FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Zbigniew Powązka

O badaniach nad kształtowaniem się u studentów matematyki podstawowych pojęć analizy matematycznej*

Abstract. This paper is a reflection on the process of forming the basic concepts of mathematical analysis in students. These studies were conducted in the years 2002-2011 and they coincided with the period of major educational reforms in our country. These reforms had an impact on the level of Mathematics teaching in various schools and on anticipatory preparing of young people to study this subject. Thus, this work is an attempt to summarize the results of the already described various stages of the research. The first part contains the answer to the question about the role of the content of this subject in the mathematical preparation of future teachers of Mathematics. In next parts, examples of introducing selected concepts of mathematical analysis are presented and thereafter conclusions from the carried-out research are formulated.

Wstęp

Niniejszy artykuł stanowi refleksję z badań nad kształtowaniem się u studentów studiów nauczycielskich podstawowych pojęć analizy matematycznej. Badania prowadzone były w latach 2002–2011, okresie ważnych reform edukacyjnych w naszym kraju. Reformy te nie były bez znaczenia dla poziomu nauczania matematyki w różnego typu szkołach wyższych. Brak bowiem przygotowania pewnych treści matematycznych ze szkoły ponadgimnazjalnej, przy niezmienionych programach analizy matematycznej, stwarzał określone trudności studentom, zwłaszcza lat pierwszych, w rozumieniu wykładanego przedmiotu (por. Powązka, 2006; 2010b). Świadomość tych trudności oraz umiejętność ich eliminowania jest istotna dla wykładowców tego przedmiotu i sprzyja doskonaleniu procesu dydaktycznego. Tego typu zabiegi wpisują się w problem jakości kształcenia, który jest jednym z ważnych zagadnień współczesnych badań dydaktyki matematyki (por. Pardała, 2012).

*On the research on developing the basic concepts of mathematical analysis in Mathematics students

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97B50, Secondary: 29A12

Key words and phrases: process of forming the concepts of mathematical analysis, measure, integral, absolute value function

Praca ta jest więc próbą podsumowania wyników kilkuletnich badań autora. Motywacją do jej napisania była chęć odpowiedzi na pytanie o rolę treści tego przedmiotu w procesie matematycznego przygotowania przyszłego nauczyciela matematyki. Wydaje się ono zasadne, ponieważ w obecnej podstawie programowej kształcenia matematycznego obserwuje się brak elementów analizy matematycznej na poziomie podstawowym na IV etapie kształcenia (szkoły ponadgimnazjalne) i na egzaminie maturalnym. Zagadnieniu temu został poświęcony paragraf 2. W paragrafie 3 opisuje się pokrótce metodologię badań. Paragraf 4 zawiera przykłady kształtowania wybranych pojęć analizy matematycznej ze szczególnym uwzględnieniem trudności, na jakie napotkali studenci podczas tego procesu.

Badania nad sposobami kształtowania podstawowych pojęć analizy matematycznej u młodzieży starszych klas szkół średnich, jak również u studentów prowadzone były na Słowacji (por. np. Fulier, 2001; Gunčaga, Fulier, Eisenmann, 2008). Niektóre wyniki tych badań zostały opisane w pracy J. Gunčagi i Z. Powązki (2006), która dotyczyła różnych sposobów wprowadzenia pojęcia pochodnej funkcji w punkcie.

1. O roli analizy matematycznej w kształceniu nauczycieli matematyki

Uważa się, że analiza matematyczna należy do najważniejszych działów matematyki. Według C. Boyera (1964, s. 9):

> Rachunek różniczkowy i całkowy stanowi jedną z wielkich zdobyczy umysłu ludzkiego. Zajmując miejsce pomiędzy naukami przyrodniczymi i humanistycznymi, powinien być szczególnie owocnym środkiem wyższego kształcenia.

Rachunek ten stanowi fundamentalną część współczesnej analizy matematycznej. Ma ona związki z wieloma działami matematyki jak również fizyki, a swe powstanie zawdzięcza potrzebie rozwiązywania konkretnych problemów geometrycznych lub technicznych. Z tego zapewne powodu jest wykładany na wszystkich uniwersytetach i wyższych uczelniach prowadzących kierunki ścisłe.

Omawiany dział matematyki odgrywa ważną rolę w procesie matematycznego kształcenia nauczycieli. Posiada bowiem bogaty zestaw ciekawych zadań i problemów, nadających się do rozwiązywania na różnych poziomach edukacji (np. zagadnienia optymalizacyjne). Na poziomie akademickim studenci zaznajamiają się z dowodami być może znanych im już wcześniej twierdzeń. Tu jest też możliwość do prowadzenia rozważań teoretycznych w oderwaniu od konkretnych przykładów. Na tej drodze studiujący analizę matematyczną mogą pogłębiać rozumienie podstawowych pojęć tego działu matematyki. Mają też okazję do prowadzenia interesujących rozważań, niekiedy bardzo subtelnych, które mogą przeczyniać się do rozwoju u studiujących matematycznego myślenia oraz twórczej postawy (zob. Gloton, Clero, 1985, s. 36).

Na rolę analizy matematycznej w edukacji matematycznej studenta zwracał już uwagę T. Rumak (1996). W cytowanej pracy sformułował następujące postulaty:

- Analiza matematyczna powinna być przedmiotem studiów, który uwzględnia zasób wiadomości niezbędnych do ogólnej kultury matematycznej studenta.

