FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Danuta Ciesielska

Twierdzenie Bézouta o przecięciu krzywych algebraicznych w pracach Eulera*

Abstract. In the paper an early history of the Bézout theorem on algebraic curves and effective methods in elimination theory is presented. The hypothesis, stated in 1665 by Newton, on the "intersection number" of algebraic curves is given. Effective methods on eliminations of one variable in the system of algebraic variables come from Euler's papers: *Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper* (Euler, 1750), *Nouvelle methode d'eliminer les quantites inconnues des equations* (Euler, 1766) and the chapter *De intersectiones curvarum* from monography *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748). Finally, Bézout's result from the paper *Reserchers sur le degré des équations résultantes...* (Bezout, 1765) is given.

Wstęp

Problem efektywnego wyznaczenia liczby punktów przecięcia dwóch krzywych opisanych wielomianowymi równaniami jest pierwszym ważnym pytaniem z zakresu teorii przecięć. Najczęściej z nazwiskiem Étienne'a Bézouta (1730-1783) kojarzone jest twierdzenie podające informację, że liczba punktów przecięcia dwóch krzywych algebraicznych nie mających wspólnej składowej nie przekracza iloczynu ich stopni. Jednak bez wątpliwości Bézout nie był ani autorem hipotezy, ani pierwszych wyników w teorii eliminacji. Pierwszeństwo w zakresie postawienia hipotezy dotyczącej liczby punktów przecięcia krzywych algebraicznych i wskazania sposobu ich wyznaczania przypisuje się Isaacowi Newtonowi (1642-1727); pogląd ten podzielają historycy matematyki (zob. np. Stillwell, 2002) oraz matematycy (zob. Kirwan, 1992). Informację o hipotezie dotyczącej oszacowania liczby punktów przecięcia można znaleźć w jego dzienniku, w notce z roku 1665:

> Liczba punktów, w których mogą przecinać się dwie linie [krzywe], nie przekracza iloczynu ich wymiarów [stopni]. Ponadto, przecinają się one w dokładnie tylu punktach, poza [punktami] urojonymi.

*Bézout's theorem in Euler's papers

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: A01A45, A01A50

Key words and phrases: history of theory of elimination in XVII and XVII centuries, system of algebraic equations.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w swych pracach Newton rozważał zwykle krzywe algebraiczne, choć zdawał sobie sprawę z tego, że istnieją krzywe przestępne, jednak uwaga z roku 1665 dotyczy tylko krzywych algebraicznych. Cytat ten potwierdza, że Newton dobrze oszacował liczbę punktów przecięcia krzywych algebraicznych. Niestety uwaga *przecinają się one w dokładnie tylu punktach, poza* [punktami] *urojonymi* wskazuje, że Newton nie zdawał sobie sprawy z tego, że rozważania dotyczące punktów przecięcia krzywych powinny być prowadzone nie tylko nad ciałem algebraicznie domkniętym, ale dodatkowo powinny dotyczyć krzywych rzutowych.

W *Arithmetica universalis* Newton opisał metody eliminacji zmiennej z układu dwóch równań, z których każde jest co najwyżej czwartego stopnia. Odpowiednią metodę przedstawia także Leonhard Euler (1707-1783), jednak nie w swych pierwszych pracach dotyczących metod eliminacyjnych, ale dopiero w pracy *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations* (zob. Euler, 1766). Rozwiązanie problemu eliminacji zmiennej pojawiło się także w pracy Colina Maclaurina (1698–1746) z 1720 roku (zob. Maclaurin, 1720).

De intersectione curvarum

Pierwsze rozwiązanie, pochodzące od Eulera, problemu efektywnego wyznaczenia punktów przecięcia dwóch krzywych algebraicznych odnajdujemy w dziewiętnastym rozdziale *De intersectione curvarum* drugiego tomu *Introductio in analysin infinitorum*, opublikowanego w 1748 roku w Lozannie (zob. Euler 1748; tłum. na angielski: Euler, 1990).

