FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Piotr Błaszczyk

O ciałach uporządkowanych*

Abstract. In this paper, we present some basic facts concerning ordered fields. We review definitions of an ordered field, give an example of a field that admits many orderings, and present equivalent definitions of the axiom of Archimedes and the continuity axiom. We show how to extend an ordered field by means of an ultrapower construction and formal power series.

1. Wstęp

W programie studiów matematycznych z pojęciem ciała uporządkowanego nie wiąże się jakiś ustalony zakres wiadomości, a ewentualne wzmianki ograniczają się zwykle do podania definicji. Samą definicję można zaś spotkać w kilku miejscach: w ramach kursu *Analizy matematycznej* w związku z pojęciem liczby rzeczywistej, na marginesie kursu *Algebry*, gdzieś w ćwiczeniach, przy okazji definicji grupy uporządkowanej, albo w ramach *Wstępu do matematyki*, w związku z zastosowaniem relacji równoważności do konstrukcji systemów liczbowych. Z drugiej strony fakty, które z punktu widzenia teorii ciał uporządkowanych mają charakter aksjomatów, w wykładach rachunku różniczkowego czy topologii przedstawiane są albo jako twierdzenia (np. twierdzenie Bolzano-Weierstassa), albo jako „oczywiste" własności (np. gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych). Zupełnie odrębną kwestią jest występujący w różnych, nawet zaawansowanych pracach, tajemniczy „naturalny" porządek liczb rzeczywistych. W teorii ciał uporządkowanych owa „naturalność" znajduje czysto matematyczne wytłumaczenie.

W matematyce szkolnej pojęcie ciała uporządkowanego w ogóle się nie pojawia, a wówczas podstawowe konsekwencje aksjomatów ciała uporządkowanego, takie jak nierówność trójkąta czy reguły znaków mają status raczej przykazań, niż twierdzeń.

W niniejszym artykule zbieramy podstawowe informacje o ciałach uporządkowanych. Mogą one, jak sądzimy, stanowić punkt wyjścia do wykładu monograficznego ukazującego związek między matematyką wyższą i szkolną, gdzie prawa arytmetyki liczb rzeczywistych są wyprowadzane z aksjomatów ciała uporządkowanego; mogą być przydatne jako wstęp do wykładów *Analiza niestandardowa*,

*On ordered fields

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 12J15, Secondary: 26E30, 03C20

Key words: ordered fields, Archimedean field, non-Archimedean field, continuity, hyperreals

Algebra rzeczywista (*real algebra*), czy wybranych zagadnień logiki matematycznej, na przykład w postaci kursu *Ciała i modele*[1]. Prezentowany materiał może też być rozwinięty do samodzielnego wykładu *Ciała uporządkowane*, a wówczas należałoby go rozszerzyć o definicje ciała pitagorejskiego i euklidesowego oraz ukazać związek tych pojęć z podstawami geometrii, początkowo bowiem teoria ciał uporządkowanych rozwijała się w powiązaniu z aksjomatyką geometrii elementarnej[2].

Większość przytaczanych twierdzeń podajemy bez dowodów; po odpowiednich wskazówkach, mogą być one dowodzone w ramach ćwiczeń ze studentami. W przypadkach mniej oczywistych wskazujemy odpowiednią literaturę. W artykule przedstawiamy też propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania przez studentów. Od strony rachunkowej, biorąc pod uwagę potrzebne sprawności matematyczne czy znajomość innych teorii, są to łatwe ćwiczenia. Wymagają jednak przełamania pewnej bariery psychologicznej. Trudność może polegać na tym, że dowodzone mają być prawa, które w czasie studiów i na wcześniejszych poziomach edukacji były przyjmowane jako oczywiste. Dla przykładu, każdy wie, że $1 > 0$, natomiast w jednym z ćwiczeń należy udowodnić, że $1 > 0$. W ćwiczeniu tym nie chodzi jednak o liczby naturalne, ale o elementy neutralne działań. Aby ułatwić spojrzenie na znane prawdy z perspektywy teorii ciał uporządkowanych, już na poziomie oznaczeń dopuszczamy się odstępstwa od zwyczaju i odróżniamy zbiór elementów ciała $\mathbb{F}$, zbiór uporządkowany $(\mathbb{F}, <)$, ciało algebraiczne $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ oraz samo ciało uporządkowane $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Może się to wydać zbędną pedanterią, zważywszy że w tradycyjnych kursach analizy matematycznej jeden i ten sam symbol $\mathbb{R}$ oznacza i zbiór liczb rzeczywistych, i zbiór uporządkowany liczb rzeczywistych, i ciało liczb rzeczywistych, i ciało uporządkowane liczb rzeczywistych. Przyjmujemy, że proponowane oznaczenia mają charakter dydaktyczny i sądzimy, że ten prosty zabieg notacyjny okaże się pomocny przy rozwiązywaniu ćwiczeń.

2. Definicje ciała uporządkowanego

Zaczniemy od definicji porządku liniowego, bo w teorii ciał uporządkowanych zwykle stosowana jest definicja różna od tej podawanej w ramach kursu *Wstęp do matematyki*.

DEFINICJA 1
Para $(X, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, gdy relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna.

