FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Joanna Major, Zbigniew Powązka

Z badań nad analizą rysunku i odkrywaniem własności funkcji*

Abstract. The article presents remarks regarding analysis of drawings and the use of the data contained therein in resolving mathematical tasks. A particular type of drawing is considered, which is a graph of a function. The presented findings are the result of several years of research conducted among the Mathematics students at the Pedagogical University of Cracow.

1. Wstęp

W niniejszym artykule podano kilka uwag dotyczących analizy rysunku oraz wykorzystywania danych na nim zawartych do rozwiązywania zadania matematycznego. Rozważania będą związane ze szczególnym typem rysunku, jakim jest diagram metryczny, a dokładniej wykres pewnej funkcji. Jak pisze M. Sochański (2011): *diagramy metryczne wyróżnia to, że ich fizyczne elementy reprezentują zbiory o mocy continuum. Jest tak zarówno w przypadku geometrii, jak i analizy matematycznej. W przypadku tej drugiej mowa tu jest przede wszystkim o funkcjach, których dziedziną i zbiorem wartości są podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.*

Zagadnienia rozważane w niniejszej pracy łączą się w istocie z zagadnieniami języka matematyki, a dokładniej z trzema komponentami języka (słowa, symbole, rysunki). Dotyczą odczytywania, interpretowania, przetwarzania i prezentowania treści (faktów matematycznych) w odmiennej od pierwotnej formie.

Integralną część zadania, o którym mowa w artykule, stanowi rysunek. Oznacza to, że informacje potrzebne do rozwiązania zadania nie zostały sformułowane werbalnie, ale w formie ikonicznej (zostały zwizualizowane na rysunku)[1]. Jak wiadomo rysunek nie żyje „własnym życiem” – potrzebne są odpowiednia wiedza i idący za nią zasób pojęć, aby diagram w odpowiedni sposób zinterpretować (zob. Sochański, 2011). Przy czym *jeśli posiadamy wystarczająco dużo doświadczenia*

*From the research on the analysis of drawings and discovering theorems

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 97B50

Key words and phrases: process of forming the concepts of mathematical analysis, graph of the function, properties of the function

[1] Warto tu zwrócić uwagę za F. Kuřiną (1998) na dwie cechy informacji wizualnej: różni ludzie mogą je rozumieć różnie i informacja nie musi być jednakowo zrozumiała dla wszystkich.

i znajomości teorii matematycznej, możemy nadać znaczenie temu, co niewypowiedziane (Bratang i Pejlare, 2008, za Sochański, 2011). Jak zwraca uwagę S. Turnau (1990) *Rysunek zwany wykresem funkcji aktualizuje i przedstawia w łatwej do odbioru formie wiele własności funkcji; przybliżone wartości odpowiadające poszczególnym argumentom, miejsca zerowe, przedziały stałego znaku wartości funkcji, przedziały i rodzaje monotoniczności, ekstrema, punkty nieciągłości, punkty bez pochodnej, punkty zmiany znaku pierwszej i drugiej pochodnej, granice w nieskończoności, okresowość i przybliżoną wartość okresu oraz różne inne.* Autor podkreśla przy tym, że niektóre cechy są przedstawione ikonicznie (tj. w sposób w miarę wierny – nie wymagający legendy). Jednocześnie, jak wskazuje M. Sochański, *diagramy metryczne rodzą najwięcej problemów. Jest tak, ponieważ, zmysł wzroku nie jest w oczywisty sposób w stanie wychwycić wielu własności funkcji ciągłych.* [...] *Mimo to, wykresy funkcji są w analizie matematycznej bardzo wygodnym narzędziem* (2011).

