamy w rozwiązaniu zadania 3.12?
3. Na jakich dwóch podstawowych własnościach kresu zbioru oparty jest schemat rozwiązania zadania 3.12?
4. Czy twierdzenie sformułowane w zadaniu 3.12 jest prawdziwe, przy założeniu $a_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$?

Zadanie 3.13
Udowodnić, że jeżeli $Q = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i, b_i)$ *jest przedziałem lewostronnie domkniętym lub* $Q = \bigotimes_{i=1}^{m}(a_i, b_i]$ *jest przedziałem prawostronnie domkniętym, przy czym* $a_i < b_i$ *dla* $i = 1, ..., m$*, w przestrzeni* $\mathcal{R}^m$*, to*

$$\mathrm{diam} Q = ||a - b||,$$

gdzie $a = (a_1, ..., a_m)$ *i* $b = (b_1, ..., b_m)$*.*

Rozwiązanie. Niech

$$S = \bigotimes_{i=1}^{m}(a_i, b_i) \quad \text{oraz} \quad P = \bigotimes_{i=1}^{m}[a_i, b_i].$$

Ponieważ $S \subseteq Q \subseteq P$, więc $||a - b|| = \mathrm{diam} S \leqslant \mathrm{diam} Q \leqslant \mathrm{diam} P = ||a - b||$ na podstawie zadań 3.11 i 3.12, więc $\mathrm{diam} Q = ||a - b||$.

Ważnym zagadnieniem w teorii miary Lebesgue'a są podziały przedziałów w przestrzeni $\mathcal{R}^m$. Ten materiał sprawia studentom trudności, ponieważ intuicyjne wyobrażenia przedziałów w przestrzeniach $\mathcal{R}^m$ dla $m > 3$ zawodzą, a formalne używanie tych przedziałów jest dość skomplikowane ze względu na złożoność symboliki, którą trzeba stosować w różnych rozumowaniach dotyczących tych przedziałów. Pierwsze zadania 3.14-3.16 z tej grupy tematycznej dotyczą ważnych, ale elementarnych zagadnień związanych z przedziałami w przestrzeni $\mathcal{R}$. Mają one na celu przygotowanie studentów do trudniejszych zagadnień dotyczących podziałów przedziałów w przestrzeni $\mathcal{R}^m$. W zadaniu 3.17 należy udowodnić podstawowe własności podziałów przedziałów domkniętych w $\mathcal{R}^m$. Zadanie 3.18 dotyczy dość skomplikowanej i mało intuicyjnej symboliki sum i iloczynów liczb rzeczywistych, stosowanej przy omawianiu własności podziałów przedziałów w $\mathcal{R}^m$ (zob. Kołodziej, 2010).

Zadanie 3.14
Udowodnić, że iloczyn mnogościowy dwóch przedziałów domkniętych [*otwartych*] *w zbiorze* $\mathcal{R}$ *liczb rzeczywistych jest przedziałem domkniętym* [*otwartym*].

Rozwiązanie. Rozważmy przedziały domknięte $[a, b]$ i $[c, d]$ w zbiorze $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych. Aby wykazać, że zbiór $[a, b] \cap [c, d]$ jest przedziałem domkniętym, wystarczy rozważyć sześć następujących przypadków:

1) Jeżeli $c \leqslant d < a \leqslant b$, to $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$.
2) Jeżeli $c \leqslant a \leqslant d \leqslant b$, to $[a, b] \cap [c, d] = [a, d]$.
3) Jeżeli $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$, to $[a, b] \cap [c, d] = [a, b]$.
4) Jeżeli $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, to $[a, b] \cap [c, d] = [c, d]$.
5) Jeżeli $a \leqslant c \leqslant b \leqslant d$, to $[a, b] \cap [c, d] = [c, b]$.
6) Jeżeli $a \leqslant b < c \leqslant d$, to $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$.

Przeprowadzimy dowód w przypadku 2). Mamy:

$$\begin{aligned} x \in [a, b] \cap [c, d] &\iff (x \in [a, b] \wedge x \in [c, d]) \\ &\iff (a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant x \leqslant d) \\ &\iff a \leqslant x \leqslant d \iff x \in [a, d] \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$.

Łatwo udowodnić pozostałe przypadki.

Dowód dla przedziałów otwartych jest analogiczny.