DEFINICJA 2
Para $(X, <)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, gdy relacja $<$ jest przechodnia i spełnia prawo trychotomii, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$ spełniony jest dokładnie jeden ze składników alternatywy

$$x < y \vee x = y \vee x > y.$$

Przyjmując $x < y \Leftrightarrow_{df} (x \leqslant y \wedge x \neq y)$ pokazuje się, że gdy $(X, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym w myśl definicji 1, to $(X, <)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym w myśl definicji 2. Podobnie, przyjmując $x \leqslant y \Leftrightarrow_{df} (x < y \vee x = y)$

[1](zob. Goldblatt, 1998; Bochnak, Coste, Roy, 1998; Marker, 2002)

pokazuje się, że gdy $(X,<)$ jest liniowo uporządkowany w myśl definicji 2, to $(X,\leqslant)$ jest liniowo uporządkowany w myśl definicji 1. W tym sensie wyżej podane definicje są równoważne.

Przejdźmy do definicji ciała uporządkowanego i zacznijmy od historycznie pierwszej, tej najlepiej znanej i najczęściej powtarzanej.

Definicja 3
Układ $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1,<)$ nazywamy ciałem uporządkowanym, gdy $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ jest ciałem przemiennym, $(\mathbb{F},<)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, a porządek $<$ jest zgodny z działaniami, tzn.:

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c, \quad (a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c).$$

Definicja ta pochodzi od Davida Hilberta i została podana w roku 1899, w pierwszym wydaniu *Grundlagen der Geometrie*[3]. Pojęcie jest więc stosunkowo młode, jednakże jego geneza sięga Księgi V *Elementów* Euklidesa[4]. W roku 1900 Hilbert podał aksjomatyczną charakterystykę liczb rzeczywistych, a w roku 1901 Otto Hölder przedstawił obszerne studium poświęcone grupom uporządkowanym[5]. W definicji przyjętej przez Höldera nie występuje założenie o przemienności dodawania, dlatego warunek zgodności porządku z dodawaniem trzeba odpowiednio zmodyfikować. Hölder pokazał jednak, że grupa archimedesowa musi być przemienna. Hilbert, badając niezależność aksjomatów ciała uporządkowanego, doszedł do podobnego wyniku dotyczącego mnożenia. Pokazał, że w przypadku ciał archimedesowych przemienność mnożenia wynika z pozostałych aksjomatów. Ponadto skonstruował ciało nieprzemienne z porządkiem liniowym, który jest zgodny z dodawaniem i mnożeniem, co oznacza, że warunek przemienności występujący w definicji 3 nie wynika z pozostałych aksjomatów[6].

Definicja 4
Parę $(\mathbb{F},\mathbb{B})$ nazywamy ciałem uporządkowanym, gdy $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ jest ciałem przemiennym, a zbiór $\mathbb{B}$ ma następujące własności:

1. $0\notin\mathbb{B}$,
2. $\forall a\in\mathbb{F}\ [a\in\mathbb{B}\vee a=0\vee -a\in\mathbb{B}]$,
3. $\forall a,b\in\mathbb{B}\ [a+b\in\mathbb{B},\ a\cdot b\in\mathbb{B}]$,
   gdzie $-a$ to element przeciwny do a, tj. $a+(-a)=0$.

Pokazuje się, że jeśli $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1,<)$ jest ciałem uporządkowanym w myśl definicji 3, to zbiór $\mathbb{F}_{+} =_{df} \{a\in\mathbb{F}:\ a>0\}$ ma własności 1-3 podane w definicji 4. Podobnie, jeśli para $(\mathbb{F},\mathbb{B})$ jest ciałem uporządkowanym w myśl definicji 4, to $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1,<_B)$ jest ciałem uporządkowanym w myśl definicji 3, gdzie

$$a<_B b \Leftrightarrow_{df} b-a\in\mathbb{B}.$$

[3] (zob. Błaszczyk, 2012)
[4] (zob. Błaszczyk, 2007)
[5] (zob. Hilbert, 2012; Hölder, 1901)
[6] (zob. Hilbert, 1899, §§ 32-33)

W związku z tym o zbiorze spełniającym warunki definicji 4 mówimy, że wyznacza porządek zgodny z działaniami w ciele $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$.

Jeżeli istnieją zbiory $\mathbb{B},\mathbb{B}'\subset\mathbb{F}$ spełniające warunki definicji 4, a zarazem $\mathbb{B}\neq\mathbb{B}'$, to znaczy, że istnieją dwa różne porządki zgodne z działaniami w ciele $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$.

Definicja 4 została podana w roku 1926 w pracy Emila Artina i Otto Schreiera i jest związana z teorią ciał rzeczywiście domkniętych[7]. Jest ona przydatna na przykład wtedy, gdy chcemy zdefiniować porządek zgodny z działaniami w danym ciele. Podajmy przykład. Niech dane będzie ciało przemienne $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ spełniające warunki:

(1) dla każdego skończonego zbioru elementów $\{a_1,...,a_n\}\subset\mathbb{F}$, zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0\Rightarrow a_1=...=a_n=0,$$

(2) „każdy element jest kwadratem", tj.

$$\forall a\in\mathbb{F}\,\exists b\in\mathbb{F}[(a=b^2)\vee(-a=b^2)].$$

Wówczas zbiór $\mathbb{B}=\{a^2\,|\,a\in\mathbb{F},a\neq0\}$ wyznacza porządek zgodny z działaniami. Co więcej, jest to jedyny porządek zgodny z działaniami w $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$, tzn. gdy $\mathbb{B}'$ jest zbiorem spełniającym warunki definicji 4, to $\mathbb{B}=\mathbb{B}'$.

Dodajmy do (1) i (2) jeszcze jeden warunek:

(3) każdy wielomian $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ nieparzystego stopnia ma pierwiastek należący do $\mathbb{F}$.

Ciała spełniające warunek (1) nazywane są formalnie rzeczywistymi. Ciała spełniające warunki (1)-(3) nazywane są rzeczywiście domkniętymi (real-closed).