Przedmiotem naszego zainteresowania stały się zagadnienia dotyczące wykorzystywania rysunku w procesie rozwiązywania zadania. Jest to ważne zagadnienie chociażby w związku ze zmianami otaczającej nas rzeczywistości, a w szczególności wszechobecnego rozwoju nowoczesnych technologii, co ma wpływ na nauczanie i uczenie się matematyki. Zmiany te mają wpływ na nauczanie na każdym poziomie edukacji. Jednocześnie zwraca na to uwagę M. Sochański (2011): *Pierwiastek wizualny jest silnie obecny także we współczesnej matematyce. Jest niezaprzeczalnym faktem, że diagramy, rysunki, wykresy, czy wizualizacje komputerowe są szeroko używane w praktyce matematyków. Pojawiają się one w czasopismach matematycznych, na tablicach i kartkach papieru. Co więcej, w ostatnich latach komputery otworzyły przed matematykami możliwości wizualizacji o wiele bardziej skomplikowanych obiektów matematycznych niż dotychczas.*

Badania nad rolą wizualizacji w nauczaniu analizy matematycznej prowadzone były m.in. na Słowacji (por. Gunčaga, Fulier, Eisenmann, 2008). Dla nas interesujące jest, jak studenci – przyszli nauczyciele – w specyficznej sytuacji posługują się informacjami zawartymi na rysunku podczas rozwiązywania zadania czysto matematycznego (z zakresu analizy matematycznej). Prezentowane w dalszej części zagadnienia mogą być rozpatrywane w dwóch płaszczyznach: jako prezentacja zadania, którego rozwiązywanie skłania do podejmowania aktywności, a w tym aktywności o charakterze twórczym, a z drugiej strony z punktu widzenia faktów matematycznych, które studenci dostrzegają i tych, które przez większość osób nie zostały przywołane.

2. Uwagi metodologiczne

W pracy opisano fragment badań prowadzonych wśród studentów. Celem badań było poszukiwanie odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

1) Czy studenci potrafią odczytywać z rysunku różnorodne informacje w nim zawarte?

   Chodzi tu w istocie o dostrzeganie i formułowanie w języku matematyki faktów. Przy czym warto tu zaznaczyć, że już samo widzenie łączy się bezpośrednio z myśleniem. *Nie ma widzenia bez myślenia. Nie wystarczy jednak myśleć, żeby widzieć: myślenie jest warunkiem widzenia* (Merleau-Ponty, 1971).

Widzenie jest aktywnym, twórczym procesem. Nasz mózg tworzy najlepsze interpretacje, do których jest zdolny, a to w zgodzie z przeszłymi doświadczeniami i ograniczonymi wieloznacznymi informacjami dostarczanymi przez nasze oczy (Kuřina, 1998).

Jak zwracają uwagę K. Bratang i J. Pejlare, *aby dostrzec (see) matematykę w wizualizacji, musimy w oczywisty sposób mieć pewną wiedzę matematyczną, aby wiedzieć, czego szukać* (2008).

2) Na ile precyzyjnie potrafią formułować wnioski wynikające tak z analizy danych zawartych na rysunku jak i posiadanej wiedzy?
3) Jakie trudności pojawiają się w procesie formułowania własności funkcji (a w tym własności funkcji na podstawie własności pochodnej tej funkcji)?

Szukanie odpowiedzi na te pytania dla grupy badawczej złożonej ze studentów studiów matematycznych wydaje się interesujące z uwagi na fakt, że w przypadku osób młodszych, *jak pokazują powtarzane od czasu do czasu badania, bardzo wielu uczniów nie potrafi z wykresu odczytać prawie żadnych własności funkcji, a niemal cała ich wiedza o wykresie sprowadza się do umiejętności rozpoznania z niego nazwy funkcji* (Turnau, 1990).

Badania zostały przeprowadzone po raz pierwszy w 1989 roku wspólnie z mgr. Władysławem Wilkiem[2] i powtórzone w latach 2004, 2012 i 2013. W dwu pierwszych badaniach uczestniczyło łącznie 62 studentów pierwszego roku studiów (po 31 osób w każdej grupie). Zadanie rozwiązywało ponadto 12 studentów z roku drugiego w roku 2012 i 25 studentów III roku matematyki w 2013.