Rozdział *De intersectione curvarum* zawiera paragrafy od 457 do 485. Wstępne paragrafy dotyczą ogólnych rozważań na temat przecięcia krzywych. W paragrafie 463 Euler podaje przykład dwóch elips, które przecinają się w czterech punktach (w języku współczesnej geometrii algebraicznej powiedzielibyśmy, że Euler opisał generyczny, czyli najogólniejszy przypadek).

Paragrafy od 465 do 485 zawierają główne wyniki, dlatego zostaną dokładnie omówione. Sposób zapisu równań i graficzna forma zapisu naśladuje oryginalną pracę Eulera.

Paragraf 465

Euler rozważa parabolę określoną równaniem

$$yy - 2xy + xx - 2ax = 0$$

i okrąg

$$y^2 + x^2 - c^2 = 0.$$

Następnie dokonuje *eliminacji* zmiennej y najpierw odejmując od równania okręgu równanie paraboli

$$2xy + 2ax - cc = 0,$$

i ostatecznie wyznacza zmienną y

$$y = \frac{cc - 2ax}{2x}.$$

Zauważa, że dla każdej rzeczywistej wartości y otrzyma rzeczywistą wartość x. Następnie dokonuje podstawienia wyznaczonej wartości y do drugiego równania i otrzymuje:

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

przyjmując $c = 2a$

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0;$$

zauważa, że $x = 2a$ jest pierwiastkiem tego równania. Pozostaje już tylko rozwiązać następujące równanie:

$$x^3 - 2axx - aax - 2a^3 = 0,$$

które daje jeszcze jeden (poza $x = 2a$) rzeczywisty pierwiastek. Zauważa jeszcze, że punkt przecięcia odpowiadający $x = 2a$ leży na osi.

Paragraf 474

We wstępie Euler pisze, że jego celem jest znalezienie sposobu wyznaczenia przecięcia dwóch krzywych, a sposób polega na wyeliminowaniu zmiennej y z układu równań.
Przyjmuje, że wielomiany zmiennej x będzie oznaczał przez P, Q, R, S, T, … p, q, r, s, t, …

Dalsze rozważania rozpoczyna od pary krzywych (określonych odpowiednimi równaniami), w których zmienna y występuje tylko w pierwszej potędze:

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0.$$

Mnoży pierwsze równanie przez p oraz drugie przez P, następnie odejmuje je stronami i otrzymuje związek:

$$pQ - Pq = 0.$$

Zauważa, że każdemu rzeczywistemu pierwiastkowi tego równania odpowiada punkt na osi, *nad* którym leży punkt przecięcia krzywych (I) i (II).
Ostatecznie zaś zauważa, że:

$$y = -\frac{p}{q} = -\frac{P}{Q}.$$

Paragraf 478

Euler rozważa parę krzywych algebraicznych, w których zmienna y występuje tylko w drugiej potędze.

$$P + Ry^2 = 0,$$
$$p + ry^2 = 0.$$

Zauważa, że gdy *wyeliminujemy* z tych równań zmienną y^2 otrzymamy równanie:

$$Pr - Rp = 0,$$

zauważając podobieństwo z wynikiem z Paragrafu 477, prowadzi analogiczne rozumowanie jak w tym przypadku.

PARAGRAF 479

Dane są dwie krzywe algebraiczne

$$\text{I}$$
$$P + Qy + Ry^2 = 0,$$
$$p + qy + ry^2 = 0.$$

Aby *wyeliminować* z równań zmienną y, mnoży (I) przez p, (II) przez P, po odjęciu stronami i podzieleniu przez y otrzymuje:

$$\text{III}$$
$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Następnie mnoży (I) przez r, (II) przez R, odejmuje je stronami i otrzymuje:

$$\text{IV}$$
$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Zamiast zauważyć, że może zastosować metodę z paragrafu 478, wylicza y:

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq},$$

i stąd otrzymuje równanie już bez zmiennej y

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) - (Rp - Pr)^2 = 0.$$

W końcowej części paragrafu prowadzi rozważania dotyczące liczby rozwiązań rzeczywistych otrzymanego równania. Zastanawia się także nad przypadkiem, gdy (III) i (IV) mają wspólne czynniki.

