FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Piotr Błaszczyk

Nota o *Über den Zahlbegriff* Davida Hilberta*

Über den Zahlbegriff Davida Hilberta opublikowano w roku 1900. Przyjmuje się, że to właśnie w tym artykule po raz pierwszy w historii matematyki przedstawiona została aksjomatyczna charakterystyka liczb rzeczywistych.

W roku 1899 ukazało się pierwsze wydanie *Grundlagen der Geometrie* Hilberta. W książce tej, w rozdziale trzecim, zatytułowanym *Teoria Proporcji* Hilbert pisze, że „liczby rzeczywiste tworzą całość, system rzeczy posiadający następujące własności", po czym wylicza aksjomaty podzielone na trzy grupy: *Aksjomaty połączenia*, *Aksjomaty uporządkowania*, *Aksjomat Archimedesa*. Z wyjątkiem *Aksjomatu zupełności* są to te same aksjomaty, aczkolwiek inaczej pogrupowane, które znajdujemy w artykule *Über den Zahlbegriff*. Pojęcia ciała uporządkowanego i ciała archimedesowego były więc w owym czasie dobrze sformułowane. Pewien kłopot nastręczał aksjomat ciągłości. W wersji przedstawionej przez Hilberta w roku 1900 wywołał on wiele kontrowersji. Wyraźnie bowiem ma inny charakter niż pozostałe aksjomaty. Nie charakteryzuje określonej własności liczb rzeczywistych (istnienie elementów neutralnych, łączność działań, liniowość porządku, itd.), ale odnosi się do pozostałych aksjomatów. Wynikało to ze splotu dwóch okoliczności: w XIX-wiecznej matematyce różne własności liczb rzeczywistych uznawano za „własność podstawową", jednocześnie przedstawiona przez Hilberta idea aksjomatyzacji liczb rzeczywistych była zupełnie nowa i nakazywała wybrać jedną z tych własności. Jak widać, Hilbert oraz jego współpracownicy nie mieli jeszcze jasności, która to ma być własność.

W dzisiejszej matematyce ciało uporządkowane jest definiowane jako ciało przemienne wraz z porządkiem liniowym $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$, który to porządek jest zgodny z dodawaniem i mnożeniem. Liczby rzeczywiste natomiast są definiowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły. Ciągłość porządku jest wyrażana na wiele równoważnych sposobów, wymieńmy trzy związane z treścią rozprawy Hilberta: (C1) żaden przekrój Dedekinda zbioru $(\mathbb{F}, <)$ nie wyznacza luki, (C2) zupełność w sensie Cauchy'ego + Aksjomat Archimedesa, (C3) każdy ograniczony ciąg elementów z $\mathbb{F}$ posiada podciąg zbieżny. Wiemy także, że liczby rzeczywiste są największym ciałem archimedesowych – największym w tym sensie, że każde ciało archimedesowe można zanurzyć w ciele liczb rzeczywistych. Ten fakt możemy interpretować jako skróconą postać *Aksjomatu zupełności*.

---

*A note on David Hilbert's article *Über den Zahlbegriff*

Z drugiego akapitu *Über den Zahlbegriff* możemy wyczytać, do jakich koncepcji liczb rzeczywistych i do jak pojmowanej ciągłości odnosi się Hilbert. Otóż opisując „metodę genetyczną", która bynajmniej nie wiąże się z historycznym porządkiem rozwoju pojęcia liczby, Hilbert przedstawia po prostu dwie konstrukcje liczb rzeczywistych. Pierwsza, którą opisuje słowami „a w końcu [definiuje się] liczbę rzeczywistą jako przekrój", to konstrukcja z rozprawy Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). Druga to konstrukcja znana z artykułu Georga Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (1872). W rozprawce Hilberta jest ona zaznaczona słowami: „a w końcu [definiuje się] liczbę rzeczywistą jako [...] ciąg podstawowy"; „ciąg podstawowy" (Fundamentalreihe) to ciąg, który w polskiej literaturze matematycznej nazywany jest ciągiem Cauchy'ego.