- Zajęcia dydaktyczne z tego przedmiotu powinny uwzględniać:
  - elementy wiedzy matematycznej z ukierunkowaniem na potrzeby przyszłej pracy nauczyciela matematyki,
  - zasady, formy i metody organizacji pracy w zakresie samodzielnego uczenia się lub studiowania oraz kierowania procesem nauczania matematyki w odniesieniu do wiadomości z analizy matematycznej, które występują w szkolnym nauczaniu matematyki.

Postulaty T. Rumaka są nadal aktualne, gdyż treści z analizy matematycznej powracają do nauczania matematyki w szkole ponadgimnazjalnej na poziomie rozszerzonym. Musi więc w nie być wyposażony kandydat do zawodu nauczycielskiego, bo nie można wykluczyć, że w przyszłości będzie uczyć na tym poziomie edukacji. Ponadto znajomość zagadnień z tego przedmiotu jest niezbędna studentowi matematyki do rozumienia prac naukowych, z którymi spotka się podczas pisania pracy dyplomowej. Studiowanie tego działu matematyki daje również okazję do wykorzystywania technologii informacyjnej, pomocnej w rozwiązywaniu niektórych typów zadań, zwłaszcza rachunkowych. Sposób prowadzenia zajęć przesuwa się więc z ćwiczenia umiejętności technik rachunkowych w kierunku wykorzystywania pojęć do rozwiązywania zadań – tzw. pojęciowe rozwiązywanie zadań (por. Turnau, 1990, s. 60).

Podsumowując, możemy stwierdzić, że rolę analizy matematycznej w matematycznej edukacji nauczycieli określają następujące fakty:

a) Jej pojęcia powstawały w wyniku rozwiązywania pewnych zagadnień praktycznych i jej twierdzenia znajdują zastosowania przy rozwiązywaniu problemów z innych dziedzin wiedzy (np. fizyka, ekonomia, nauki techniczne).

b) Metody tego działu matematyki znajdują zastosowanie w innych działach matematyki (np. w równaniach różniczkowych, geometrii różniczkowej, rachunku prawdopodobieństwa).

c) Uogólnienia podstawowych pojęć analizy matematycznej wiążą ze sobą różne działy matematyki, które na pierwszy rzut oka wydają się odległe od siebie (np. topologia, algebra, analiza funkcjonalna).

d) Podstawowe pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego mogą być prezentowane na różnych poziomach edukacji (szkoła ponadgimnazjalna, wyższe uczelnie).

e) Studiowanie dowodów twierdzeń oraz rozwiązywanie różnego typu zadań z tego działu matematyki może przyczynić się do rozwijania u studentów myślenia matematycznego oraz różnych aspektów matematycznej aktywności.

f) Przy rozwiązywaniu niektórych typów zadań z analizy matematycznej istnieje możliwość zastosowania technologii informacyjnej.

2. Uwagi metodologiczne

Celem prowadzonych badań było opisanie procesu kształtowania twórczej postawy studentów, mających być nauczycielami matematyki podczas zajęć z analizy matematycznej. Chodziło również o wskazanie, na czym polegają trudności studentów obserwowane w tym procesie. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, badania prowadzone były w czasie reform programowych na każdym poziomie nauczania szkolnego. Reformy te polegały na odejściu od przekazywania tzw. wiedzy encyklopedycznej, na rzecz rozwijania aktywnego udziału dzieci i młodzieży w procesie uczenia się. Aby jednak nauczyciele mogli realizować takie nauczanie, muszą sami zdobyć stosowne doświadczenie. W związku z tym w czasie trwania badań staraliśmy się tak organizować zajęcia, aby ograniczyć podawanie encyklopedycznej wiedzy na rzecz rozbudzania zainteresowań i motywacji do samodzielnego rozwijania działalności poznawczej. Jest oczywiste, że każdy wykład musi zawierać sporo nowych treści. Nie da się bowiem operować pojęciami bez znajomości ich definicji i wzajemnych związków między nimi. Istotne jest jednak właściwe kształtowanie tych pojęć w świadomości słuchacza. Z. Krygowska (1977, s. 85) bardzo mocno akcentuje ten fakt:

> [...] myślenie w dziedzinie matematyki nie jest kontemplacją, ale dynamicznym systemem – ostrzej niż w innych dziedzinach – sprecyzowanych w świadomości operacji.

Autorka podkreśla, że *matematyka – to w mniejszym stopniu wiedzieć, co umieć działać.*

Takie nauczanie wymaga między innymi doboru metod pracy ze studentami, organizacji zajęć, zapewnienia odpowiedniej literatury, odpowiednich materiałów dydaktycznych, konsultacji indywidualnych i zbiorowych.