Definicja 5

Układ $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1,\leqslant)$ nazywamy ciałem uporządkowanym, gdy $(\mathbb{F},+,\cdot,0,1)$ jest ciałem przemiennym, $(\mathbb{F},\leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, a porządek $\leqslant$ jest zgodny z działaniami, tzn.:

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a+c\leqslant b+c,\quad (a\leqslant b\wedge 0\leqslant c\Rightarrow a\cdot c\leqslant b\cdot c).$$

Taką definicję znajdujemy w książce Johna Conwaya *On Numbers and Games*[8]. W stworzonym przez niego systemie ***No*** łatwiej jest operować nierównościami „nieostrymi" niż „ostrymi" i stąd powyższa modyfikacja[9].

Można pokazać, że te trzy definicje ciała uporządkowanego są równoważne.

Przyjmijmy definicję

$$n1=_{df}\underbrace{1+1+...+1}_{n-razy}.$$

[7](zob. Artin, Schreier, 1926)

[8](zob. Conway, 2001)

[9]***No*** to wyjątkowo duże „ciało" uporządkowane. Jego uniwersum stanowi nie zbiór, a klasa właściwa, dlatego nie jest to ciało w myśl żadnej z wyżej podanych definicji. Do uniwersum ***No*** należą m.in. wszystkie liczby porządkowe.

Zamiast $n1$ będziemy też pisać po prostu n. Ponadto

$$\frac{1}{n} =_{df} n^{-1}, \quad \frac{n}{m} =_{df} nm^{-1}.$$

Zatem elementami każdego ciała uporządkowanego są ułamki. Zbiór wszystkich ułamków ma postać

$$\Big\{-\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \{0\} \cup \Big\{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Dla uproszczenia zapisów zbiór ten będziemy oznaczać tak samo jak zbiór liczb wymiernych, tj. jako $\mathbb{Q}$.

3. Podstawowe własności

Z aksjomatów ciała uporządkowanego można wyprowadzić wiele własności powszechnie stosowanych czy to w analizie matematycznej, czy w matematyce szkolnej, przy czym w analizie i matematyce szkolnej są one zwykle traktowane jako własności liczb rzeczywistych, a nie jako konsekwencje aksjomatów ciała uporządkowanego. Podamy kilka przykładów.

Twierdzenie
Jeśli $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *jest ciałem uporządkowanym, to spełnione są następujące warunki:*

W1 $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$,

W2 $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$,

W3 $1 > 0$,

W4 $n > 0$,

W5 $a > b > 0 \Rightarrow 0 < a^{-1} < b^{-1}$,

W6 $a > b \Rightarrow a > \frac{1}{2}(a+b) > b$,

W7 $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0, \quad a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$.

Z (W1)-(W3) wynika, że nie istnieje porządek liniowy na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ zgodny z działaniami w ciele liczb zespolonych $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$. Z (W4) – że ciało uporządkowane jest charakterystyki zero. Z (W6) – że porządek w ciele uporządkowanym jest gęsty. (W7) to tak zwane reguły znaków.

Z (W3)-(W5) wynika, że istnieje tylko jeden porządek zgodny z działaniami w ciele ułamków. Wiedząc, że w każdym ciele uporządkowanym zawarte jest ciało ułamków $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$, a każde dwa takie ciała ułamków są izomorficzne, możemy przyjąć definicję

Definicja 6
Ciało liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ to najmniejsze ciało uporządkowane[10].

[10]Liczby Conwaya, czy inaczej system ***No***, to z kolei największe „ciało" uporządkowane – największe w tym sensie, że każde ciało uporządkowane można w nim zanurzyć (zob. Ehrlich, 2012).

„Najmniejsze” oznacza, że w każdym ciele uporządkowanym istnieje ciało izomorficzne z ciałem liczb wymiernych.

W ciele uporządkowanym definiowana jest wartość bezwzględna:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{dla } a < 0. \end{cases}$$

Pokazuje się, że zachodzą zależności:

$$|a| = |-a|, \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |ab| = |a||b|, \quad ||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

W związku z oczywistością tych praw pouczające może być następujące proste ćwiczenie. Niech $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem liczb zespolonych. Na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ wprowadzamy porządek leksykograficzny $\prec$. Pokazuje się, że jest to porządek zgodny z dodawaniem, ale niezgodny z mnożeniem. W strukturze $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \prec)$ można postawić definicję wartości bezwzględnej (zauważmy, że w definicji korzystamy jedynie z operacji $-a$ oraz spójności porządku), można udowodnić nierówność trójkąta, ale jednocześnie można wskazać takie liczby $a, b \in \mathbb{C}$, że $|ab| \neq |a||b|$. Mamy bowiem, $i \succ 0$, stąd $|i| \cdot |i| = i^2$, a z drugiej strony $|i^2| = 1$. W istocie w ćwiczeniu tym pokazujemy, że aksjomat zgodności porządku z mnożeniem nie wynika z pozostałych aksjomatów ciała uporządkowanego.

Dzięki pojęciu wartości bezwzględnej w znany sposób definiujemy ciąg Cauchy'ego oraz granicę ciągu:

Ciąg (a_n) elementów z $\mathbb{F}$ jest ciągiem Cauchy'ego wtw, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall m [k < m \Rightarrow |a_k - a_m| < \varepsilon].$$

Element $a \in \mathbb{F}$ jest granicą ciągu $(a_n) \subset \mathbb{F}$ wtw, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall m [k < m \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon].$$

Pojęcie ciągu Cauchy'ego jest zazwyczaj przenoszone z ciała liczb rzeczywistych na dowolną przestrzeń metryczną w ten sposób, że w miejsce $|a_n - a_m|$ wprowadzana jest odległość $\varrho(a_n, a_m)$. W powyższej definicji jest ono w naturalny sposób definiowane w dowolnym ciele uporządkowanym, a w klasie ciał niearchimedesowych wartość bezwzględna nie wyznacza metryki.