PARAGRAF 480

W tym paragrafie Euler opisuje metodę rozwiązania układu równań, z których jedno zawiera zmienną y w stopniu 2., drugie zaś w stopniu 4.:

$$\text{I}$$
$$P + Qy + Ry^2 = 0$$
$$\text{II}$$
$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

W celu *wyeliminowania* zmiennej y mnoży równanie (I) przez p i (II) przez P, następnie po odjęciu jednego z równań od drugiego otrzymuje:

III
$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + PSy^2 = 0.$$

Stosuje metodę z paragrafu 479 do równań (I) i (III); podaje rozwiązania:

$$y = \frac{PQq - Q^2p - P^2r + PRp}{P^2s - PRq + QRp},$$

$$y = \frac{PRq - QRp + P^2s}{PQs - PRr + R^2p}.$$

Dokonując kolejnych obliczeń, otrzymuje wielomian tylko zmiennej x:

$$P^2s^2 - 2P^2Rqs - P^2Rr^2 + 3PQRps + PR^2 + PQ^2s - PQRqr - 2PR^2 - Qr^2pq$$
$$- Q^3ps + Q^3ps + Q^2Rpr + R^3p^2 = 0.$$

Paragraf 485

Euler w ostatnich paragrafach *De intersectione curvarum* opisuje ogólną, inną metodę znalezienia wielomianu *eliminacyjnego*. Metoda opisana została mało czytelnie. W celu lepszego jej objaśnienia czytelnikom ilustruje ją przykładem, który dokładnie omówię. Podobnie jak poprzednio P, Q, R oraz p, q, r, s są wielomianami zmiennej x. Opisany w tym paragrafie przykład dotyczy innego sposobu *wyeliminowania* zmiennej y z następującego układu[1]:

$$Py^2 + Qy + R = 0,$$

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0.$$

W celu eliminacji zmiennej y z układu, zgodnie z opisywaną metodą, pierwszy z wielomianów należy pomnożyć przez $py^2 + ay + b$, drugi zaś przez $Py + A$, gdzie wielomiany a, b oraz A są pomocniczo wprowadzonymi wielomianami zmiennej x, które nie mogą wystąpić w rozwiązaniu, a które powinny poniższy układ równań czynić rozwiązalnym[2]:

$$Pp = Pp, \tag{1}$$
$$Pa + Qp = pA + qP, \tag{2}$$
$$Pb + Qa + Rp = qA + rP, \tag{3}$$
$$Qb + Ra = rA + sP, \tag{4}$$
$$Rb = sA. \tag{5}$$

Zauważmy, że opisany został układ równań liniowych, gdzie niewiadomymi są wielomiany zmiennej x oznaczone tu przez A oraz a, b, a współczynniki to również

[1] Warto zwrócić uwagę, że Euler zmienił sposób zapisu wielomianu: od najwyższej potęgi zmiennej y do najniższej.

[2] Euler wprowadził dodatkowe oznaczenia: równaniu (2) przypisał α, równaniu (3) zaś β, wprowadzenie „liter" służy łatwiejszemu wyznaczeniu rozwiązania. Zabieg jest konieczny, gdyż Euler nie mógł się posłużyć ogólną metodą rozwiązywania układów równań.

wielomiany: P, Q, R oraz p, q, r, s. Równanie (1), jako tożsamościowe, można pominąć w rozważaniach. Odejdźmy od metody podstawienia, za pomocą której Euler przedstawił rozwiązanie problemu. Zamiast tego zauważmy, że fakt, że układ ma rozwiązanie (jest to układ czterech równań z trzema niewiadomymi) oznacza, że macierz rozszerzona jest osobliwa, czyli jej wyznacznik jest zerem. Macierz rozszerzona[3] ma postać:

$$\begin{pmatrix} p & P & 0 & qP - Qp \\ q & Q & P & rP - Rp \\ r & R & Q & sP \\ s & 0 & R & 0 \end{pmatrix},$$

otrzymany[4] związek między wielomianami P, Q, R oraz p, q, r, s określony równaniem wielomianowym[5]:

$$p\left(R^2\,(rP - Rp) - Q\,R\,sP\right) - P\left(-q\,R\,sP + s\,P\,sP + (r\,R - s\,Q)\,(rP - Rp)\right) \\ - (qP - Qp)\,\left(q\,R^2 - Q\,(r\,R - s\,Q) - s\,P\,R\right) = 0,$$

stanowi satysfakcjonujące rozwiązanie postawionego problemu. Opisany powyżej przykład oddaje sposób, w jaki Euler rozwiązał problem wyeliminowania zmiennej y w dowolnym układzie dwóch równań zależnych od zmiennych x oraz y.