Badania zostały poprzedzone przygotowaniem zbioru zadań. Zadania tam zawarte są wieloetapowe, tzn. każde z nich jest sformułowane w kilku podpunktach, przy czym wynik lub sposób rozwiązania problemu z podpunktu poprzedniego jest potrzebny w rozwiązaniu problemu z podpunktu następnego. Ponadto do wszystkich zadań zamieszczono pełne rozwiązania, co umożliwia czytelnikowi sprawdzenie i pogłębienie rozumienia podstawowych pojęć analizy matematycznej oraz zapoznanie się z techniką dowodzenia twierdzeń. Zbiór ten podczas badań funkcjonował w preprincie, a w formie książkowej pojawił się też później (Krzyszkowski, Powązka, Wachnicki, 2010). Obok niego stosowano również inne zbiory zadań. Badaniami objęto studentów trzech pierwszych roczników studiów. Na roku pierwszym analizowano wiedzę deklaratywną studentów, wyniesioną ze szkoły ponadgimnazjalnej i rozumienie oraz umiejętności posługiwania się pojęciami z wykładu analizy matematycznej, związanymi ze składaniem i odwracaniem funkcji oraz ciągłością i różniczkowalnością funkcji elementarnych ze szczególnym uwzględnieniem funkcji $f(x) = |x|$ w dziedzinie rzeczywistej. Badania na roku drugim dotyczyły rozumienia pojęć związanych z różniczkowalnością i całkowalnością funkcji wielu zmiennych oraz związku między różnymi rodzajami całek. Natomiast na roku trzecim badano przede wszystkim rozumienie pojęć z teorii miary.

Badania na roku pierwszym prowadzone były w latach 2003/2004, 2006/2007 i 2010/2011. Wybór tych roczników nie był przypadkowy. W roku 2003 przyszli na uczelnię absolwenci szkół średnich jeszcze z czteroletniego liceum, które zostało zreformowane. Natomiast w roku 2006 poddani badaniom byli absolwenci, którzy ukończyli już trzyletnią szkołę ponadgimnazjalną. Natomiast w roku 2010 rozpoczęły studia osoby, które zdawały obowiązkową maturę z matematyki na poziomie co najmniej podstawowym. Egzamin ten, jako obowiązkowy, przywrócono w 2010 roku po 27-letniej przerwie. Oczywiście przygotowanie do studiowania było w każdym z tych lat inne. Dlatego interesująca wydała się odpowiedź na pytanie, w jaki sposób wpłynęło ono na rozwój matematycznej wiedzy nabywanej przez studentów na zajęciach z analizy matematycznej. Obserwacje i badania kontynuowano na roku drugim w latach 2004/2005 oraz 2007/2008. Badania dotyczące zagadnień związanych z miarą i całką Lebesgue'a zostały po raz pierwszy przeprowadzone w roku 2006 i powtórzone w roku 2009 w grupie studentów dziennych i zaocznych.

W roku 2003 w badaniach udział wzięło 70 studentów, w roku 2006 uczestniczyło w nich 119 osób oraz 84 w roku 2010. Z uwagi na fakt, że były one prowadzone przez trzyletni okres trwania wykładów i ćwiczeń, zmieniał się nieco skład ilościowy grup osób w nich uczestniczących. Dlatego podane dane dotyczą tylko roku pierwszego.

Podstawową metodą badawczą była analiza wytworów działania studentów, na które składały się rozwiązania zadań wykonywanych przez uczestników badań w różnych momentach procesu dydaktycznego, teksty przygotowywanych przez nich referatów oraz różnego rodzaju testy wyborów (Powązka, 2006; 2007; 2009a; 2009b; 2010a; 2010b; 2012; Powązka, Zaręba, 2007; Ciesielska, Powązka, 2012). Obok nich stosowano rozmowy indywidualne ze studentami, dotyczące rozwiązań zadań, które sprawiły im szczególne trudności. Ponadto w czasie wykładu oraz ćwiczeń prowadzący zajęcia obserwowali systematycznie reakcje całej grupy na stosowane zabiegi dydaktyczne. Efekty tych obserwacji dyskutowano na bieżąco z wykładowcą, co umożliwiało szybką reakcję na obserwowane zjawiska.

3. Przykłady kształtowania wybranych pojęć z analizy matematycznej

W trakcie kursu analizy matematycznej stosowano różne sposoby wprowadzania pojęć matematycznych. Jeden z nich polega na wyróżnieniu trzech etapów ich kształtowania (por. Klakla, Klakla, Nawrocki, Nowecki, 1992) Etapami tymi są:

– predefinicyjny, na którym kształtuje się właściwe intuicje pojęć,
– definiowania, na którym pojawia się formalna definicja wraz ze stosownymi przykładami i kontrprzykładami,
– postdefinicyjny, na którym bada się związki poznanego pojęcia z innymi przyswojonymi wcześniej, jak również podejmuje się próbę uogólniania.

Podamy poniżej dwa przykłady pojęć kształtowanych w ten sposób.

Przykład 1
Do pojęć matematycznych opracowywanych na tej drodze w procesie edukacji należy np. pojęcie *miary*. W szkole podstawowej uczeń w trakcie wymierzania długości odcinków, pól figur płaskich lub objętości brył zapoznaje się z procesem mierzenia, nie używając pojęcia przyporządkowania. Następnie poznaje różne przykłady miar (długość, pole powierzchni, objętość, prawdopodobieństwo). Poznaje sposoby obliczania miar pewnych figur lub prawdopodobieństwa różnych zdarzeń. Jeżeli nie pójdzie na studia matematyczne, może nigdy nie dowiedzieć się o istnieniu miary Jordana i Lebesgue'a i o wzajemnych związkach między tymi miarami.