Pokazuje się, że (1) ciąg Cauchy'ego jest ciągiem ograniczonym, (2) suma, iloczyn, iloraz (przy odpowiednich założeniach) ciągów Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego, (3) ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę, (4) gdy $(a_n), (b_n)$ są ciągami Cauchy'ego oraz $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$, to $(a_n + b_n) \to a + b$, $(a_n b_n) \to ab$, $(a_n / b_n) \to a/b$, gdy $b \neq 0$. Dowody tych twierdzeń są takie same jak te znane z kursu analizy matematycznej.

Dodając do aksjomatów ciała uporządkowanego kolejne aksjomaty, np. aksjomat Archimedesa czy aksjomat ciągłości, można wykazywać zbieżność pewnych konkretnych ciągów, np. $(\frac{1}{n})$ czy $(1 + \frac{1}{n})^n$.

4. Porządki zgodne z działaniami

Wyżej wspomnieliśmy, że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Można też pokazać (korzystając z uwag następujących po definicji 4), że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Fakt ten pozwala mówić o „naturalnym" porządku liczb rzeczywistych. Nie jest jednak tak, że w każdym ciele istnieje co najwyżej jeden porządek zgodny z działaniami. Zilustrujemy to dwoma przykładami.

Niech $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym, gdzie $<$ jest „naturalnym" porządkiem w ciele $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ zacieśnionym do zbioru $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. W zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ definiujemy nowy porządek

$$a + b\sqrt{2} \prec c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow_{df} a - b\sqrt{2} < c - d\sqrt{2}.$$

Łatwo można pokazać, że $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1, \prec)$ jest ciałem uporządkowanym oraz, że porządek $<$ jest różny od $\prec$.

W ciele $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1)$, tak jak w każdym innym ciele, zbiór $\mathbb{Q}$ może być uporządkowany tylko w jeden sposób. Rozszerzając ciało ułamków możemy przyjąć, że $\sqrt{2}$ jest albo większy, albo mniejszy od 0, to zaś już jednoznacznie wyznacza porządek na zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Przyjmijmy bowiem, że porządki $\prec_1$, $\prec_2$ są różne, a zarazem $0 \prec_1 \sqrt{2}$ oraz $0 \prec_2 \sqrt{2}$. Wówczas, dla pewnych $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ zachodzi:

$$a + b\sqrt{2} \prec_1 0, \quad 0 \prec_2 a + b\sqrt{2}.$$

Przyjmijmy, że $a^2 < 2b^2$, gdzie $<$ jest (tym jedynym) porządkiem w ciele liczb wymiernych. Z faktu, że ułamki są zawarte w każdym ciele i w każdym ciele są uporządkowane w jeden i ten sam sposób otrzymujemy:

$$0 \prec_1 2b^2 - a^2, \quad 0 \prec_2 2b^2 - a^2.$$

Przyjmując rozkład $2b^2 - a^2 = (b\sqrt{2} - a)(b\sqrt{2} + a)$ i posługując się regułami (W7) doprowadzimy do sprzeczności z założeniem.

Zatem „naturalny" porządek oraz wyżej zdefiniowany porządek $\prec$ to jedyne porządki liniowe zgodne z działaniami w ciele $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1)$.

Przejdźmy do drugiego przykładu. Niech $c \in \mathbb{R}$ będzie liczbą przestępną. W ciele ułamków pierścienia wielomianów $\mathbb{Q}[x]$ wprowadzamy porządek następującą definicją:

$$\frac{f}{g} \prec_c \frac{h}{k} \;\Leftrightarrow_{df}\; \frac{f}{g}(c) < \frac{h}{k}(c),$$

gdzie $\frac{f}{g}(c) < \frac{h}{k}(c)$ to nierówność w ciele liczb rzeczywistych[11].

Korzystając z tego, że porządek liczb rzeczywistych jest zgodny z działaniami, przekształcamy nierówności, w których występują liczby $\frac{f}{g}(c)$, gdzie $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, i pokazujemy, że porządek $\prec_c$ jest zgodny z działaniami w ciele ułamków pierścienia $\mathbb{Q}[x]$.

Niech teraz c_1, c_2 będą różnymi liczbami przestępnymi i niech q będzie taką liczbą wymierną, że zachodzą nierówności $c_1 < q < c_2$[12]. Wówczas wielomian $x - q$ spełnia nierówności

$$x - q \prec_{c_1} 0, \quad 0 \prec_{c_2} x - q,$$

[11] Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na dwuznaczność symbolu $\frac{f}{g}$: z lewej strony znaku definicji oznacza on element ciała ułamków, z prawej – funkcję rzeczywistą.

[12] Zob. niżej §4 aksjomat (A5) oraz §5 aksjomat (C4) lub (C5).

co oznacza, że porządki $\prec_{c_1}, \prec_{c_2}$ są różne.

Tym sposobem otrzymujemy przykład takiego ciała, w którym istnieje continuum porządków liniowych zgodnych z działaniami w tym ciele.

5. Aksjomat Archimedesa

Definicja 7
Ciało uporządkowane $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ nazywamy archimedesowym, jeżeli spełniony jest warunek (aksjomat Archimedesa):

$$\forall a, b \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{N}[(0 < a < b) \Rightarrow na > b].$$

Aksjomat Archimedesa można wyrazić na kilka sposobów. W związku z tym podajmy twierdzenie

Twierdzenie
Jeśli $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *jest ciałem uporządkowanym, to następujące warunki są równoważne:*

A1 $\forall a, b \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{N}[(0 < a < b) \Rightarrow na > b]$.

