FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

David Hilbert

O pojęciu liczby*

Gdy przeglądamy w literaturze liczne prace o zasadach *arytmetyki* oraz o podstawach *geometrii* i porównujemy je ze sobą, to postrzegamy, obok licznych analogii i pokrewieństw tych dwóch przedmiotów jednak różnicę, jeśli chodzi o *metodę* badania.

Uprzytomnijmy sobie najpierw sposób wprowadzenia pojęcia liczby. Wychodząc od pojęcia liczby 1, zwykle myśli się w procesie liczenia najpierw o tworzeniu dalszych całkowitych wymiernych liczb dodatnich $2, 3, 4, \ldots$ oraz rozwija się prawa ich rachowania; potem poprzez żądanie ogólnej wykonalności odejmowania dociera się do liczby ujemnej; definiuje się dalej ułamek, na przykład jako parę liczb – wtedy każda funkcja liniowa posiada miejsce zerowe –, a w końcu [definiuje się] liczbę rzeczywistą jako przekrój lub ciąg podstawowy – osiąga się przez to, że każda całkowita wymierna funkcja nieokreślona, a w ogólności każda ciągła funkcja nieokreślona ma miejsce zerowe. Możemy nazwać tę metodę wprowadzenia pojęcia liczby *metodą genetyczną*, gdyż najogólniejsze pojęcie liczby rzeczywistej wytwarzane jest poprzez kolejne rozszerzenia prostego pojęcia liczby.

Istotnie inaczej postępuje się w budowie geometrii. Tu dba się, aby zacząć od założenia istnienia wszystkich elementów, tj. przyjmuje się na początku trzy systemy rzeczy, a mianowicie punkty, proste i płaszczyzny, a potem – w istocie za przykładem Euklidesa – wiąże się te elementy we wzajemne związki, poprzez pewne aksjomaty, a mianowicie aksjomaty incydencji, uporządkowania, przystawania oraz ciągłości[1]. Jawi się przy tym koniecznym pokazanie potem *niesprzeczności* oraz *zupełności* tych aksjomatów, tj. musi zostać udowodnione, że zastosowanie ustanowionych aksjomatów nigdy nie może doprowadzić do sprzeczności oraz, dalej, że system aksjomatów wystarcza do udowodnienia wszystkich twierdzeń geometrycznych. Proponowane tu postępowanie badawcze chcemy nazwać *metodą aksjomatyczną*.

Stawiamy pytanie, czy rzeczywiście metoda genetyczna [jest dostosowana] właśnie do badania pojęcia liczby, a metoda aksjomatyczna jest stosowna tylko dla podstaw geometrii; jawi się też interesującym skonfrontowanie obu metod oraz zba-

*On the Concept of Number

**Tłumaczenie przygotowano w ramach projektu „Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway”, NN 101 287639.

[1]Por. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, *Festschrift zur Enthüllung des* Gauss-Weber *Denkmals in Göttingen*, Leipzig 1899.

danie, która z metod jest korzystniejsza, jeśli chodzi o logiczne badania podstaw mechaniki lub innych dyscyplin fizycznych.

Moja opinia jest następująca: *Mimo wysokiej wartości pedagogicznej oraz heurystycznej metody genetycznej, dla ostatecznego przedstawienia oraz pełnego logicznego zabezpieczenia treści naszej wiedzy, [to] jednak metoda aksjomatyczna zasługuje na pierwszeństwo.*

W teorii pojęcia liczby metoda aksjomatyczna przyjmuje następującą postać:

Myślimy o systemie rzeczy; nazywamy te rzeczy liczbami i oznaczamy je przez $a, b, c, \ldots$. Myślimy o tych liczbach w pewnych wzajemnych powiązaniach, których dokładne i pełne opisanie znajduje wyraz w następujących aksjomatach:

I. *Aksjomaty połączenia*

I.1. Z liczby a oraz liczby b powstaje poprzez *„dodawanie”* określona liczba c, symbolicznie:

$$a + b = c \quad \text{lub} \quad c = a + b.$$

I.2. Jeśli a oraz b są danymi liczbami, to istnieje jedna i tylko jedna liczba x, a także jedna i tylko jedna liczba y takie, że zachodzi:

$$a + x = b \quad \text{odpowiednio} \quad y + a = b.$$

I.3. Istnieje określona liczba – nazywa się 0 – taka, że dla każdej a zachodzi jednocześnie:

$$a + 0 = a \quad \text{oraz} \quad 0 + a = a.$$

I.4. Z liczby a oraz liczby b powstaje na inny jeszcze sposób, poprzez *„mnożenie”*, określona liczba c, symbolicznie:

$$ab = c \quad \text{lub} \quad c = ab.$$

I.5. Jeśli a i b są dowolnymi danymi liczbami oraz a nie jest 0, to istnieje jedna i tylko jedna liczba x, a także jedna i tylko jedna liczba y takie, że zachodzi:

$$ax = b \quad \text{odpowiednio} \quad ya = b.$$

I.6. Istnieje określona liczba – nazywa się 1 – taka, że dla każdej a zachodzi jednocześnie:

$$a \cdot 1 = a \quad \text{oraz} \quad 1 \cdot a = a.$$

II. *Aksjomaty rachowania*

Jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami, to zawsze zachodzą następujące formuły:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{II.1.} & a + (b + c) & = & (a + b) + c \\
\text{II.2.} & a + b & = & b + a \\
\text{II.3.} & a(bc) & = & (ab)c \\
\text{II.4.} & a(b + c) & = & ab + ac \\
\text{II.5.} & (a + b)c & = & ac + bc \\
\text{II.6.} & ab & = & ba
\end{array}$$