Na pewno wtedy, znając pewne procedury potrzebne do wyznaczania wartości miar dla poszczególnych rodzajów figur, może nigdy nie poznać samej definicji. Wynika stąd, że przez całe życie będzie znajdował się na etapie predefinicyjnym. Dlatego tak ważne są właściwe zabiegi dydaktyczne związane z opracowywaniem tego pojęcia na różnych poziomach edukacji (por. Siwek, 2005, s. 66-68; Major, Powązka, 2008; Powązka, 2009a). Zauważmy, że student kończący obecnie studia matematyczne na poziomie licencjackim poznaje, przy geometrycznej interpretacji całki oznaczonej jedynie pojęcie miary Jordana, które wprawdzie wystarcza mu do celów nauczania, ale nie jest funkcją przeliczalnie addytywną. Nie jest to więc miara w sensie ogólnej definicji tego pojęcia. Dopiero na studiach drugiego stopnia opracowywana jest definicja miary i jej własności, ze szczególnym uwzględnieniem miary Lebesgue'a.

Oto inny przykład pojęcia, które jest istotne dla studiowania analizy matematycznej i jest budowane w opisany powyżej sposób.

Przykład 2

Bardzo ważnym narzędziem, używanym w wykładzie analizy matematycznej jest metryka w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną. Na poziomie predefinicyjnym pojęcia metryki opracowuje się definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, rozumiejąc przez $|x|$ odległość liczby x od liczby 0. Jest to na ogół pierwszy przykład metryki, z którą zapoznają się uczniowie na trzecim lub czwartym poziomie edukacji. Z takim rozumieniem wartości bezwzględnej powinni przyjść studenci na studia matematyczne, ale badania J. Major, Z. Powązka (2006) pokazują, że posługiwanie się tym pojęciem sprawia studentom trudności. Przy pomocy tego pojęcia buduje się pojęcie odległości w zbiorze $\mathbb{R}$ określonej wzorem $d(x, y) = |x - y|$. Tak określona odległość umożliwia zdefiniowanie zbieżności ciągu liczbowego i granicy funkcji w punkcie. Wprowadzenie definicji metryki w dowolnym zbiorze na zajęciach z topologii albo podczas wykładu z analizy, daje możliwość zdefiniowania granicy ciągu i funkcji w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$. Można zatem powiedzieć, że student trzeciego semestru studiów matematycznych zna pojęcie metryki na poziomie definiowania. Na poziomie postdefinicyjnym poznają studenci to pojęcie przy okazji określania normy w przestrzeni liniowej. Okazuje się ona być uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Nie jest to jedyna droga kształtowania pojęć, choć wydaje się bardzo naturalna. Podczas wykładów z analizy matematycznej wprowadza się często najpierw definicję pojęcia, a dopiero później, na bazie odpowiednich przykładów i kontrprzykładów, głębiej wnika się w to pojęcie, budując potrzebne intuicje. Oto przykład pojęcia wprowadzanego w ten sposób.

Przykład 3

Pojęciem opracowywanym w ten sposób może być np. różniczkowalność funkcji w punkcie. Dla funkcji jednej zmiennej wprowadza się je po opracowaniu definicji granicy i ciągłości funkcji oraz ich własności, rozumiejąc przez różniczkowalność funkcji w punkcie istnienie w tym punkcie pochodnej, tzn. granicy ilorazu różnicowego tej funkcji w rozważanym punkcie. W tym ujęciu pochodna oznacza współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie

(Kołodziej, 1978; Rudnicki, 2002; Krasiński, 2003). Można też określać różniczkowalność tak, jak dla odwzorowań przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y przy pomocy ciągłego odwzorowania liniowego tych przestrzeni. Pokazuje się wtedy, że w przypadku $X = Y = \mathbb{R}$ definicje te są równoważne (Maurin, 1973). Wybranie tej drogi wymaga jednak znajomości postaci ciągłych odwzorowań liniowych w stosownych przestrzeniach. Jak pokazują przeprowadzone obserwacje, studenci mają duże trudności z przenoszeniem faktów znanych im np. z algebry na grunt analizy matematycznej.

W każdym z tych ujęć podaje się najpierw formalną definicję, a potem jej interpretację geometryczną i zastosowania do badania różniczkowalności konkretnych funkcji. W tej koncepcji intuicje pojęcia tworzą się w trakcie operowania formalną definicją.

Ważny sposób wprowadzania pojęć matematycznych wynika z czynnościowej metody nauczania matematyki. Opracowując pojęcia tą metodą wyróżnia się trzy etapy (Siwek, 1998):

– czynności konkretnych,
– czynności konkretno-wyobrażeniowych,
– czynności abstrakcyjnych.

Metoda ta na poziomie czynności konkretnych wymaga rozwiązywania kilku zadań rachunkowych. Liczba ich nie musi być zbyt duża, bo w chwili obecnej powszechny dostęp do środków multimedialnych, takich jak komputer lub kalkulatory graficzne, spycha na plan dalszy konieczność ćwiczenia sprawności rachunkowych. Zadania powinny być jednak tak dobrane, aby mogły posłużyć do rozbudowy pojęcia na wyższych etapach poznania.