Omówienie problemów związanych z eliminacją zmiennej

Opisanie w języku współczesnej algebry problemu eliminacji zmiennej z układu dwóch równań wielomianowych umożliwi zrozumienie istoty złożoności problemu, który sprowadza się nie tylko do wyznaczenia pewnego zbioru rozwiązań, ale do zachowania pewnych algebraicznych własności tego rozwiązania (więcej informacji na ten temat można znaleźć w książce Dumnickiego i Winiarskiego (2007)). W tym celu rozważamy wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x, y]$. Oznaczmy przez $I = \langle F, G \rangle$ ideał generowany przez F i G. Zbiór $I_y := I \cap \mathbb{R}[x]$ nazywamy ideałem eliminacyjnym zmiennej y. Zauważmy, że zbiór I_y jest ideałem pierścienia $\mathbb{R}[x]$. W istocie eliminacja zmiennej y to poszukiwanie wielomianu należącego do ideału eliminacyjnego, pożądane jest, by był to generator ideału eliminacyjnego. Jeżeli wszystkie wspólne czynniki wielomianów F i G są wielomianami z pierścienia $\mathbb{R}[x]$, to ideał eliminacyjny nie jest ideałem zerowym, czyli postawione zadanie ma rozwiązanie. Euler w swych rozważaniach początkowo zajmuje się tylko problemem znalezienia wielomianu z ideału eliminacyjnego (*De intersectione curvarum* oraz *Demonstration sur le nombre des points*), ale ostatecznie w pracy *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations* porusza problem wspólnych czynników zależnych tylko od jednej zmiennej i tym samym prawidłowo wskazuje warunek konieczny istnienia rozwiązania problemu eliminacji.

[3] Trzy pierwsze kolumny macierzy rozszerzonej są identyczne z fragmentem rugownika tego układu, zbieżność ta nie jest przypadkowa.

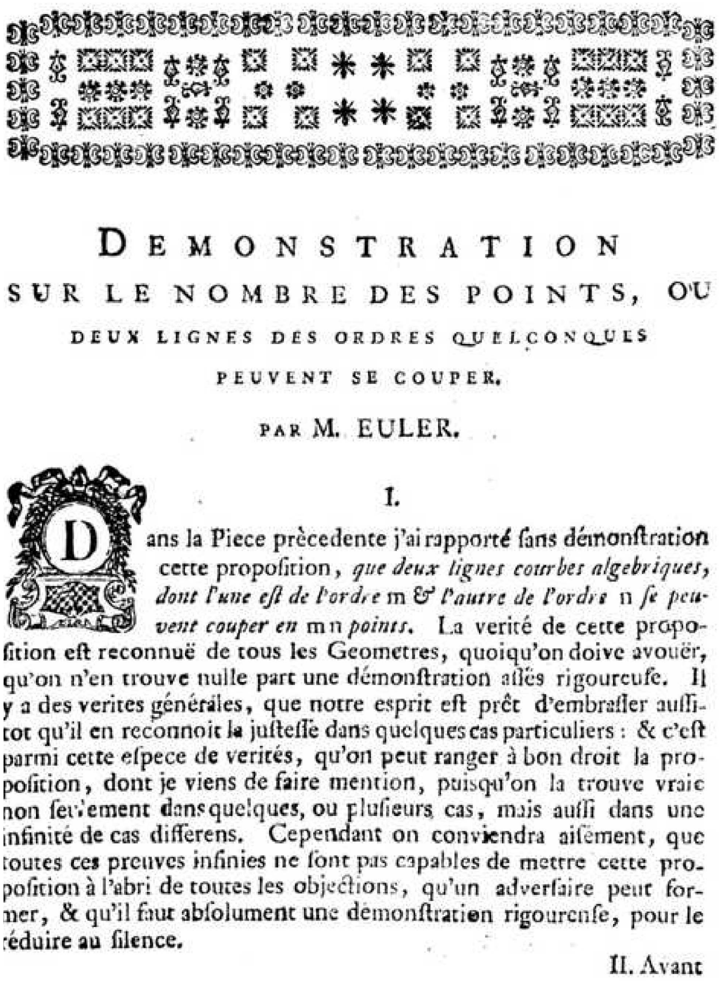
[4] Obliczenia wykonane z użyciem niekomercyjnego programu Maxima.