III. *Aksjomaty uporządkowania*

III.1. Jeśli a, b są dwiema różnymi liczbami, to zawsze określona jedna z nich (np. a) jest większa ($>$) od drugiej, ta ostatnia nazywa się wtedy mniejszą, symbolicznie:

$$a > b \quad \text{lub} \quad b < a.$$

III.2. Jeśli $a > b$ oraz $b > c$, to także $a > c$.
III.3. Jeśli $a > b$, to zawsze

$$a + c > b + c \quad \text{oraz} \quad c + a > c + b.$$

III.4. Jeśli $a > b$ oraz $c > 0$, to zawsze

$$ac > bc \quad \text{oraz} \quad ca > cb.$$

IV. *Aksjomaty ciągłości*

IV.1. (*Aksjomat Archimedesa*) Jeśli $a > 0$ oraz $b > 0$ są dowolnymi dwiema liczbami, to zawsze jest możliwe tyle razy dodawać a do siebie samej, że otrzymana suma ma następującą własność:

$$a + a + \ldots + a > b.$$

IV.2. (*Aksjomat zupełności*) Nie jest możliwe uzupełnienie systemu liczb poprzez dodanie innego systemu rzeczy tak, aby w powstałym przez połączenie systemie spełnione były wszystkie aksjomaty I, II, III, IV.1.; lub krótko: liczby tworzą system rzeczy, który przy zachowaniu wszystkich aksjomatów nie jest zdolny do żadnego dalszego rozszerzenia.

Niektóre z aksjomatów I 1-6, II 1-6, III 1-4, IV 1-2 są konsekwencją pozostałych, powstaje więc zadanie omówienia logicznej zależności wymienionych aksjomatów. Dla badania zasad arytmetyki zadanie to dostarcza pewnego nowego i owocnego punktu widzenia. Uznajemy przykładowo następujące fakty:

Istnienie liczby 0 (aksjomat I 3) jest konsekwencją aksjomatów I 1, 2 oraz II 1; odwołuje się ono zatem istotnie do prawa łączności dodawania.

Istnienie liczby 1 (aksjomat I 6) jest konsekwencją aksjomatów I 4, 5 oraz II 3; odwołuje się ono zatem istotnie do prawa łączności mnożenia.

Prawo przemienności dodawania (aksjomat II 2) jest konsekwencją aksjomatów I, II 1, 4, 5; jawi się ono zatem istotnie jako konsekwencja prawa łączności dodawania oraz obu praw rozdzielności.

Dowód. Mamy:

$$\begin{aligned} (a+b)(1+1) &= (a+b)1 + (a+b)1 &&= a + b + a + b, \\ &= a(1+1) + b(1+1) &&= a + a + b + b; \end{aligned}$$

w konsekwencji

$$a + b + a + b = a + a + b + b,$$

a z tego na mocy I 2

$$b + a = a + b.$$

Prawo przemienności mnożenia (aksjomat II 6) jest konsekwencją aksjomatów I, II 1-5, III, IV 1, ale już nie konsekwencją aksjomatów I, II 1-5, III; owo prawo może zostać tu wyprowadzone z pozostałych aksjomatów wtedy i tylko wtedy, gdy posłużymy się przy tym aksjomatem Archimedesa (aksjomat IV 1). Fakt ten ma szczególne znaczenie dla podstaw geometrii[2].

Aksjomaty IV 1 i IV 2 są od siebie wzajem niezależne; nie zawierają one żadnego stwierdzenia o pojęciu zbieżności lub o istnieniu granicy, jednakże wynika z nich, jak można pokazać, twierdzenie Bolzana o istnieniu punktu skupienia. Przekonujemy się zatem o zgodności naszego systemu liczbowego ze zwykłym systemem liczb rzeczywistych.

Aby udowodnić niesprzeczność przedstawionych aksjomatów wystarczy [wykorzystać] stosowną modyfikację znanych metod dowodowych. W dowodzie tym dostrzegam jednocześnie dowód istnienia ogółu liczb rzeczywistych lub – w sformułowaniu G. Cantora – dowód na to, że system liczb rzeczywistych jest zbiorem niesprzecznym (gotowym).

Wątpliwości, które czynione są wobec istnienia ogółu wszystkich liczb rzeczywistych oraz zbiorów nieskończonych w ogólności tracą w wyżej opisanym ujęciu jakiekolwiek uzasadnienie: o zbiorze liczb rzeczywistych nie mamy myśleć jako o np. ogóle wszystkich możliwych praw, wedle których mogą postępować elementy ciągu podstawowego, lecz o wiele bardziej – jak właśnie przedstawiono – [jako o] systemie rzeczy, których wzajemne związki podane są poprzez powyższy *skończony i zamknięty* system aksjomatów I-IV, i o których nowe stwierdzenia tylko wtedy mają walor poprawności, gdy można je wyprowadzić za pomocą skończonej liczby wnioskowań logicznych z owych aksjomatów.

Gdybyśmy chcieli w podobny sposób przeprowadzić dowód istnienia ogółu wszystkich mocy (lub wszystkich Cantorowskich alefów), to byłaby to próba chybiona: w rzeczywistości ogół wszystkich mocy nie istnieje, lub – w sformułowaniu Cantora – system wszystkich mocy jest zbiorem sprzecznym (niegotowym).

Göttingen, 12 października 1899

* * *

Podstawa przekładu: Hilbert, D.: Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 1900, 180-184.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
e-mail pogon@amu.edu.pl
25 września 2010 r.

[2]Por. D. Hilbert, l.c. rozdział VI.