Mimo tego, że w piagetowskiej teorii rozwoju intelektualnego student powinien znajdować się w stadium inteligencji formalno-operacyjnej a także dostrzegać oraz ujmować relacje i związki między pojęciami (Piaget, 1977), to jednak doświadczenia prowadzących zajęcia z analizy matematycznej, zwłaszcza na pierwszym roku studiów, wskazują na duże trudności w posługiwaniu się trudniejszymi pojęciami abstrakcyjnymi, takimi jak kresy zbioru, granica ciągu liczbowego, granica funkcji w punkcie, ciągłość, różniczkowalność oraz całkowalność funkcji (np. Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Powązka, 2006; 2009b; 2009a; 2010b; Przeniosło, 2001). Warto zatem niektóre z nich opracowywać czynnościowo. Prześledźmy to na poniższym przykładzie. Inne znajdują się w pracy (Powązka, 2010a).

Przykład 4

Podstawowym pojęciem analizy matematycznej jest granica ciągu liczbowego. Zbieżność ciągu a_n do skończonej granicy $g \in \mathbb{R}$ określa się studentom przy pomocy należenia prawie wszystkich wyrazów tego ciągu do dowolnego otoczenia liczby g. Kształtując to pojęcie metodą czynnościową, należy na etapie czynności konkretnych rozwiązywać najpierw zadania typu:

– W zbiorze liczb rzeczywistych ze zwykłą metryką wyznaczyć otoczenie danej liczby o wskazanym promieniu;

- Zbadać, ile wyrazów danego ciągu znajduje się w otoczeniu danej liczby o wskazanym promieniu;
- Dany jest ciąg a_n i pewna liczba rzeczywista a. Wskazać otoczenie tej liczby, do którego nie należą prawie wszystkie wyrazy ciągu;
- Wskazać otoczenie liczby a, o której mowa w poprzednim poleceniu, do którego należy nieskończenie wiele wyrazów rozważanego ciągu a_n, ale nie prawie wszystkie wyrazy;
- Dla dowolnie ustalonego otoczenia pewnej liczby rzeczywistej wskazać przykład ciągu spełniającego jeden z warunków:

  a) prawie wszystkie wyrazy należą do tego otoczenia,
  b) tylko skończona liczba wyrazów znajduje się w wybranym otoczeniu,
  c) nieskończenie wiele wyrazów należy do wybranego otoczenia.

W tych zadaniach tak liczba a jak i promień otoczenia powinny na początku przyjmować konkretne wartości, a potem być zastępowane symbolami literowymi. Badając konkretne przykłady studenci uczą się rozróżniać, czy dana liczba może być granicą rozważanego ciągu.

Na etapie czynności konkretno-wyobrażeniowych można przeprowadzać dowody zbieżności ciągu liczbowego a_n do granicy g, rozpoczynając od bardzo prostych przykładów, przy których wystarczy rozwiązać nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

i zbadać, czy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ w rozwiązaniu tej nierówności znajdują się prawie wszystkie liczby naturalne. Następnie należy wzbogacać te przykłady o takie ciągi, przy których zamiast rozwiązywać powyższą nierówność wystarczy oszacować różnicę $|a_n - g|$ w celu wyznaczenia liczby naturalnej n_0, od której począwszy wyrazy o wskaźnikach od niej wyższych spełniają rozważaną nierówność.

Na etapie operacji abstrakcyjnych studentom proponuje się dowody różnych własności ciągów zbieżnych. Poznając twierdzenia o działaniach w zbiorze ciągów zbieżnych, studenci z jednej strony uczą się techniki przeprowadzania dowodów z wykorzystaniem definicji granicy ciągu, a z drugiej poznają ważne narzędzie do obliczania granic różnych ciągów.

Przy opracowywaniu nowych pojęć w umyśle uczącego się powinien nastąpić proces polegający na włączeniu nowego pojęcia w system pojęć już mu znanych. Oto przykład dowodzący, że proces taki jeszcze nie nastąpił w umysłach badanych.

Przykład 5

Pod koniec pierwszego roku studiów opracowuje się na wykładzie z analizy matematycznej pojęcia funkcji pierwotnej oraz całki nieoznaczonej. Studentom, po przyswojeniu definicji tych pojęć i metod obliczania całki nieoznaczonej, zaproponowano następujące zadania:

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, tak aby funkcja pierwotna funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - mx + 4}$ była określona i różniczkowalna w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, tak aby funkcja pierwotna funkcji $f(x) = 2x^2 + (m - -1)x + 1$ miała dwa ekstrema lokalne.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, tak aby funkcja pierwotna funkcji $f(x) = mx^2 + (m - 1)x - 1$ była malejąca w swej dziedzinie.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, tak aby funkcja pierwotna funkcji $f(x) = x^2 - x + m - 1$:

a) miała punkt przegięcia,
b) była funkcją rosnącą w swej dziedzinie,
c) nie miała ekstremów lokalnych.

Zdecydowana większość z 30-osobowej grupy osób, którym zaproponowano te zadania, najpierw obliczyła lub próbowała obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji f, a następnie wykorzystywała aparat rachunku różniczkowego do badania monotoniczności, ekstremum oraz wypukłości funkcji. Najwięcej trudności nastręczyło zadanie 1, gdyż rozwiązując je w opisany sposób należało obliczyć całkę niewymierną. Dopiero w trakcie rozmowy studenci stwierdzili, że korzystając z definicji funkcji pierwotnej, omawiane zadania można sprowadzić do badania funkcji kwadratowej z parametrem i nie trzeba stosować techniki obliczania całek.