[5] Związek w takiej postaci nie pojawia się dziele Eulera. W postaci niezawierającej niepożądanych „liter" podany został tylko wielomian α, wielomiany β, A, a, b zostały wyznaczone jako zależne od α i pozostałych znanych wielomianów P, Q, R oraz p, q, r, s. Euler wykorzystał metodę podstawienia w celu ich wyznaczenia.

Demonstration sur le nombre des points

W krótkiej, liczącej tylko 15 stron i podzielonej na 25 paragrafów pracy Eulera z 1748 roku, która ukazała się drukiem dwa lata później (zob. Euler 1750; tłum. na angielski: Euler, 2005a) (strona tytułowa pracy: ryc. 1) w drugim paragrafie znajduje się ciekawa uwaga ogólna.

> [...] wiadomo, że liczba punktów przecięcia dwóch krzywych, z których jedna jest stopnia m, druga zaś stopnia n nie musi być równa mn, często jest mniejsza. Dwie linie proste, gdy są równoległe, nie przecinają się, linia prosta może przecinać parabolę tylko w jednym punkcie. [...] my twierdzimy, że liczba (punktów) przecięcia dwóch krzywych nie może być większa niż mn [...]. Gdy jednak będziemy liczyć (punkty) przecięcia w nieskończoności, zarówno zespolone jak i rzeczywiste, wtedy liczba (punktów) przecięcia jest równa mn.



DEMONSTRATION
SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU
DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES
PEUVENT SE COUPER.
PAR M. EULER.

I.

Dans la Piece prècedente j'ai rapporté ſans démonſtration cette propoſition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une eſt de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *ſe peuvent couper en* mn *points.* La verité de cette propoſition eſt reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonſtration aſſés rigoureuſe. Il y a des verites générales, que notre esprit eſt prêt d'embraſſer auſſitot qu'il en reconnoit la juſteſſe dans quelques cas particuliers : & c'eſt parmi cette eſpece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la propoſition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non ſeulement dans quelques, ou pluſieurs cas, mais auſſi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aiſément, que toutes ces preuves infinies ne ſont pas capables de mettre cette propoſition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverſaire peut former, & qu'il faut abſolument une démonſtration rigoureuſe, pour le réduire au ſilence.

II. Avant

Ryc. 1. Tytułowa strona *Demonstration sur le nombre des points*

Uwaga wskazuje na to, że już Euler zdawał sobie sprawę nie tylko z konieczności liczenia punktów przecięcia dwóch krzywych rozważanych nad ciałem algebraicznie domkniętym, ale także widział potrzebę innego spojrzenia na całość problemu. Informując o „przecięciach w nieskończoności" przeniósł problem na krzywe rzutowe. Brak dowodu w przypadku przecięć w „punktach w nieskończoności" w pracach Eulera moim zdaniem wynika z ograniczeń metodologicznych.

W pracy tej Euler rozważa wybrane przypadki równań. Rozpoczynając od przypadku dowolnego wielomianu zmiennych x oraz y i równania linii prostej, zauważa, że problem sprowadza się do pytania o liczbę pierwiastków wielomianu. Piąty paragraf pracy kończy słowami bardzo ważnymi dla zrozumienia istoty problemów związanych ze zmniejszaniem się liczby punktów przecięcia:

> Teraz, jeżeli najwyższe potęgi zmiennej x będą znikały oraz równanie po eliminacji zmiennej y zredukuje się do wielomianu niższego stopnia, to oznacza, że pewne punkty przecięcia krzywych będą rozciągać się do nieskończoności.