A2 $\forall a \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{N}\ [n > a]$.

A3 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

A4 $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

A5 *Zbiór ułamków* $\mathbb{Q}$ *jest gęsty w* $(\mathbb{F}, <)$*, tzn.*

$$\forall x, y \in \mathbb{F}\ \exists q \in \mathbb{Q}[x < y \Rightarrow x < q < y].$$

A6 *Dla dowolnego przekroju Dedekinda* (A, B) *zbioru* $(\mathbb{F}, <)$ *zachodzi*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a \in A\ \exists b \in B\big[b - a < 1/n\big].$$

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny, ale wskazane jest, aby najpierw wykazać równoważność warunków (A1)-(A4), a dopiero później przejść do (A5) i (A6). Pokażmy dla przykładu, jak wykazać (A5), w przypadku gdy $0 < x < y$. Otóż z (A3) wynika, że dla pewnej liczby naturalnej k zachodzi $\frac{1}{k} < \min\{x, y - x\}$. Na mocy (A1) istnieje taka liczba n, że $y < \frac{n}{2k}$. Przyjmijmy $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} |\ y \leqslant \frac{n}{2k}\}$. Wówczas: $x < \frac{(n_0 - 1)}{2k} < y$.

W dowodzie tym korzystamy z zasady indukcji matematycznej pod postacią zasady minimum: W każdym niepustym podzbiorze zbioru $\mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy. W kursie analizy matematycznej zasada ta jest stosowana, ale rzadko jest wprost formułowana. Świadomość tego faktu jest natomiast istotna w teoriach sformalizowanych, gdzie zdefiniowany jest język teorii, na przykład w analizie niestandardowej. Niestandardowe liczby rzeczywiste są ciałem niearchimedesowym, ale gdy dopuścimy, że zmienna n przebiega zbiór niestandardowych liczb naturalnych, to w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych spełniony jest i aksjomat (A1), i aksjomat (A2)[13].

Na uwagę zasługuje warunek (A5), często przyjmowany jako „oczywista" własność liczb rzeczywistych. W istocie jest to konsekwencja aksjomatu ciągłości. Wart komentarza jest też warunek (A3). Otóż w książce Kazimierza Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy* podana jest konstrukcja liczb rzeczywistych oraz ich charakterystyka aksjomatyczna. Nie ma natomiast wzmianki o tym, że liczby rzeczywiste są ciałem archimedesowym, że na przykład z zasady supremum wynika aksjomat Archimedesa. Warunek (A3) jest dowodzony, ale w dowodzie wykorzystywany jest, jako własność oczywista, warunek (A2)[14]. Z kolei w książce Franciszka Lei *Rachunek różniczkowy i całkowy* aksjomat Archimedesa w wersji (A2) podany jest jako oczywista własność liczb rzeczywistych, natomiast „w oparciu o tę zasadę" – jak pisze Leja – dowodzone są warunki (A5) i (A6), jednocześnie jednak w dowodach tych liczby wymierne są porównywane z przekrojami liczb wymiernych z uwagi na relację $<$, przez co zatraca się ideę liczby rzeczywistej jako przekroju liczb wymiernych[15].

6. Aksjomat ciągłości

TWIERDZENIE

Jeśli $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *jest ciałem uporządkowanym, to następujące warunki są równoważne*[16]*:*

(C1) *Żaden przekrój Dedekinda zbioru* $(\mathbb{F}, <)$ *nie wyznacza luki.*

(C2) *Dla dowolnego, niepustego zbioru* $A \subset \mathbb{F}$ *ograniczonego z góry istnieje taka liczba* $a \in \mathbb{F}$, *że* $a = \sup A$.

(C3) *Dla dowolnego, niepustego zbioru* $A \subset \mathbb{F}$ *ograniczonego z dołu istnieje taka liczba* $a \in \mathbb{F}$ *taka, że* $a = \inf A$.

(C4) $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *jest ciałem archimedesowym oraz dla dowolnego ciągu* $(x_n) \subset \mathbb{F}$ *spełniającego warunek Cauchy'ego istnieje takie* $a \in \mathbb{F}$, *że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(C5) $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *jest ciałem archimedesowym oraz jeśli* $\{A_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{F}$ *jest rodziną przedziałów domkniętych takich, że dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $A_{n+1} \subset A_n$, *to* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(C6) *Jeśli* $A \subset \mathbb{F}$ *jest zbiorem ograniczonym i domkniętym oraz rodzina* $\mathcal{K}$ *przedziałów otwartych jest pokryciem* A, *to z* $\mathcal{K}$ *można wybrać podpokrycie skończone.*

---

[13] (zob. niżej §7 oraz Błaszczyk, 2007, s. 182)

[14] (zob. Kuratowski, 1971, s. 20)

[15] (zob. Leja, 1979, s. 17-18)

[16] (zob. Cohen, Ehrlich, 1963, s. 95-101)

(C7) *Dla dowolnego ograniczonego, nieskończonego zbioru* $A \subset \mathbb{F}$ *istnieje taki punkt* $p \in \mathbb{F}$*, że* p *jest punktem skupienia* A[17].

Każdy z warunków (C1)-(C7) nazywany jest aksjomatem ciągłości. Aksjomat ciągłości jest charakterystyką porządku i w związku z tym wprowadzane jest pojęcie ciała uporządkowanego w sposób ciągły.