Zachodzi naturalne pytanie o przyczynę wybrania takiej drogi rozwiązania zadania. Wydaje się, że tkwi ona w tym, iż badani studenci lepiej zapamiętali metody całkowania, wykonując być może dużą liczbę przykładów rachunkowych, natomiast nie zauważyli, że stosując definicję i stosowne twierdzenia rachunku różniczkowego, mogli uprościć swoje postępowanie i uniknąć skomplikowanych obliczeń. Jest to częste zjawisko obserwowane na różnych poziomach edukacji, które sprowadza się do błędnej strategii uczenia się, polegającej na tym, że wystarczy nauczyć się pewnych wzorów, aby móc rozwiązywać zadania i nie wnikać w specyfikę pojęć.

W procesie kształtowania pojęć matematycznych wykorzystuje się nieraz uogólnianie. Umiejętność uogólniania i dostrzegania uogólnień jest elementem matematycznej aktywności niezbędnym przy studiowaniu matematyki (Krygowska, 1986). Wyróżnia się dwa sposoby uogólniania pojęć: uogólnianie przez konstrukcję lub uogólnianie przez rozpoznanie (Siwek, 2005; Zaręba, 2004, 2012). Oba rodzaje uogólnień pojawiają się w wykładzie analizy matematycznej. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 6

Do podstawowych pojęć analizy matematycznej zalicza się również całka Riemanna. Znalazła ona wiele ważnych zastosowań, tak w matematyce, jak również w naukach pokrewnych, np. w fizyce. W kursie analizy matematycznej studenci poznają najpierw tę całkę z funkcji jednej zmiennej, a później całki wielokrotne, krzywoliniowe nieskierowane i powierzchniowe niezorientowane. Do zdefiniowania tych całek użyteczny jest tzw. proces całkowy. Polega on na rozważaniu normalnego ciągu podziałów zbioru (odcinka, łuku krzywej, obszaru regularnego) w $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, na którym określona jest funkcja podcałkowa. Następnie buduje się ciągi sum dolnych oraz ciągi sum górnych, względnie ciąg sum aproksymacyjnych. Wspólną granicę ciągów sum dolnych i sum górnych, o ile nie zależy ona od normalnego ciągu podziałów, nazywamy całką (oznaczoną, krzywoliniową, powierzchniową) danej funkcji na danym zbiorze. Możemy również zdefiniować taką całkę jako granicę ciągu sum aproksymacyjnych, o ile nie zależy ona od normalnego ciągu podziałów oraz sposobu wybierania punktów pośrednich z poszczególnych podzbiorów dziedziny.

Dla nauczyciela matematyki pojęcie całki Riemanna jest ważne ze względu na związek z pojęciem miary Jordana, którą opracowuje się w szkole na poziomie predefinicyjnym. Przypomnimy, że jeżeli funkcja podcałkowa jest nieujemna w przedziale $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to całka z tej funkcji na tym przedziale jest polem „trapezu krzywoliniowego” ograniczonego wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi prostopadłymi do tej osi przechodzącymi przez krańce tego przedziału, czyli miarą Jordana pewnego obszaru.

Podniesienie wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, w której znajduje się dziedzina funkcji podcałkowej z $n = 1$ na $n = 2$ lub $n = 3$, stwarza okazję do rozważania różnego typu całek. Zauważmy, że dla funkcji dwu zmiennych dziedziną jest podzbiór zbioru $\mathbb{R}^2$. Jeśli jest nim prostokąt, czyli iloczyn kartezjański dwu przedziałów zawartych w $\mathbb{R}$ lub krzywa płaska, rozumiana jako homeomorficzny obraz przedziału, to stosując opisany proces całkowy, taki jak przy definicji całki Riemanna z funkcji jednej zmiennej, w każdym z przypadków otrzymuje się całkę podwójną na prostokącie lub krzywoliniową nieskierowaną. Mamy tu do czynienia z uogólnieniem przez rozpoznanie.

Jeżeli dziedziną funkcji f jest zbiór regularny A, tzn. taki, którego brzeg składa się ze skończonej liczby krzywych o równaniach $y = y(x)$ lub $x = x(y)$, to dla zdefiniowania całki podwójnej z funkcji f na zbiorze A wykonuje się następującą konstrukcję:

– wpisuje się zbiór A w prostokąt P o bokach równoległych do osi układu współrzędnych,
– definiuje się nową funkcję g, która na zbiorze A równa jest funkcji f, a na dopełnieniu tego zbioru do prostokąta P przyjmuje wartość zero.

Wtedy całkę podwójną po zbiorze A z funkcji f określa się jako całkę podwójną z funkcji g po prostokącie P. Takie postępowanie uważamy za uogólnianie przez konstrukcję.

W teorii całki w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważa się funkcje, których dziedzinami mogą być obszary płaskie, krzywe lub płaty powierzchniowe regularne. Stosując opisany powyżej proces całkowy do tych funkcji, dochodzi się odpowiednio do pojęcia całki potrójnej, krzywoliniowej nieskierowanej lub powierzchniowej niezorientowanej. Tym razem mamy znów uogólnienie przez rozpoznanie.

Na te fakty zwracano uwagę studentom w trakcie wykładu i ćwiczeń. Przeprowadzone badania miały na celu zdiagnozowanie, czy stosowane zabiegi dydaktyczne odniosły zamierzony cel. Wyniki tych badań zostały opisane w pracy Z. Powązki i L. Zaręby (2007).