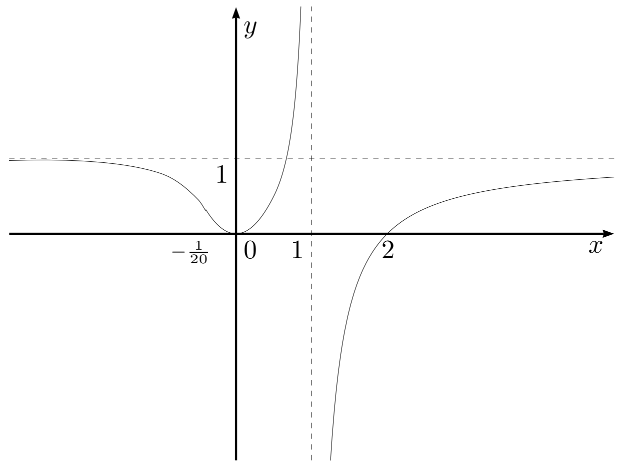
Narzędziem badawczym był zaproponowany przez W. Wilka wykres funkcji przedstawiony na rysunku (ryc. 1). Funkcja ta jest pochodną pewnej funkcji f i będzie oznaczona w ciągu dalszym przez f'. Zadanie badanych polegało na sformułowaniu możliwie bogatej listy własności funkcji f.

Rozwiązując to zadanie student powinien:

- Odczytać własności funkcji znajdującej się na rysunku (odczytać własności funkcji f');
- Przypomnieć sobie znane pojęcia (np. ciągłość funkcji w punkcie i zbiorze, monotoniczność, ekstrema, asymptoty, różnowartościowość, wypukłość, różniczkowalność) i twierdzenia z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej dotyczące własności funkcji wynikające z własności pochodnej tej funkcji;
- Z informacji na rysunku wybrać te, które są istotne do zastosowania znanych twierdzeń;
- Sformułować (słownie lub symbolicznie) własności funkcji f.

Warto w tym miejscu zauważyć, że zgodnie z niepisaną umową za dziedzinę funkcji f' przyjmujemy $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, zaś za zbiór wartości przyjmujemy $\mathbb{R}$.

[2] Wyniki tych badań nie zostały opublikowane.



Ryc. 1.

Ze względu na fakt, że badani byli bezpośrednio po kursie analizy matematycznej albo przed egzaminem licencjackim, dysponowali oni pewną wiedzą z analizy matematycznej. Mamy tu na myśli m.in. następujące twierdzenia:

T. 1 *Każda funkcja różniczkowalna w przedziale jest w nim ciągła.*

T. 2 *Każda funkcja rosnąca (malejąca) i różniczkowalna w przedziale ma w tym przedziale pochodną nieujemną (niedodatnią).*

T. 3 *Jeżeli pochodna f' funkcji f jest dodatnia (ujemna) w przedziale, to funkcja f jest rosnąca (malejąca) w tym przedziale.*

T. 4 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i posiada ekstremum w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$.*

T. 5 *Jeżeli funkcja f ciągła, określona w otoczeniu punktu x_0, jest różniczkowalna w sąsiedztwie tego punktu i pochodna f' zmienia znak w tym sąsiedztwie, to funkcja f posiada ekstremum w punkcie x_0. Wtedy $f(x_0)$ jest maksimum lokalnym, gdy f' zmienia znak z dodatniego na ujemny oraz minimum lokalnym, gdy zmienia znak z ujemnego na dodatni.*

T. 6 *Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna i druga pochodna funkcji f jest dodatnia (ujemna) w przedziale, to funkcja f jest wypukła (wklęsła) w tym przedziale.*

T. 7 *Niech $f : W \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalną funkcją określoną na wypukłym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}$. Funkcja f jest wypukła (wklęsła) w zbiorze W wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f' jest rosnąca (malejąca) w W.*

T. 8 *Jeżeli funkcja f ciągła określona w otoczeniu punktu x_0, jest dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie punktu x_0, $f''(x_0) = 0$ i druga pochodna f'' zmienia znak w sąsiedztwie punktu x_0, to funkcja f posiada punkt przegięcia w x_0.*

Analiza wykresu funkcji f' pozwala na odkrycie własności funkcji f. Oto przykładowe rozumowania. Przyjmujemy w nich następujące oznaczenia punktów charakterystycznych wykresu pochodnej f': $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{20}$.

D. Dziedzina funkcji f.

Zauważmy najpierw, że dziedziną funkcji f' jest zbiór będący sumą przedziałów $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Jest tak dlatego, że funkcja pochodna ma własność Darboux. Wynika stąd, że funkcja f może posiadać punkty nieciągłości jedynie drugiego rodzaju (Krasiński, 2003, s. 119-120). Punktem takim jest $x_1 = 1$. Zatem dziedziną funkcji f może być albo zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, albo zbiór $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ w zależności od tego, czy funkcja ta jest, czy też nie jest określona w $x_1 = 1$.