Definicja 8
Ciało uporządkowane spełniające warunek (C1) nazywamy ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

Twierdzenie
Każde dwa ciała uporządkowane w sposób ciągły są izomorficzne[18].

Twierdzenie to uzasadnia następującą definicję

Definicja 9
Ciało liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ to ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Aksjomat ciągłości w wersji (C4) oraz (C5) jest koniunkcją dwóch warunków, w związku z tym pokazuje się, że istnieją ciała niearchimedesowe, w których każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę oraz takie ciała niearchimedesowe, w których każdy zstępujący ciąg przedziałów domkniętych ma niepuste przecięcie. Odpowiednie przykłady podamy niżej, w kolejnych paragrafach.

Z warunków (C4), (C5) wynika, że ciało liczb rzeczywistych jest archimedesowe.

Twierdzenie
Każde ciało archimedesowe jest izomorficzne z pewnym podciałem ciała $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$[19].

Wobec tego twierdzenia ciało liczb rzeczywistych uznajemy za największe ciało archimedesowe. Stąd wynika także, że każde rozszerzenie ciała liczb rzeczywistych jest ciałem niearchimedesowym. Można jednak podać przykład ciała niearchimedesowego, które nie jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych.

Odrębną kwestią, której nie podejmujemy w niniejszym artykule, jest konstrukcja liczb rzeczywistych, czyli tak zwany dowód istnienia ciała uporządkowanego w sposób ciągły. Monograficzne ujęcia analizy matematycznej często zaczynają się właśnie od konstrukcji, czy to metodą przekrojów Dedekinda, czy za pomocą ciągów Cauchy'ego[20]. Takie podejście jest niezwykle żmudne, zajmuje kilkadziesiąt stron i jest zbyt trudne, by rozpoczynać od niego wykład akademicki. Konstrukcja liczb rzeczywistych staje się dużo bardziej zrozumiała i łatwiejsza do przedstawienia, gdy dysponujemy już wiadomościami podanymi w paragrafach 1-5.

[17] Pojęcia topologiczne występujące w aksjomatach (C6) i (C7) związane są z topologią porządkową.
[18] (zob. Cohen, Ehrlich, 1963, s. 103)
[19] (zob. Cohen, Ehrlich, 1963, s. 102; Hartshorne, 2000, s. 139)
[20] (zob. np. Fichtenholtz, 1985; Maurin, 1991)

Zamykając tę część artykułu zauważmy jeszcze, że warunek (C1) nie zawiera pojęć algebraicznych, dlatego można potraktować go jako charakterystykę zbioru liniowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$. W związku z faktem, że aksjomat ciągłości w sposób jednoznaczny charakteryzuje ciało liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, warto przywołać twierdzenie o jednoznacznej charakterystyce samego porządku liczb rzeczywistych, tj. $(\mathbb{R}, <)$, które zazwyczaj jest podawane w ramach teorii zbiorów liniowo uporządkowanych.

Definicja 10
Zbiór liniowo uporządkowany $(X, \leqslant)$ ma typ porządkowy λ, gdy (1) spełniony jest warunek (C1), (2) istnieje taki zbiór przeliczalny $Y \subset X$, który jest gęsty w X, (3) w zbiorze $(X, \leqslant)$ nie ma elementu najmniejszego i największego[21].

Twierdzenie
Każde dwa zbiory typu λ są izomorficzne[22].

Można pokazać, że istnieją zbiory liniowo uporządkowane $(X_1, \leqslant_1)$, $(X_2, \leqslant_2)$, które spełniają warunek (C1), a nie są izomorficzne[23]. Przykład ten pokazuje, że ośrodkowość porządku jest niezależna od własności (C1). Gdy natomiast rozważane jest ciało uporządkowane $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$, to z aksjomatu (C1) wynika (A5) i ułamki pełnią rolę zbioru Y występującego w definicji 9.

7. Rozszerzenia. Szeregi formalne Laurenta

Podamy teraz dwa sposoby rozszerzenia dowolnego ciała uporządkowanego. Pierwszy polega na tworzeniu szeregów formalnych Laurenta[24], drugi to rozszerzenia za pomocą ultrapotęgi.

Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym. Definiujmy zbiór szeregów formalnych

$$\mathbb{L} =_{df} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} a_j x^j \ : \ a_j \in \mathbb{F}, j, t \in \mathbb{Z}, \ \exists t \, \forall j \ \left[j < t \ \Rightarrow \ (a_j = 0, \ a_t \neq 0) \right] \right\}.$$

Elementami zbioru $\mathbb{L}$ są więc wyrażenia postaci

$$... + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \ ,$$

w których jest tylko skończenie wiele składników $a_{-j}x^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Szeregi formalne mają zatem postać

$$a_{-t}x^{-t} + ... + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \ , \qquad \text{dla pewnego} \ \ t \in \mathbb{N}.$$

[21] Zbiór Y jest gęsty w X, gdy $\forall x, y \in X \exists z \in Y [x < y \to x < z < y]$. Warunek (2) nazywany jest ośrodkowością.
[22] (zob. Kuratowski, Mastowski, 1978, s. 218)
[23] (zob. Błaszczyk, 2007, s. 18-19)
[24] (zob. Błaszczyk, 2007, s. 269-275)

Równość w zbiorze $\mathbb{L}$ definiujemy w następujący sposób

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_j x^j = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_j x^j \quad \Leftrightarrow_{df} \; \forall j \in \mathbb{Z} \; [a_j = b_j] \, .$$

Dla uproszczenia notacji dalej niech $\sum a_j x^j$ oznacza szereg $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_j x^j$. W zbiorze $\mathbb{L}$ zdefiniujmy działania:

$$\sum a_j x^j \oplus \sum b_j x^j =_{df} \sum c_j x^j, \text{ gdzie } c_j = a_j + b_j,$$

$$\left(\sum a_j x^j\right) \odot \left(\sum b_j x^j\right) =_{df} \sum c_j x^j, \text{ gdzie } c_j = \sum_{k+l=j} a_k b_l.$$

Dodawanie polega więc na dodawaniu „po współrzędnych", natomiast mnożenie jest definiowane podobnie jak mnożenie szeregów w klasycznej analizie.