Poniższy przykład ilustruje trudności, jakie mogą pojawiać się przy okazji uogólniania pojęć.

Przykład 7
W wykładzie analizy matematycznej na roku pierwszym przy okazji omawiania własności odwzorowań opracowuje się pojęcie monotoniczności funkcji. Wprowadzone definicje dopuszczały uznawanie funkcji nierosnących (słabo malejących lub niemalejących (słabo rosnących) jako szczególne przypadki funkcji monotonicznych. Zwracano uwagę studentom, że przez wprowadzenie nierówności słabych w następnikach implikacji określających monotoniczność funkcji, w istotny sposób wzbogaca się zbiór desygnatów tego pojęcia. Równocześnie zmieniają się własności funkcji monotonicznych znane studentom ze szkoły ponadgimnazjalnej. Dla przykładu, przy takim rozumieniu definicji monotoniczności funkcji, funkcje te nie muszą być różnowartościowe, a zatem odwracalne.

Badania prowadzone w zimowym semestrze roku akademickiego 2010/2011 ujawniły, że spora grupa studentów nie zrozumiała tego faktu, twierdząc, zgodnie z wiedzą wyniesioną z niższych etapów edukacji, że każda funkcja monotoniczna musi być różnowartościowa (por. Ciesielska, Powązka, 2012) Okazało się, że opracowując pojęcie monotoniczności funkcji na poziomie formalnego definicyjnego rozumienia lub lokalnej komplikacji (Dyrszlag, 1978), pojawiły się fałszywe przekonania (Pawlik, 2005; Powązka, 2007, 2009b).

4. Podsumowanie

Przeprowadzone badania pozwalają na sformułowanie siedmiu wniosków.

1. Sukces w studiowaniu analizy matematycznej może w istotny sposób zależeć od matematycznego przygotowania ze szkoły ponadgimnazjalnej. Wprowadzane od roku 2002 w naszym kraju reformy edukacji w szkołach ponadgimnazjalnych i towarzyszące im zmiany w egzaminie maturalnym z matematyki spowodowały, że kandydaci na studia dysponują mniejszym zakresem pojęć matematycznych potrzebnych do studiowania analizy matematycznej (Powązka, 2010b). Stwarza to określone trudności dydaktyczne wykładowcom tego przedmiotu z uwagi na konieczność korelacji treści z różnych przedmiotów matematycznych oraz uwzględnianie zmniejszającego się z roku na rok matematycznego przygotowania młodzieży podejmującej studia. Ta swoista dialektyka między tym, co chciałoby się wyłożyć w eleganckiej i możliwie w najogólniejszej postaci, z tym, co może pojąć student pierwszego roku po zreformowanym liceum, jest szczególnym wyzwaniem dydaktycznym. Powinni na ten fakt zwrócić uwagę twórcy efektów kształcenia oraz kart kursów dotyczących analizy matematycznej.

2. Analiza matematyczna jest działem matematyki zawierającym wiele pojęć abstrakcyjnych. Część z nich ma swoje uwarunkowania w otaczającej nas rzeczywistości (np. miara), ale zdecydowana większość ma charakter ogólny, oderwany od konkretu. Dlatego przy kształtowaniu tych pojęć warto stosować różne sposoby ich opracowywania (por. przykłady 2, 3, 4). Takie podejście może ułatwiać szybkie wdrażanie studenta w myślenie abstrakcyjne.

3. Proces kształtowania się w umyśle uczniów lub studentów pojęć matematycznych jest procesem długotrwałym i wymaga wielu zabiegów dydaktycznych na każdym etapie kształcenia. Na fakt ten zwraca uwagę wielu dydaktyków matematyki badających rozumienie przez młodzież lub studentów pojęć z analizy matematycznej. Dla przykładu A. Sierpińska (1985) sformułowała następujący pogląd na ten temat:

   > Budowanie pojęć matematycznych wymaga stałego wzajemnego oddziaływania między uczniem a sytuacjami problemowymi, oddziaływania dialektycznego, w którym angażowałby swoją poprzednią wiedzę, poprzednie koncepcje, poddawał je rewizji, modyfikował, uzupełniał lub odrzucał w celu wykształcenia nowych koncepcji.

   Dlatego warto poprzedzać formalną definicję pojęcia matematycznego rozważaniami z etapu predefinicyjnego (przykłady 1, 4). Jest to bardzo ważnym zabiegiem dydaktycznym, gdyż w przeciwnym razie studenci nie dysponują niezbędnymi przykładami, które można formalizować i uogólniać. Ważne jest też spojrzenie na nowe pojęcie przez pryzmat wcześniej poznanych pojęć, co w istotny sposób może pogłębić ich rozumienie (por. przykład 5).

4. W czasie uczenia się i studiowania dokonuje się w umyśle słuchaczy proces poznawczy. W jego konsekwencji tworzy się w świadomości uczącego się swoisty obraz wykładanej teorii, złożony z obrazów poszczególnych pojęć w niej występujących. Adekwatność obrazów poszczególnych pojęć z tymi pojęciami zależy od możliwości poznawczych i motywacji poszczególnych odbiorców oraz dydaktycznych umiejętności prowadzących zajęcia. Z tego powodu ważna jest różnorodność zadań i problemów proponowanych studentom do rozwiązywania na zajęciach oraz do pracy własnej (Powązka, 2006).