R. Różniczkowalność funkcji f.

Z rysunku wynika, że jeśli dziedziną funkcji f jest zbiór będący dziedziną jej pochodnej f', to funkcja f jest różniczkowalna w swej dziedzinie. Natomiast, jeżeli dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$, to funkcja f nie jest różniczkowalna w swej dziedzinie, bo nie istnieje pochodna w $x_1 = 1$.

C. Ciągłość funkcji f.

Na mocy twierdzenia T. 1 funkcja f jest ciągła w każdym punkcie, w którym jest różniczkowalna, tzn. w zbiorze $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Jeżeli punkt $x_1 = 1$ należy do dziedziny funkcji f, nic nie można powiedzieć o ciągłości funkcji f w tym punkcie. Może się bowiem zdarzyć, że f będzie określona w $x_1 = 1$ i będzie ciągła albo nieciągła w tym punkcie.

K. Klasa regularności funkcji f.

Rozstrzygnięcie tej kwestii w istotny sposób zależy od dziedziny funkcji f. Jeżeli jest nią zbiór $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, to funkcja f jest co najmniej klasy C^1. Z rysunku nie możemy jednoznacznie stwierdzić, czy istnieje f''. Z rysunku wynika, że poza punktami x_3 i x_1 funkcja f' jest różniczkowalna, bo ma styczną. Zauważmy również, że jeżeli dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$, to f może być jedynie klasy C^0.

Fm. Monotoniczność funkcji f – funkcja malejąca. Ponieważ pochodna f' jest ujemna w przedziale $(1, 2)$, więc na mocy twierdzenia T. 3 funkcja f jest malejąca w tym przedziale.

Fr. Monotoniczność funkcji f – funkcja rosnąca.

Z rysunku wynika, że funkcja f' jest nieujemna w zbiorze $(\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. Na mocy twierdzenia T. 3 funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ i $[2, +\infty)$.

E. Ekstrema funkcji f.

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum wiadomo (twierdzenie T. 4), że funkcja f może mieć ekstrema lokalne tylko w miejscach zerowych swej pochodnej, a więc w punktach $x_0 = 0$ i $x_2 = 2$. Z twierdzenia T.5 wynika, że jedynie W $x_2 = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne, natomiast w $x_0 = 0$ nie ma ekstremum, gdyż pochodna f' nie zmienia znaku.

Wy. Wypukłość funkcji f.

Zauważmy najpierw, że jedynymi wypukłymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych są przedziały ograniczone lub nieograniczone. Zatem z twierdzenia T. 7 wynika, że funkcja f jest wypukła w przedziale $[0,1)$ oraz w przedziale $[2,+\infty)$, gdyż w każdym z tych przedziałów rosnąca jest funkcja f'.

Wk. Wklęsłość funkcji f.

Rozumując podobnie jak w przypadku wypukłości stwierdzamy na mocy twierdzenia T. 7, że funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty,0]$.

Pp. Punkt przegięcia funkcji f.

Z definicji punktu przegięcia albo z twierdzeń T. 2 i T. 8 wynika, że funkcja f ma punkt przegięcia w punkcie $x_0=0$.

Metodą badawczą była analiza wytworów działania studentów. Wytwory te to pisemne wypowiedzi badanych na temat własności funkcji f, której pochodną f' przedstawia rys. 1. Obok analizy prac przeprowadzano rozmowy indywidualne ze studentami na temat niektórych własności interesującej nas funkcji.

Analiza wykresu funkcji f' powinna przywołać znane już studentom fakty z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej, takie jak np. związek znaku funkcji f' z monotonicznością funkcji f (twierdzenia T. 2, T. 3), warunek konieczny i wystarczający do istnienia ekstremum lokalnego funkcji (twierdzenia T. 4, T. 5), związek wypukłości z monotonicznością pochodnej pierwszego rzędu lub ze znakiem pochodnej drugiego rzędu (twierdzenie T. 6). W ciągu dalszym własności te zaliczymy do grupy W1. Uwagi dotyczące własności funkcji f opisanych wyżej omówimy w części 3.1.