Ponadto przyjmujemy

$$\sum a_j x^j = 0 \;\; \Leftrightarrow_{df} \;\; \forall j \in \mathbb{Z} \; [a_j = 0] \, ,$$

$$\sum a_j x^j = 1 \;\; \Leftrightarrow_{df} \;\; [a_0 = 1, \; \forall j \neq 0 \; (a_j = 0)].$$

Podobnie jak 0 oraz 1, wszystkie elementy z $\mathbb{F}$ możemy przedstawić w postaci szeregów formalnych, mianowicie

$$\sum a_j x^j = a \;\; \Leftrightarrow_{df} \;\; [a_0 = a, \; \forall j \neq 0 \; (a_j = 0)].$$

Tym sposobem możemy zanurzyć $\mathbb{F}$ w zbiorze $\mathbb{L}$.

Pokazuje się, że struktura $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, 0, 1)$ jest ciałem przemiennym. I tak na przykład elementem odwrotnym do $1 + x$ jest szereg $1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum\limits_{j=0} (-1)^j x^j$.

W zbiorze $\mathbb{L}$ definiujmy porządek:

$$\sum a_j x^j \prec \sum b_j x^j \;\; \Leftrightarrow_{df} \;\; \exists t \, \forall j \; [j < t \; \Rightarrow \; (a_j = b_j, \; a_t < b_t)] \, .$$

Można pokazać, że zachodzą nierówności

$$0 \prec x^n \prec x \prec \sum_{j=1}^{\infty} x^j \prec \frac{1}{n} \prec m \prec x^{-k}, \quad \text{dla każdego } k, n, m \in \mathbb{N}, \; n > 1. \qquad (*)$$

Inaczej i opisowo, szeregi formalne Laurenta to „ciągi" wyrazów z $\mathbb{F}$ określone na podzbiorach $\mathbb{Z}$ typu ω. Przy tej interpretacji porządek $\prec$ to porządek leksykograficzny.

Przyjmując, że elementy zbioru $\mathbb{F}$ identyfikujemy z odpowiednimi szeregami, ciało $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, 0, 1, \prec)$ jest rozszerzeniem $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Ciało $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, 0, 1, \prec)$ jest niearchimedesowe, co można prześledzić na każdej z wersji (A1)-(A6). Fakt, iż nie zachodzą warunki (A1)-(A4), wynika wprost z zależności $nx \prec 1$. Następnie z (*) dostajemy, że między elementami 0 oraz x nie leży żaden ułamek m/n. Przyjmując

$$A = \{f \in \mathbb{L} |\ \exists n \in \mathbb{N}[f \prec n]\}, \quad B = \mathbb{L} \setminus A$$

dostajemy, że para (A, B) jest przekrojem Dedekinda i dla każdego $a \in A$ oraz każdego $b \in B$ jest $b - a > 1$.

W ciele $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, 0, 1, \prec)$ ciąg $(\frac{1}{n})$ nie jest zbieżny do zera, natomiast istnieją ciągi zbieżne do zera, na przykład zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0.$$

Ciekawą własnością związaną z aksjomatem (C4) jest fakt, że w ciele szeregów formalnych Laurenta można wskazać ciąg zstępujących przedziałów domkniętych, który ma puste przecięcie[25]. Ciekawą własnością związaną z aksjomatem (C5) jest fakt, że ciało szeregów formalnych Laurenta $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, 0, 1, \prec)$ jest zupełne w sensie Cauchy'ego[26].

Szeregi Laurenta są tylko szczególnym przypadkiem ogólniejszej konstrukcji, jaką pod koniec XIX wieku przedstawił Tulio Levi-Civita. Aby ją zaprezentować przyjmijmy, że $\mathcal{F}$ jest rodziną takich podzbiorów M zbioru $\mathbb{Q}$, że dla każdej liczby $q \in \mathbb{Q}$ tylko skończenie wiele elementów M jest mniejszych od q, tzn.

$$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow_{df} (\forall q \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{N})[\{m \in M: \ m < q\} \sim n],$$

gdzie $A \sim n$ oznacza, że zbiór A ma n elementów.

Elementami ciała Levi-Civity są takie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$, że $\{q \in \mathbb{Q}: \ f(q) \neq 0\} \in \mathcal{F}$. Można je przedstawić w postaci szeregów formalnych

$$\sum_{q \in M} r_q x^q,$$

gdzie $M \in \mathcal{F}$. Działania i porządek definiowane są podobnie jak w ciele szeregów Laurenta. W rezultacie powstaje ciało niearchimedesowe, które jest rzeczywiście domknięte oraz zupełne w sensie Cauchy'ego[27].

8. Rozszerzenia. Ultrapotęga

Podamy teraz drugi sposób rozszerzania ciała uporządkowanego.

Definicja 11
Filtrem na zbiorze $\mathbb{N}$ nazywamy rodzinę $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ spełniającą warunki:

(1) $\forall A, B \subset \mathbb{N}\ [A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F]$,

[25] (zob. Cohen, Ehrlich, 1963, s. 101)
[26] (zob. Błaszczyk, 2007, s. 270-272)
[27] (zob. Shamseddine, Berz, 2010)

(2) $\forall A, B \subset \mathbb{N}\ [A \in F \wedge A \subset B \Rightarrow B \in F]$,

(3) $\emptyset \notin F$.