Zadanie 3.15

Udowodnić, że suma mnogościowa dwóch przedziałów domkniętych w zbiorze $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych jest przedziałem domkniętym w $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy przedziały nie są rozłączne.

Rozwiązanie. Schemat rozwiązania zadania:

1) Założyć, że przedziały domknięte nie są rozłączne i rozważyć stosowne (cztery) przypadki (zob. zadanie 3.14).

2) Następnie zakładamy, że $[a, b] \cup [c, d]$ jest przedziałem domkniętym. Przypuśćmy, że $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$. Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy:

   (a) $c \leqslant d < a \leqslant b$,

   (b) $a \leqslant b < c \leqslant d$.

Udowodnimy, że w obu powyższych przypadkach zbiór $I = [a, b] \cup [c, d]$ nie jest przedziałem. Najpierw rozważymy przypadek (a).

Wobec tego mamy pokazać, że

$$\exists\, x_1, x_2 \in I \;\exists\, y \in \mathcal{R}[x_1 < y < x_2 \wedge y \notin I].$$

Niech $x_1 = d, x_2 = a$. Oczywiście $x_1 \in [a, b] \cup [c, d]$ i $x_2 \in [a, b] \cup [c, d]$. Weźmy dowolną liczbę $y \in \mathcal{R}$ taką, że $d < y < a$. Wówczas $d = x_1 < y < x_2 = a$ i $y \notin I$.

Dowód w przypadku (b) jest analogiczny.

Zadanie 3.16
Udowodnić, że suma mnogościowa dwóch niepustych przedziałów otwartych w zbiorze $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych jest przedziałem otwartym w $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy przedziały nie są rozłączne.

Wskazówka:

Do rozwiązania zadania 3.16 można wykorzystać zaproponowany schemat rozwiązania zadania 3.15.

Uwagi i komentarze:

- Warto zwrócić uwagę na to, że ogólniejsze rezultaty o przedziałach w $\mathcal{R}$, niż zawarte w zadaniach 3.15 i 3.16, można uzyskać, gdy wykorzystamy następujące fakty z zakresu przestrzeni topologicznych (zob. np. Krzyszkowski, Turdza, 2005):

  1) Przestrzeń $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych z topologią naturalną jest spójna.
  2) W przestrzeni $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych z topologią naturalną jedynymi zbiorami spójnymi są przedziały.
  3) Jeżeli zbiory $\{C_i\}_{i\in I}$ są spójne i $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, to zbiór $\bigcup_{i\in I} C_i$ jest spójny.
  4) Suma mnogościowa dwóch zbiorów domkniętych [otwartych] jest zbiorem domkniętym [otwartym].

Zadanie 3.17
Niech dany będzie przedział domknięty

$$P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i] \tag{8}$$

w zbiorze $\mathcal{R}^m$. Dane są liczby naturalne $n_1, ..., n_m$. Dla dowolnego $i = 1, ..., m$ rozważmy następujący podział przedziału $[a_i, b_i]$:

$$a_i = c_{i0} \leqslant c_{i1} \leqslant ... \leqslant c_{i,\nu_i-1} \leqslant c_{i\nu_i} \leqslant ... \leqslant c_{in_i} = b_i. \tag{9}$$

Podziałem przedziału (8) wyznaczonym przez układ podziałów (9) nazywamy zbiór wszystkich przedziałów

$$P_{\nu_1,...,\nu_m} = \bigotimes_{i=1}^{m} [c_{i,\nu_i-1}, c_{i\nu_i}], \tag{10}$$

gdzie $\nu_1, ..., \nu_m$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych takich, że $\nu_i \leqslant n_i$ dla $i = 1, ..., m$.

Wykazać, że spełnione są następujące warunki:

(a) $P_{\nu_1,...,\nu_m} \subseteq P$ *dla* $1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i$, *gdzie* $i = 1, ..., m$;

(b) $\displaystyle\bigcup_{1\leqslant\nu_i\leqslant n_i} P_{\nu_1,...,\nu_m} = P$, *gdzie* $i = 1, ..., m$.

Rozwiązanie. (a) Niech $c \in P_{\nu_1,...,\nu_m}$, gdzie $c = (c_1, ..., c_m) \in \mathcal{R}^m$. Stąd

$$(c_1, ..., c_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} [c_{i,\nu_i-1}, c_{i\nu_i}].$$

Wobec tego

$$a_i \leqslant c_{i,\nu_i-1} \leqslant c_i \leqslant c_{i\nu_i} \leqslant b_i$$

dla $i = 1, ..., m$. Zatem

$$c = (c_1, ..., c_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i] = P.$$

Stąd $P_{\nu_1,...,\nu_m} \subseteq P$ dla $1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i$, gdzie $i = 1, ..., m$.