Funkcja f może mieć jeszcze takie własności, które nie wynikają bezpośrednio z twierdzeń T.1–T.8. Nie są one więc konsekwencjami własności funkcji f'. Zaliczyć do nich można np. pytanie czy liczba $x=1$ należy do dziedziny funkcji f, jeśli nie należy do dziedziny jej pochodnej lub pytanie o posiadanie asymptoty poziomej lub pionowej funkcji f, jeśli ma je pochodna tej funkcji. Dla sformułowania odpowiedzi w tym przypadku wygodnie jest posłużyć się odpowiednimi przykładami. Umiejętność konstruowania takich przykładów może być kształtowana z wykorzystaniem kalkulatora graficznego względnie komputera ze stosownym oprogramowaniem. Opisane wyżej własności zaliczymy do grupy W2.

W rozmowach jak również w niektórych pracach pojawiały się propozycje rozstrzygnięcia, czy funkcja f może być parzysta, nieparzysta, okresowa, ograniczona. Uzyskane wyniki dotyczące tych własności także omówimy w paragrafie 3.2

3. Omówienie wyników badań

W tej części przedstawimy najważniejsze wyniki badań.

3.1. Wyniki badań dotyczących własności funkcji z grupy W1

Jak już wspomnieliśmy powyżej, do własności funkcji f w tej grupie zaliczamy monotoniczność (Fr., Fm.) i posiadanie ekstremum lokalnego (E.), wypukłość (Wy.) i wklęsłość (Wk.) funkcji, posiadanie punktów przegięcia (Pp.) oraz jej własności regularnościowe (różniczkowalność (R.) i klasa regularności (K.)). Są to więc własności, które należą do podstawowych treści wykładu z analizy matematycznej.

Własności te okazały się stosunkowo łatwe dla badanych, o czym świadczą dane zamieszczone w tabeli 1.

W pierwszej kolumnie tej tabeli podano wymieniane przez badanych własności funkcji f. W pozostałych kolumnach umieszczono, odpowiednio do kolejnych lat badań, dwie liczby. Pierwsza to liczba udzielonych odpowiedzi, zaś liczba umieszczona w nawiasie to liczba odpowiedzi błędnych.

Tab. 1. Wyniki badań dotyczące własności z grupy W1

Własność funkcji f	Liczba odpowiedzi w roku 1989	2004	2012	2013
Fr.	31(7)	28(12)	12(1)	23(15)
Fm.	31(0)	31(0)	12(9)	23(2)
E.	31(0)	31(0)	11(2)	19(1)
Pp.	21(0)	13(6)	6(1)	12(2)
Wy.	7(2)	13(7)	6(1)	10(4)
Wk.	7(2)	13(6)	9(4)	10(5)
R.	2(0)	2(0)	2(0)	4(1)
K.	7(0)	0(0)	0(0)	0(0)

Badania ujawniły, że prawie wszyscy ich uczestnicy opisywali monotoniczność funkcji f oraz jej zachowanie w punktach $x_0 = 0$ i $x_2 = 2$. Wiele z tych opisów było poprawnych, ale przy określaniu przedziałów, w których funkcja f jest rosnąca, popełniano błąd, twierdząc, że funkcja ta jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. Ci, którzy tak rozumowali, zapominali o istotności założenia o przedziale w twierdzeniu T.3.

Twierdzenia o związku pochodnej z ekstremum należą do wiadomości, które badani studenci przyswoili w sposób operatywny. Wydaje się, niestety, że nie można powiedzieć tego w odniesieniu do innych własności funkcji, np. wypukłości czy wklęsłości funkcji.

Odnotujmy w tym miejscu, że badani zauważali poprawnie, że dla $x_0 = 0$ funkcja f ma punkt przegięcia. Stwierdzenie to opierano na następującym rozumowaniu. W punktach $x_0 = 0$ i $x_2 = 2$ pochodna jest równa 0. Istnieje otoczenie punktu $x_0 = 0$, w którym pierwsza pochodna nie zmienia znaku, czyli w tym punkcie nie ma ekstremum, więc jest punkt przegięcia. W rozumowaniu tym brak odwołania do faktu, że w postulowanym otoczeniu punktu x_0 funkcja f' ma minimum lokalne, czyli zmienia monotoniczność. Nie korzystano również z definicji punktu przegięcia ani z twierdzenia T. 7 lub T. 8.