W następnych dwóch paragrafach Euler dyskutuje inne przypadki „znikających" punktów przecięcia, natomiast paragrafy 7. i 8. poświęcone są przypadkom realizującym równość w proponowanym wzorze. Euler przywołuje parabolę i krzywą paraboliczną dowolnego stopnia ($y = a^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots$). Zauważa, że krzywe te w przecięciu z prostą czasem dają mniej niż (odpowiednio) 2 i m, jednak nigdy nie więcej niż 2 i odpowiednio m wspólnych punktów.

W 16. paragrafie Euler krytykuje własną metodę eliminacji zmiennej z układu dwóch równań sześciennych, sugerując, że jest ona mało efektywna. W paragrafach 16-25 opisuje inną, bardziej efektywną metodę. Dokładnie omawia wybrane przykłady, czyniąc swoje rozważania bardziej czytelnymi. Opiszę przykład z 22. paragrafu.

Euler rozważa dwa równania drugiego stopnia:

$$yy - Py + Q = O,$$
$$yy - py + q = 0,$$

których pierwiastkami są odpowiednio A, B oraz a, b. Zauważa, że szukany wielomian ma postać:

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0,$$

którą sprowadza do postaci:

$$A^2B^2 - pAB(A + B) + q(A^2 + B^2) - ppAB - pa(A + B) + qq = 0.$$

I po podstawieniu, $AB = Q$ oraz $A + B = P$, otrzymuje równość $AA + BB = PP - 2Q$. Ostatecznie wielomian ma postać:

$$Q^2 - pPQ + aPP - 2Qp + ppQ - pqP + qq = 0,$$

w którym każdy czynnik ma stopnień 4, gdyż P i p mają stopnień 1 oraz Q i q stopień 2.

Zaproponowana metoda istotnie jest bardziej efektywna. Euler w błyskotliwy sposób stosuje wzory Vièta. Pomysł ten umożliwił mu znaczne uproszczenie rachunków. Jest to szczególnie widoczne w paragrafach 23. i 24., gdzie niewiele ponad stronę zajmuje wyeliminowanie z układu dwóch wielomianów trzeciego stopnia (oba zmiennych x i y) zmiennej y.

Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations

Praca ta pochodzi z *Memorier de l'academie des sciences de Berlin* z roku 1766 (zob. Euler, 1766,; tłum. na angielski: Euler, 2005b); właśnie w niej pojawia się informacja o osiągnięciach Newtona opisanych w *Arithmetica universalis* (zob. Newton, 1722), które Euler, w czwartym paragrafie pracy, zapowiada następująco:

> [...] w *Arithmetica universalis* Pana Newtona znajdują się pewne formuły, [...] z pomocą których operacji eliminacji można łatwo dokonać, nawet wtedy gdy wielkości eliminowane rosną w obu równaniach aż do czwartego wymiaru (stopnia) [...] Zanim wyjaśnimy moją nową metodę (eliminacji zmiennej), należy opisać tę, której używał Pan Newton.

Deux équations algébriques indéterminées étant propoſées, trouver les déterminations néceſſaires pour que ces équations obtiennent deux racines communes.

22. Soit l'une de ces deux équations du troiſieme, & l'autre du quatrieme degré.

$$z^3+Pzz+Qz+R=0, \quad \& \; z^4+pz^3+qzz+rz+s=0,$$

où l'on demande quel rapport doit ſubſiſter entre les coëfficiens, afin que ces deux équations ayant deux racines, ou deux facteurs ſimples communs. Soient $z+\alpha$, & $z+\beta$, ces deux facteurs communs, & les deux équations, doivent avoir les formes ſuivantes:

$$z^3+Pzz+Qz+R = (z+\alpha)(z+\beta)(z+A)$$
$$z^4+pz^3+qzz+rz+s=(z+\alpha)(z+\beta)(zz+az+b),$$

d'où l'on tirera d'abord celle-ci:

$$(z^3+Pzz+Qz+R)(zz+az+b)=$$
$$(z^4+pz^3+qzz+rz+s)(z+A).$$

où il faut que chaques puiſſances de z ſoient égalées entr'elles.