Jeśli ponadto spełniony jest warunek

(4) $\forall A \subset \mathbb{N}[A \in F \vee (\mathbb{N} \setminus A) \in F]$,

to F nazywamy ultrafiltrem na $\mathbb{N}$.

Dla konstrukcji, którą przedstawimy niżej, istotne jest następujące twierdzenie

Twierdzenie
Jeśli F jest ultrafiltrem, a zbiory $A_1, ...A_n$ należą do F oraz są parami rozłączne, to zachodzi

$$A_1 \cup ... \cup A_n \in F \Rightarrow \exists! i[A_i \in F].$$

Pokazuje się, że rodzina

$$F =_{df} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) |\ \mathbb{N} \backslash A \text{ jest zbiorem skończonym}\}$$

jest filtrem. Filtr ten nazywany jest filtrem Frecheta.

Pouczającym ćwiczeniem na zastosowanie lematu Kuratowskiego-Zorna jest dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie
Każdy filtr jest zawarty w pewnym ultrafiltrze[28].

Niech teraz $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym. W zbiorze ciągów $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację

$$(a_n) \equiv (b_n) \Leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Pokazuje się, że jest to relacja równoważności. Przyjmijmy $\mathbb{F}^* =_{df} \mathbb{F}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$.

W zbiorze $\mathbb{F}^*$ definiujemy działania oraz porządek

$$[(a_n)] \oplus [(b_n)] =_{df} [(a_n + b_n)], \quad [(a_n)] \odot [(b_n)] =_{df} [(a_n \cdot b_n)],$$

$$[(a_n)] \prec [(b_n)] \Leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Dla $a \in \mathbb{F}$ przyjmujemy $a^* = [(a, a, a, ...)]$.

Twierdzenie
$(\mathbb{F}^*, \oplus, \odot, 0^*, 1^*, \prec)$ *jest ciałem niearchimedesowym.*

Mając na uwadze to, że operacja $\mathbb{F} \ni a \mapsto a^* \in \mathbb{F}^*$ jest monomorfizmem zachowującym porządek, pokazuje się, że ciało $(\mathbb{F}^*, \oplus, \odot, 0^*, 1^*, \prec)$ jest rozszerzeniem ciała $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Gdy za $\mathbb{F}$ przyjmiemy $\mathbb{R}$, wtedy otrzymujemy ciało niestandardowych liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}^*, \oplus, \odot, 0^*, 1^*, \prec)$[29]. Pokazuje się, że zachodzi

[28]Zob. (Adamowicz, Zbierski, 1990, s. 19-20). Ultrafiltry na $\mathbb{N}$ to elementy maksymalne w zbiorze wszystkich filtrów na $\mathbb{N}$ uporządkowanym przez relację inkluzji.

[29]Niestandardowe liczby rzeczywiste nazywane są także hiperrealnymi lub hiperrzeczywistymi (hyperreals).

Twierdzenie
$(\mathbb{R}^*, \oplus, \odot, 0^*, 1^*, \prec)$ *jest ciałem niearchimedesowym, rzeczywiście domkniętym.*

Podobnie jak ciało szeregów formalnych Laurenta, ciało niestandardowych liczb rzeczywistych jest zupełne w sensie Cauchy'ego. W odróżnieniu od ciała szeregów Laurenta, w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych nie istnieją ciągi zbieżne do zera (poza oczywistym przypadkiem ciągów stałych od pewnego miejsca). Ponadto, w związku z wersją (C5) aksjomatu ciągłości można pokazać, że w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych każdy zstępujący ciąg przedziałów domkniętych ma niepuste przecięcie[30].

Literatura

Adamowicz, Z., Zbierski, P.: 1990, *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa.

Artin, E., Schreier, O.: 1926, Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **5**, 85-99.

Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Kraków.

Błaszczyk, P.: 2012, Nota o Über den Zahlbegiff, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 195-197.

Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.-F.: 1998, *Real Algebraic Geometry*, Berlin.

Cohen, L. C., Ehrlich, G.: 1963, *The Structure of the Real Number System*, Toronto-New York-London.

Conway, J.: 2001, *On Numbers and Games*, Massachusetts.

Ehrlich, P.: 2012, The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of all Numbers Great and Small, *Bulletin of Symbolic Logic* **18**(1), 1-45.

Fichtenholtz, G. M.: 1985, *Rachunek różniczkowy i całkowy, t. I*, Warszawa.

Goldblatt, R.: 1998, *Lectures on the Hyperreals*, New York.

Hartshorne, R.: 2000, *Geometry: Euclid and and Beyond*, New York.

Hilbert, D.: 1899, Grundlagen der Geometrie, *Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig, 1-92.

Hilbert, D.: 2012, O pojęciu liczby, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 199-202. Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, 1900, 180-184; tł. J. Pogonowski.

Hölder, O.: 1901, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikaliche Classe* (53), 1-64.

Kuratowski, K.: 1971, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa.

Kuratowski, K., Mastowski, A.: 1978, *Teoria mnogości*, Warszawa.

Leja, F.: 1979, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.

Marker, D.: 2002, *Model Theory: An introduction*, Springer, New York.

[30](zob. Błaszczyk, 2007, s. 187)

Maurin, K.: 1991, *Analiza, t. 1*, PWN, Warszawa.

Shamseddine, K., Berz, M.: 2010, Analysis on the Levi-Civita field, a brief overview, *Contemporary Mathematics 508* (508), 215-237.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: pb@up.krakow.pl