Dedekind skonstruował liczby rzeczywiste jako przekroje liczb wymiernych, aksjomat ciągłości zaś sformułował w wersji (C1). Sformułował też zasadę supremum oraz (w dość zawiły sposób) warunek zupełności w sensie Cauchy'ego. Nie dysponował jednak pojęciem ciała uporządkowanego i nie umiał jasno przedstawić związków między tymi własnościami. Udowodnił, że „dziedzina liczb rzeczywistych" posiada własność (C1), a dalej, że z (C1) wynikają „podstawowe twierdzenia analizy infinitezymalnej", do których zaliczył właśnie zasadę supremum oraz zupełność w sensie Cauchy'ego. W rozprawie Cantora liczby rzeczywiste są przedstawione jako ciągi liczb wymiernych spełniające warunek Cauchy'ego. Natomiast w związku z ciągłością znajdujemy tam jedynie uwagę, że liczby rzeczywiste są zupełne w sensie Cauchy'ego (chociaż jest to wyrażone w dość zawiły, a zarazem odmienny niż u Dedekinda sposób) oraz stwierdzenie, w rozumieniu Cantora oczywistego faktu, że każdy ograniczony i nieskończony zbiór liczb rzeczywistych posiada punkt skupienia. Taki mniej więcej był zastany przez Hilberta stan wiedzy dotyczący liczb rzeczywistych.

W *Über den Zahlbegriff* obok aksjomatów znajdujemy też ciekawy wstęp metodologiczny, w którym metoda genetyczna przeciwstawiana jest aksjomatycznej. Zarysowana przez Hilberta opozycja nie straciła na aktualności. I dzisiaj prowadzący kurs analizy matematycznej staje przed dylematem, czy rozpocząć wykłady od konstrukcji liczb rzeczywistych, czy też od definicji. Hilbert, preferując podejście aksjomatyczne, stanął przed pytaniem, dlaczego przedstawione aksjomaty opisują liczby rzeczywiste. W związku z tym czytamy: „Aksjomaty IV1 i IV2 są od siebie wzajemnie niezależne; nie zawierają one żadnego stwierdzenia o pojęciu zbieżności lub istnieniu granicy, jednakże wynika z nich, jak można pokazać, twierdzenie Bolzana o istnieniu granicy. Przekonujemy się zatem o zgodności naszego systemu liczbowego ze zwykłym systemem liczb rzeczywistych". Można domniemywać, że ów „zwykły system liczb rzeczywistych" to konstrukcje Dedekinda, albo Cantora.

Dzisiaj odpowiedź na pytanie, dlaczego przedstawione aksjomaty opisują liczby rzeczywiste jest prostsza. Na podstawie twierdzenia o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych, głoszącego, że każde dwa ciała uporządkowane w sposób ciągły są izomorficzne, przyjmuje się, że liczby rzeczywiste to, na mocy definicji, ciało uporządkowane w sposób ciągły. Takie podejście unieważnia pytanie o związek podejścia aksjomatycznego ze „zwykłym systemem liczb rzeczywistych". Wobec twierdzenia o kategoryczności, teza Hilberta o wyższości podejścia aksjomatycznego zyskuje matematyczne uzasadnienie. W związku z tym warto odnotować, że pierwszy, o ile nam wiadomo, dowód twierdzenia o kategoryczności podał Stanisław Zaremba w książce *Arytmetyka Teoretyczna* (1912). Dodatkową ciekawostką jest też i to, że Zaremba przyjmował aksjomatykę podaną w *Über den Zahlbegriff*, ale w dowodzie stosował technikę przekrojów Dedekinda[1].

*

* *

Zamieszczone w niniejszym tomie tłumaczenie *Über den Zahlbegriff* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego. Jest to najprawdopodobniej pierwsze tłumaczenie na język polski tej fundamentalnej dla rozwoju matematyki pracy.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail pb@up.krakow.pl

[1] Wątki zarysowane w niniejszej notatce są szeroko omawiane w książce: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen. Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2007.