Ryc. 2. Rozdział 22 z *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations*

Paragrafy od 5. do 9. opisują ideę Newtona. Euler rozpoczyna od przypadku, w którym zmienna eliminowana w obu równaniach jest w pierwszym stopniu, przechodzi przez przypadek dwóch równań (ogólnych) stopnia drugiego ze względu na eliminowaną zmienną. Opisany sposób eliminacji jest identyczny ze sposobem podanym przez Eulera w paragrafie 474. drugiego tomu *Introductio in analysin infinitorum.* W paragrafach 7. i 8. opisuje sposób eliminacji zmiennej z pary równań sześciennych. Paragraf 9. poświęcony jest dyskusji problemu stopnia równania eliminacyjnego. Euler zauważa, że w przypadku pary równań czwartego stopnia wynik jest co prawda stopnia 16, ale można go zredukować do stopnia 8. Kluczowe znaczenie ma 15. paragraf, w którym Euler opisuje nową, krótszą metodę wyznaczania wielomianu eliminacyjnego oraz odpowiada na pytanie: *Dane są dwa algebraicznie niezależne równania, wyznaczyć warunki konieczne na to, by równania te miały wspólny pierwiastek*, które stawia przed paragrafem 22. Odpowiedź tę zacytuję:

Paragraf 22

Euler rozważa dwa równania, jedno trzeciego, drugie czwartego stopnia:

$$z^3 + Pzz + Qz + R = 0,$$

$$z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = 0$$

i pyta o relację współczynników konieczną do tego, by równania miały dwa wspólne pierwiastki lub dwa wspólne czynniki. Oznacza wspólne czynniki przez $z+\alpha$ i $z+\beta$. Zauważa, że wtedy wielomiany można przedstawić w postaci:

$$z^3 + Pzz + Qz + R = (z+\alpha)(z+\beta)(z+A),$$

$$z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = (z+\alpha)(z+\beta)(zz + az + b),$$

i otrzymuje stąd:

$$(z^3 + Pzz + Qz + R)(zz + az + b) = (z^4 + pz^3 + qzz + rz + s)(z + A).$$

Paragraf 23

Na mocy poprzednich rozważań otrzymuje pięć równań:

$$\begin{aligned} P + a &= p + A, \\ Q + aP + b &= q + Ap, \\ R + aQ + bP &= r + Aq, \\ aR + bQ &= s + Ar, \\ bR &= As, \end{aligned}$$

i w wyniku obliczeń otrzymuje układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} 0 = {} & ss + 2Rs(P-p) - PQs(P-p) + Qs(Q-q) + R(P-p)(Pr - rP) \\ & + R(Q-q)(R-r), \\ 0 = {} & Pss + Rs(Q-q) + PRs(P-p) + R(P-p)(Qr - Rq) + Qs(R-r) \\ & - QQs(P-p) + R(R-r)^2, \end{aligned}$$

określający poszukiwane warunki.

Bézout a metoda eliminacji zmiennej

Metoda znalezienia wielomianu z ideału eliminacyjnego opisana przez Bézouta (zob. Bézout 1765; pisał o tym Wimmer, 1990) w *Reserchers sur le degré des* *équations résultantes...* i powtórzona bez większych zmian w *Théorie générale des équations algébriques* opisuje inny algorytm rozwiązania problemu eliminacji. Bézout również sprowadza rozwiązanie problemu do wyznaczenia rozwiązania układu równań liniowych, wyznacznik opisanej w tym rozwiązaniu macierzy obecnie nazywany jest, głównie w literaturze obcej, „bezoutianem".

Bézout rozważa przypadek dwóch wielomianów F i G zmiennych x i y, oba czwartego stopnia ze względu na eliminowaną zmienną y. Pragnie opisać sposób wyznaczenia wielomianu zmiennej x będącego wynikiem wyeliminowania zmiennej y z układu F i G. Szczegółowo opisuje metodę wyznaczenia wyznacznika macierzy, a właściwie znalezienia odpowiedniego układu równań liniowych (ze względu na zmienne y w potęgach od 0 do $n-1$) pozwalającego na wyeliminowanie zmiennej y.