(b) Z własności (a) wynika, że

$$\bigcup_{1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i} P_{\nu_1,...,\nu_m} \subseteq P, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, ..., m.$$

Niech

$$c \in P = \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i], \quad \text{gdzie} \quad c = (c_1, ..., c_m) \in \mathcal{R}^m.$$

Wobec tego

$$c = (c_1, ..., c_m) \in \bigotimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i].$$

Stąd $a_i \leqslant c_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, ..., m$. Z (9) wynika, że $c_{i,\nu_i-1} \leqslant c_i \leqslant c_{i\nu_i}$ dla pewnych $1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i$, gdzie $i = 1, ..., m$. Zatem

$$c \in \bigotimes_{i=1}^{m} [c_{i,\nu_i-1}, c_{i\nu_i}] = P_{\nu_1,...,\nu_m}$$

dla pewnych $1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i$, gdzie $i = 1, ..., m$. Stąd

$$P \subseteq \bigcup_{1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i} P_{\nu_1,...,\nu_m}$$

dla $1 \leqslant \nu_i \leqslant n_i$, gdzie $i = 1, ..., m$.

Uwagi i komentarze:

- Przed analizą rozwiązania zadania 3.17 warto przeprowadzić graficzną ilustrację przykładowych podziałów przedziałów domkniętych na płaszczyźnie $\mathcal{R}^2$ i w przestrzeni $\mathcal{R}^3$.

Zadanie 3.18

(a) *Niech* $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$. *Niech* ν_i *będą liczbami naturalnymi takimi, że* $\nu_i \leqslant n_i$ *dla* $i = 1, 2, 3$. *Rozważmy układ* $a_{i\nu_i}$ *liczb rzeczywistych dla* $i = 1, 2, 3$. *Wykazać, że*

$$\prod_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i=1}^{n_i} a_{i\nu_i} = \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \sum_{\nu_3=1}^{n_3} \prod_{i=1}^{m} a_{i\nu_i}.$$

(b) *Niech $m, n_1, ..., n_m$ będą liczbami naturalnymi. Niech ν_i będą liczbami naturalnymi takimi, że $\nu_i \leqslant n_i$ dla $i = 1, ..., m$. Rozważmy układ $a_{i\nu_i}$ liczb rzeczywistych dla $i = 1, ..., m$. Wykazać, że*

$$\prod_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i=1}^{n_i} a_{i\nu_i} = \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} ... \sum_{\nu_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i\nu_i}.$$

Rozwiązanie. (a) Istotnie,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i=1}^{n_i} a_{i\nu_i} &= \prod_{i=1}^{3} \sum_{\nu_i=1}^{n_i} a_{i\nu_i} \\
&= \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{1\nu_1}\right) \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} a_{2\nu_2}\right) \left(\sum_{\nu_3=1}^{n_3} a_{3\nu_3}\right) \\
&= \left(\sum_{\nu_1=1}^{2} a_{1\nu_1}\right) \left(\sum_{\nu_2=1}^{3} a_{2\nu_2}\right) \left(\sum_{\nu_3=1}^{2} a_{3\nu_3}\right) \\
&= (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22} + a_{23})(a_{31} + a_{32}) \\
&= a_{11}a_{21}a_{31} + a_{11}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{32} \\
&\quad + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} \\
&\quad + a_{12}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{32} \\
&= \sum_{\nu_1=1}^{2} \sum_{\nu_2=1}^{3} \sum_{\nu_3=1}^{2} a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} a_{3\nu_3} \\
&= \sum_{\nu_1=1}^{2} \sum_{\nu_2=1}^{3} \sum_{\nu_3=1}^{2} \prod_{i=1}^{3} a_{i\nu_i} \\
&= \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \sum_{\nu_3=1}^{n_3} \prod_{i=1}^{m} a_{i\nu_i}.
\end{aligned}$$