Niejakim zaskoczeniem było, że tak mała liczba badanych zwróciła uwagę na fakt, że funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Być może uważano to za bezpośrednią konsekwencję tematu zadania, niewymagającą wyjaśnień.

3.2. Wyniki badań dotyczących własności z grupy W2

W tej części pracy omówimy wyniki badań związanych z własnościami funkcji, które nie wynikają bezpośrednio z twierdzeń T.1-T.8. Mamy tu na myśli np. odpowiedzi na pytania o dziedzinę funkcji f, asymptoty (poziomą A_1, pionową

A_2) wykresu funkcji, parzystość (P.) funkcji, nieparzystość (N.), granice f w nieskończoności (G.), ograniczoność funkcji f.

Wyniki uzyskane z badań zawiera tabela 2.

Tab. 2. Wyniki badań dotyczące własności z grupy W2

Własność funkcji f	Liczba odpowiedzi w roku 1989	2004	2012	2013
D.	19(15)	23(18)	2(2)	18(17)
A_1.	11(11)	10(9)	7(5)	0(0)
A_2.	15(15)	10(9)	7(5)	0(0)
P.	2(1)	2(0)	2(0)	2(0)
N.	1(1)	1(0)	2(0)	2(0)
G.	3(3)	0(0)	0(0)	0(0)

Z danych zawartych w tabeli 2 wynika, że niewielka liczba badanych podjęła próbę rozważania wspomnianych zagadnień. Nikt np. nie podjął dyskusji dotyczącej zachowania się funkcji f w otoczeniu punktu $x_3 = -0,05$. Nikt też nie badał ograniczoności funkcji f. Przykładem funkcji ograniczonej w swej dziedzinie jest funkcja $f(x) = -\sqrt{|\operatorname{arc\,tg}(x-1)|}$. Jej pochodna $f'(x) = -\frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}|x-1|}}{2(x^2-2x+2)\operatorname{arc\,tg}(x-1)}$ nie jest określona w $x = 1$ i nie jest ograniczona w sąsiedztwie tego punktu.

Najwięcej osób podjęło próbę odpowiedzi na pytanie o dziedzinę funkcji f. Zdecydowana większość tych, którzy pisali coś na ten temat uważała, że dziedzina funkcji musi być identyczna z dziedziną jej pochodnej, a zatem funkcja f nie jest określona w $x_1 = 1$. Tak oczywiście być nie musi, bo np. funkcja $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ jest określona w punkcie $x_1 = 1$ i nie jest w tym punkcie różniczkowalna. Jej pochodna wyraża się bowiem wzorem $f'(x) = \frac{x-1}{2|x-1|^{\frac{3}{2}}}$ i nie jest określona w punkcie $x_1 = 1$. Odnotujmy również i to, że funkcja $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ jest przykładem funkcji ciągłej w zbiorze liczb rzeczywistych. Natomiast funkcja f, której wykres pochodnej f' zaprezentowano na ryc. 1 nie jest ani funkcją parzystą, ani nieparzystą. Wynika to z faktu, że pochodna funkcji nieparzystej jest funkcją parzystą i odwrotnie (Chronowski, Powązka, 2000, s. 43). Omawiana funkcja f nie jest też odwracalna, ponieważ ma minimum lokalne w punkcie $x_2 = 2$. Nie jest zatem różnowartościowa w otoczeniu tego punktu.

Dane w tabeli 2 potwierdzają fakt, że badani skłonni byli przenosić własności funkcji f' na własności funkcji f. Uwidoczniła to odpowiedź dotycząca posiadania asymptot poziomej lub pionowej. Opisana powyżej funkcja $f(x) = \sqrt{|\operatorname{arc\,tg}(x-1)|}$ jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$, a jej pochodna posiada asymptotę pionową. Nietrudno też o przykład funkcji nieograniczonej, mającej asymptotę pionową. Jest nią funkcja $f(x) = \ln x$. Tego typu błędne wypowiedzi wystąpiły już w innych badaniach i zaliczone zostały do fałszywych przekonań studentów (zob. Powązka, 2009).