Niestety prace Bézouta nie są przejrzyste. Metoda zaprezentowana jest w skomplikowany sposób. Autor wychodzi od wielomianów F i G i rozważa wielomiany „zmodyfikowane". Przyjmując współczesny zapis, mamy:

$$F = f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + f_3 y^3 + f_4 y^4,$$

$$G = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + g_3 y^3 + g_4 y^4,$$

gdzie f_i oraz g_i dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$ są wielomianami zmiennej x. Oczywiście zakładamy, że $f_4 \neq 0$ $g_4 \neq 0$. Przez wielomiany „zmodyfikowane" Bézout rozumie:

$$\begin{aligned}
F^{(1)} &= f_1 + f_2 y + f_3 y^2 + f_4 y^3,\\
F^{(2)} &= f_2 + f_3 y + f_4 y^2,\\
F^{(3)} &= f_3 + f_4 y,\\
F^{(4)} &= f_4,\\
G^{(1)} &= g_1 + g_2 y + g_3 y^2 + g_4 y^3,\\
G^{(2)} &= g_2 + g_3 y + g_4 y^2,\\
G^{(3)} &= g_3 + g_4 y,\\
G^{(4)} &= g_4.
\end{aligned}$$

Następnie konstruuje wielomiany:

$$\begin{aligned}
B^{(1)} &= FG^{(1)} - GF^{(1)},\\
B^{(2)} &= FG^{(2)} - GF^{(2)},\\
B^{(3)} &= FG^{(3)} - GF^{(3)},\\
B^{(4)} &= FG^{(4)} - GF^{(4)}.
\end{aligned}$$

W ten sposób osiągnął on cel, gdyż wyznacznik macierzy opisanego układu równań jest wielomianem z ideału eliminacyjnego. Bézout zdawał sobie sprawę z tego, że zaproponowany przez niego algorytm może być uogólniony na przypadek równań dowolnych stopni. Niestety, z powodów metodologicznych (brak ogólnych metod rozwiązywania układów równań liniowych) nie potrafił udowodnić, że odkryta metoda jest poprawna w ogólnym przypadku. Zapisał to słowami pełnymi goryczy (Bézout, 1765, s. 328-329):

> Jednak do rozwiązania tego zadania, zapraszam tych szczęśliwców, którzy mają więcej czasu, którym sami dysponują niż ja.

Literatura

Bezout, E.: 1765, Reserchers sur le degré des équations résultantes..., *Memorier de l'academie des sciences,* Paris.

Dumnicki, M., Winiarski, T.: 2007, *Bazy Gröbnera – efektywne metody w układach równań wielomianowych*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Euler, L.: 1748, *Introductio in analysin infinitorum*, E102, vol. 2, Lusanne.

Euler, L.: 1750, Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper, E148*, Memorier de l'academie des sciences de Berlin* **4**, 234-248.

Euler, L.: 1766, Nouvelle methode d'eliminer les quantites inconnues des equations, E310*, Memorier de l'academie des sciences de Berlin* **20**, 91-104.

Euler, L.: 1990, *Introduction to analysis of the infinite*, Book II, tłum. J. D. Blanton, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

Euler, L.: 2005a, *A proof concerning the number on points in which two lines of arbitrary orders may intersect*, tłum. W. Marshall, The Euler Archive.

Euler, L.: 2005b, *New method to eliminate the unknown quantities in equations*, tłum. T. Doucet, The Euler Archive.

Kirwan, F.: 1992, *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge.

Maclaurin, C.: 1720, *Geometrica organica sive descriptio linearum curvarum universalis*, G. & J. Innys, London.

Newton, I.: 1722, *Arithmetica universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Benjamin & Samuel Tooke, London.

Stillwell, J.: 2002, *Mathematics and its history,* second edition, Springer UTM, New York, Berlin, Heidelberg.

Wimmer, H. K.: 1990, On the history of the bezoutian and the resultant matrix, *Linear Algebra and its Applications* **128**, 27-34.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail dciesiel@up.krakow.pl