(b) Mamy:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m} \sum_{\nu_i=1}^{n_i} a_{i\nu_i} &= \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{1\nu_1}\right) \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} a_{2\nu_2}\right) ... \left(\sum_{\nu_m=1}^{n_m} a_{m\nu_m}\right) \\
&= (a_{11}+a_{12}+...+a_{1n_1})(a_{21}+a_{22}+...+a_{2n_2})...(a_{m1}+a_{m2}+...+a_{mn_m}) \\
&= a_{11}a_{21}...a_{m1}+a_{11}a_{21}...a_{m2}+...+a_{11}a_{21}...a_{mn_m}+...+a_{1n_1}a_{2n_2}...a_{mn_m} \\
&= \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} ... \sum_{\nu_m=1}^{n_m} a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} ... a_{m\nu_m} \\
&= \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} ... \sum_{\nu_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i\nu_i}.
\end{aligned}$$

Uwagi i komentarze:

1. Celem zadania 3.18(a) jest przeprowadzenie pełnych obliczeń w szczególnym przypadku, aby lepiej poznać schemat rozumowania i zapisu symbolicznego w ogólnym przypadku przedstawionym w zadaniu 3.18(b).

2. Warto przed analizą rozwiązania zadania 3.18(b) samodzielnie, wzorując się na rozwiązaniu zadania 3.18(a), przeprowadzić obliczenia w innym szczególnym przypadku.

Przy analizie własności zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni $\mathcal{R}^m$ wykorzystuje się specjalne przedziały o końcach wymiernych (zob. np. Kołodziej, 2010). Definicja i podstawowe własności tych przedziałów są treścią następnego zadania.

Zadanie 3.19
Dla każdej liczby naturalnej k oznaczamy przez B_k zbiór wszystkich przedziałów P postaci:

$$\left[\frac{i_1-1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{i_2-1}{2^k}, \frac{i_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m-1}{2^k}, \frac{i_m}{2^k}\right),$$

gdzie $i_1, i_2, ..., i_m$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Udowodnić, że:

(a) *zbiory B_k są przeliczalne;*

(b) *średnicą każdego przedziału $P \in B_k$ jest liczba $\frac{\sqrt{m}}{2^k}$;*

(c) *dla każdego k jest $\bigcup_{P\in B_k} P = \mathcal{R}^m$;*

(d) *jeżeli $P, P' \in B_k$ i $P \cap P' \neq \emptyset$, to $P = P'$;*

(e) *jeżeli $P \in B_k$, $P' \in B_{k'}$, $k < k'$ i $P \cap P' \neq \emptyset$, to $P \subseteq P'$.*

Rozwiązanie. (a) Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Uzasadnimy, że B_k jest zbiorem przeliczalnym. Rozważmy funkcję $F : \mathcal{Z}^m \longrightarrow B_k$ określoną następująco:

$$F((i_1, i_2, ..., i_m)) = \left[\frac{i_1-1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{i_2-1}{2^k}, \frac{i_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m-1}{2^k}, \frac{i_m}{2^k}\right)$$

dla $(i_1, i_2, ..., i_m) \in \mathcal{Z}^m$. Łatwo sprawdzić, że funkcja F jest bijekcją zbioru $\mathcal{Z}^m$ na zbiór B_k (zob. równoważność (b) w zadaniu 2.9), a więc zbiór B_k jest przeliczalny.

(b) Z zadania 3.13 wynika, że:

$$\mathrm{diam}P = \sqrt{\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \sqrt{m\left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \frac{\sqrt{m}}{2^k}$$

dla każdego $P \in B_k$.

(c) Oczywiście $\bigcup_{P\in B_k} P \subseteq \mathcal{R}^m$. Niech $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathcal{R}^m$ i $l \in \{1, 2, ..., m\}$. Ponieważ $E(2^k a_l) \leqslant 2^k a_l < E(2^k a_l) + 1$, więc

$$\frac{E(2^k a_l)}{2^k} \leqslant a_l < \frac{E(2^k a_l) + 1}{2^k}$$

dla $l = 1, 2, ..., m$, gdzie $E(r)$ oznacza cechę liczby rzeczywistej r. Przyjmijmy, że $E(2^k a_l) = i_l - 1$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Wobec tego $\frac{i_l-1}{2^k} \leqslant a_l < \frac{i_l}{2^k}$, czyli $a_l \in [\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Zatem

$$a \in \left[\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{i_2 - 1}{2^k}, \frac{i_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m - 1}{2^k}, \frac{i_m}{2^k}\right),$$

co oznacza, że

$$\mathcal{R}^m \subseteq \bigcup_{P \in B_k} P.$$

(d) Niech

$$P = \left[\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{i_2 - 1}{2^k}, \frac{i_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m - 1}{2^k}, \frac{i_m}{2^k}\right),$$

$$P' = \left[\frac{j_1 - 1}{2^k}, \frac{j_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{j_2 - 1}{2^k}, \frac{j_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{j_m - 1}{2^k}, \frac{j_m}{2^k}\right).$$