4. Podsumowanie

Podsumowując warto podkreślić, że badani studenci nie mieli trudności z odczytaniem podstawowych własności pochodnej funkcji. Można powiedzieć, że studenci widzą wzajemną odpowiedniość pomiędzy wyglądem wykresu a własnościami funkcji f'. Mamy tu na myśli następujące odpowiedniości: miejsce zerowe funkcji – punkt na osi, w którym wykres funkcji przecina oś odciętych; funkcja jest rosnąca (malejąca), gdy jej wykres „podnosi się" („opada"), gdy śledzimy ją wzrokiem od lewej do prawej strony. Argument, dla którego pochodna jest równa 0, często interpretuje się jako argument, dla którego krzywa „przechodzi" z rosnącej w malejącą lub z malejącej w rosnącą. Funkcje ciągłe łączymy zazwyczaj z funkcjami, których wykresy możemy narysować bez odrywania ręki od kartki papieru. Ale ta interpretacja jest słuszna tylko wtedy, gdy dziedziną funkcji jest przedział ograniczony lub nieograniczony. Pewne własności funkcji wydają się więc mieć jasne interpretacje „wizualne" – z nimi też bywają wiązane przekonania dotyczące prawdziwości poszczególnych twierdzeń. Nie wolno jednak zapominać, że twierdzenia te mają swe założenia. Zapominanie o tych założeniach i badanie prawdziwości jedynie w oparciu o interpretacje poszczególnych wykresów może stać się powodem fałszywych przekonań (Pawlik, 2005; Powązka 2006, 2009).

Zauważmy, że większość badanych ograniczyła się jedynie do podania własności W1 funkcji f. Jest tak zapewne dlatego, że własności te najbardziej kojarzyły się z pojęciem funkcji pochodnej. Zdecydowana większość badanych analizowała oddzielnie części wykresu w przedziałach wyznaczonych przez asymptoty (własności z grupy W1) pomijając własności funkcji z grupy W2.

Dane zebrane w tabelach 1 i 2 wydają się wskazywać na fakt, że badani pobieżnie analizowali wykres pochodnej f' i nie potrafili lub nie chcieli zastanawiać się, jak własności funkcji f' wpływają na własności jej funkcji pierwotnej. Jednocześnie należy stwierdzić, że własności funkcji f podawane były w skrótowej formie. Były to pojedyncze słowa, nie zaś całe zdania matematyczne.

Odpowiadając na pytanie 3 należy zwrócić uwagę na bezpośredni transfer własności funkcji f' na własności funkcji f. Pojawiło się to przede wszystkim w stwierdzeniach dotyczących dziedziny obu funkcji oraz ich asymptot.

Wyniki badań z różnych lat mają bardzo podobne rozkłady. Nie potwierdzają przypuszczenia, że doświadczenia związane z posługiwaniem się przez badanych technologią informacyjną w istotny sposób wpływa na poprawę znajomości wykresów różnych funkcji oraz wykresów ich pochodnych.

Ukazane fakty wskazują na konieczność wykonywania na nauczycielskich studiach matematycznych większej liczby ćwiczeń podobnych do omówionego w artykule zadania.

Literatura

Bratang, K., Pejlare, J.: 2008, Visualizations in mathematics, *Erkenntnis* **68**, 345–358.

Chronowski, A., Powązka, Z.: 2000, *Pochodna funkcji*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Wilkowice.

Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2008, *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogicka Fakulta, Ružomberok.

Krasiński, T.: 2003, *Analiza matematyczna. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Kuřina, F.: 1998, Jak myśl uczynić widzialną, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 73-88.

Merleau-Ponty, M.: 1971, *Oko a duch a jiné eseje*, Obelisk, Praha.

Pawlik, B.: 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 365-376.

Powązka, Z.: 2006, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 229-295.

Powązka, Z.: 2009, O fałszywych przekonaniach obserwowanych na zajęciach z analizy matematycznej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 213-223.

Sochański, M.: 2011, Wizualizacje w matematyce wobec tradycji epistemologicznej. Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2011 roku w Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail jmajor@up.krakow.pl
e-mail zpowazka@gmail.com