5. Jeżeli na którymś z etapów procesu kształtowania pojęcia poznający podmiot nie zrozumie jakiegoś faktu i rzecz nie zostanie od razu wyjaśniona, to może to doprowadzić do powstania fałszywych przekonań. Jak wynika z badań B. Pawlik, wyprowadzenie z takiego przekonania nie jest prostym zabiegiem, gdyż *błędne poglądy – fałszywe przekonania – sterują myśleniem wielu studentów w trakcie rozwiązywania zadań stając się przyczyną popełnionych, w rezultacie takich rozumowań, błędów* (Pawlik, 2005, s. 366).

6. Badania wskazują, że fałszywe przekonania mogą pojawiać się podczas procesu uogólniania (por. przykład 7). Warto pamiętać o tym mechanizmie przy innych uogólnieniach.

7. Właściwie dobrane zadania rozwiązywane na zajęciach mogą stać się okazją do znajdowania subiektywnie nowych dla studentów twierdzeń. Stają się one okazją do rozwijania twórczej postawy studentów wobec zadania matematycznego (Major, Powązka, 2006, 2009).

Literatura

Boyer, C., B.: 1964, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa.

Bugajska-Jaszczołt, B., Treliński, G.: 2002, Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), *XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki*, CD–ROM.

Ciesielska, D., Powązka, Z.: 2012, O pewnym sposobie kontroli rozumienia wybranych pojęć z analizy matematycznej przez studentów studiów matematycznych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 61-74.

Dyrszlag, Z.: 1978, *O poziomach i kontroli rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym*, Studia i Monografie 65 (seria B), Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Opole.

Fulier, J.: 2001, *Funkcje a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*, Univerzita Konštantína Filozofa, Faculta Prírodnydh Vied, Nitra.

Gloton, R., Clero, C.: 1985, *Twórcza aktywność dziecka*, WSiP, Warszawa.

Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2008, *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogicka Fakulta, Ružomberok.

Gunčaga, J., Powązka, Z.: 2006, Badania nad wykorzystaniem pojęcia ciągłości funkcji do definiowania pochodnej funkcji w punkcie, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 5-28.

Klakla, M., Klakla, M., Nawrocki, J., Nowecki, B.: 1992, Pewna koncepcja badania rozumienia pojęć matematycznych i jej weryfikacja na przykładzie kwantyfikatorów, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **13**, 181-223.

Kołodziej, W.: 1978, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa.

Krasiński, T.: 2003, *Analiza matematyczna. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 1, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Krzyszkowski, J., Powązka, Z., Wachnicki, E.: 2010, *Problemy analizy matematycznej w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Pewne problemy dydaktyczne związane z pojęciem wartości bezwzględnej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Major, J., Powązka, Z.: 2008, Utváranie pojmu obsah rovinného útvaru na rôznych stupňoch vzdelávania, *Acta Mathematica* **11**, 135-140.

Major, J., Powązka, Z.: 2009, Finding properties of prisms and pyramids while solving stereometric problem, *Acta Mathematica* **12**, 215-220.

Maurin, K.: 1973, *Analiza,* t. 1, PWN, Warszawa.

Pardała, A.: 2012, Współczesne problemy i praktyka kształcenia matematycznego studentów, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 113-137.

Pawlik, B.: 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 365-376.

Piaget, J.: 1977, *Dokąd zmierza edukacja*, PWN, Warszawa.

Powązka, Z.: 2006, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 229-295.

Powązka, Z.: 2007, Príklady chýb v porozumení základných pojmov matematickej analýzy skúmaných u študentov učitel'stva matematiky, *Acta Mathematica* **10**, 177-182.

Powązka, Z.: 2009a, From research on developing concept of different types of integrals in students of peagoical studies, w: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (red.), *Teaching Mathematics. Innovation, new trends*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, Ružomberok, 217-227.

Powązka, Z.: 2009b, O fałszywych przekonaniach obserwowanych na zajęciach z analizy matematycznej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 213-223.

Powązka, Z.: 2010a, Examples of introducing chosen concepts of mathematical analysis, w: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (red.), *Teaching Mathematics. Innovation, new trends*, Catholic University in Ružomberok, Faculty of Education, Ružomberok, 149-154.

Powązka, Z.: 2010b, Przyczynek do badań nad przygotowaniem absolwentów szkół ponadgimnazjalnych do studiowania matematyki na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **III**, 141-146.

Powązka, Z.: 2012, Z badań nad trudnościami studentów w rozumieniu pojęcia miary i całki, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 139-154.

Powązka, Z., Zaręba, L.: 2007, Teachers studies students difficulties concerning the generalization of the concept of the Riemann integral, w: J. Povstenko (red.), *Scientific Issues J. Długosz University of Częstochowa. Mathematics XII*, Częstochowa, 347-354.

Przeniosło, M.: 2001, Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 95-124.

Rudnicki, T.: 2002, *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Rumak, T.: 1996, Problematyka kształcenia zawodowego nauczycieli matematyki na zajęciach z analizy matematycznej, *Problemy studiów nauczycielskich* **8**, 69-78.

Sierpińska, A.: 1985, O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy – na podstawie studium przypadku, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **4**, 107-167.

Siwek, H.: 1998, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Zaręba, L.: 2004, Proces uogólniania w matematyce i stosowanie w nim symbolu literowego u uczniów w wieku 10-14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 281 - 290.

Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: powazka@up.krakow.pl