Z założenia wynika, że istnieje $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in P \cap P'$. Wobec tego $\frac{i_l-1}{2^k} \leqslant a_l < \frac{i_l}{2^k}$ oraz $\frac{j_l-1}{2^k} \leqslant a_l < \frac{j_l}{2^k}$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Stąd $i_l - 1 \leqslant 2^k a_l < i_l$ oraz $j_l - 1 \leqslant 2^k a_l < j_l$, czyli $i_l = j_l$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Zatem $P = P'$.

(e) Niech

$$P = \left[\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \left[\frac{i_2 - 1}{2^k}, \frac{i_2}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m - 1}{2^k}, \frac{i_m}{2^k}\right),$$

$$P' = \left[\frac{j_1 - 1}{2^{k'}}, \frac{j_1}{2^{k'}}\right) \times \left[\frac{j_2 - 1}{2^{k'}}, \frac{j_2}{2^{k'}}\right) \times ... \times \left[\frac{j_m - 1}{2^{k'}}, \frac{j_m}{2^{k'}}\right).$$

Z założenia wynika, że istnieje $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in P \cap P'$. Stąd $a_l \in [\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$ oraz $a_l \in [\frac{j_l-1}{2^{k'}}, \frac{j_l}{2^{k'}})$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Rozważmy silnie rosnący ciąg liczb:

$$\begin{aligned}
\frac{i_l - 1}{2^k} &= \frac{(i_l - 1)2^{k'-k}}{2^{k'}}, \\
\frac{i_l - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k'}} &= \frac{(i_l - 1)2^{k'-k}}{2^{k'}} + \frac{1}{2^{k'}} = \frac{(i_l - 1)2^{k'-k} + 1}{2^{k'}}, \\
&\vdots \\
\frac{i_l - 1}{2^k} + \frac{2^{k'-k}}{2^{k'}} &= \frac{(i_l - 1)2^{k'-k}}{2^{k'}} + \frac{2^{k'-k}}{2^{k'}} = \frac{i_l 2^{k'-k}}{2^{k'}} = \frac{i_l}{2^k}.
\end{aligned}$$

Powyższe liczby dzielą przedział $[\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$ o długości $\frac{1}{2^k}$ na $2^{k'-k}$ rozłącznych, lewostronnie domkniętych a prawostronnie otwartych podprzedziałów o długości $\frac{1}{2^{k'}}$. Ponieważ $a_l \in [\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$ oraz $a_l \in [\frac{j_l-1}{2^{k'}}, \frac{j_l}{2^{k'}})$, więc $[\frac{j_l-1}{2^{k'}}, \frac{j_l}{2^{k'}})$ jest jednym z powyższych przedziałów o długości $\frac{1}{2^{k'}}$ zawartym w przedziale $[\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$. Wobec tego $[\frac{j_l-1}{2^{k'}}, \frac{j_l}{2^{k'}}) \subseteq [\frac{i_l-1}{2^k}, \frac{i_l}{2^k})$ dla $l = 1, 2, ..., m$. Zatem $P' \subseteq P$ (zob. równoważność (a) w zadaniu 2.9).

Uwagi i komentarze:

1. Sformułować twierdzenia o zbiorach przeliczalnych, które zostały zastosowane w rozwiązaniu zadania 3.19(a).
2. Przeprowadzić szczegółowy dowód, że funkcja F określona w zadaniu 3.19(a) jest bijekcją.
3. Znaleźć w literaturze matematycznej twierdzenie o cesze liczb rzeczywistych, które zostało wykorzystane w rozwiązaniu zadania 3.19(c).

4. Podsumowanie

Przedstawiliśmy pewną koncepcję dydaktyczną wprowadzania studentów w niełatwą tematykę teorii miary. Mimo to, że sama definicja miary nie jest skomplikowana i ma swoje intuicyjne umotywowania w doświadczeniach studentów z wcześniejszych poziomów edukacji, to rozważania teoretyczne podczas dowodzenia różnych jej własności wymagają rozumienia i posługiwania się pojęciami i twierdzeniami z innych działów matematyki. Treści te poznają studenci na różnych etapach swych studiów, ale właśnie przy realizacji tego fragmentu wykładów z analizy matematycznej istnieje konieczność przypomnienia ich studentom, aby ułatwić im zrozumienie wykładanego materiału.

Uważamy, że w tym podsumowaniu warto przedstawić zwięzły zestaw pewnych działań dydaktycznych, które zaproponowaliśmy w tym artykule, aby zwrócić uwagę studentów na konieczność aktywnej pracy z tekstem matematycznym. Wszystkie niżej wymienione postulaty dydaktyczne są rezultatem analizy rozwiązań powyższych zadań, których kryteria doboru były wyłącznie merytorycznie związane z teorią miary.

Zadania podzieliliśmy na cztery grupy, biorąc pod uwagę sposób opisu ich rozwiązań:

– zadania z pełnymi wzorcowymi rozwiązaniami;
– zadania z zamieszczonym schematem rozwiązań;
– zadania ze wskazówkami do rozwiązań;
– zadania bez zamieszczonych rozwiązań i wskazówek.

Do większości zadań zostały dołączone tzw. uwagi i komentarze. Niżej opiszemy i usystematyzujemy treści tych uwag i komentarzy:

– Wskazać fragmenty rozwiązania zadania, w których stosuje się podane w komentarzach definicje i twierdzenia.
– Sformułować w sposób ścisły definicje i twierdzenia użyte w rozwiązaniu zadania, które w komentarzach podane są jedynie w formie uproszczonej.
– Sformułować definicje i twierdzenia wykorzystane w rozwiązaniu zadania na podstawie wskazanej literatury.
– Sformułować definicje i twierdzenia wykorzystane w rozwiązaniu zadania (bez wskazania w komentarzach literatury).

- Sformułować własności struktur liczbowych, które zostały użyte w rozwiązaniu zadania.
- Sformułować prawa logiczne wykorzystane w rozwiązaniu zadania.
- Wykonać graficzne ilustracje pewnych pojęć matematycznych występujących w zadaniu.
- Samodzielnie uzupełnić fragmenty rozumowań pominiętych w rozwiązaniu zadania.
- Po rozwiązaniu zadania (lub po analizie zamieszczonego rozwiązania) ustalić najbardziej istotne etapy rozwiązania tego zadania.
- W przypadku zadań o bardzo specyficznej i szczegółowej treści wskazać znaczenie danego zadania w wykładzie teorii miary.
- Zbadać istotność założeń przyjętych w zadaniu.
- Zaproponować rozwiązanie zadania z zastosowaniem bardziej zaawansowanych pojęć i twierdzeń z zakresu topologii i analizy matematycznej.
- Uogólnić treść zadania i podać jego rozwiązanie.
- Sformułować i rozwiązać zadanie analogiczne.

Tego typu zabiegi dydaktyczne wpisują się w zagadnienie jakości kształcenia studentów, które jest jednym z ważnych problemów współczesnych badań w zakresie dydaktyki matematyki (zob. np. Pardała, 2012). Temu celowi mają służyć również i nasze rozważania w tym artykule.

Literatura

Chronowski, A.: 2000, *Elementy teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków.

Chronowski, A.: 2004, *Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej*, Wydawnictwo Dla szkoły, Wilkowice.

Engelking, R., Sieklucki, K.: 1986, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa.

Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2008, *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogicka Fakulta, Ružomberok.

Kołodziej, W.: 2010, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa.

Krzyszkowski, J., Turdza, E.: 2005, *Elementy topologii*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków.

Major, J., Powązka, Z.: 2008, Utváranie pojmu obsah rovinného útvaru na rôznych stupňoch vzdelávania, *Acta Mathematica* **11**, 135-140.

Pardała, A.: 2012, Współczesne problemy i praktyka kształcenia matematycznego studentów, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 113-137.

Powązka, Z.: 2009, Uwagi o kształtowaniu rozumienia pojęcia miary na różnych poziomach edukacji, *Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, Współczesne problemy nauczania matematyki* **2**, 141-149.

Powązka, Z.: 2012, Z badań nad trudnościami studentów w rozumieniu pojęcia miary i całki, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 139 - 154.

Sikorski, R.: 1969, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@up.krakow.pl
e-mail: powazka@up.krakow.pl