FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Otto Hölder

Aksjomaty wielkości i teoria miary*

O aksjomatach arytmetyki mówiono dotąd w dwóch znaczeniach. Po pierwsze, aksjomatami arytmetyki nazywane bywają te fakty, które wolałbym nazywać aksjomatami wielkości lub aksjomatami teorii wielkości i którymi zajmę się niżej. Z drugiej strony, mówi się też, że arytmetyka w węższym sensie, tj. arytmetyka liczb całkowitych, opiera się na faktach niedowodliwych, czyli aksjomatach. Tak więc von Helmholz nazywa aksjomatem arytmetyki formułę:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

na której H. Grassmann opiera teorię dodawania liczb całkowitych[1]. Ten wzór jest jednak tylko opisem procedury dodawania. Mówi on, że liczba, którą uważamy za sumę a oraz liczby $b + 1$ następującej po b, następuje w ciągu liczbowym po $a + b$. Wzór ten ustala więc, że liczby $a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, \dots, a + c$ mają następować po sobie, a zatem ustala, iż liczbę $a + c$ znajdujemy w ten sposób, że poczynając od następującej po a liczby $a+1$ tak długo ustawiamy w szereg kolejno następujące po sobie liczby, aż równocześnie doliczymy od 1 do c. Dlatego lepiej jest uważać wprowadzony wzór za *definicję* jednego z pozostających pod naszą kontrolą pojęć, a nie za *aksjomat*.

Za oczywiste, acz niedowodliwe założenie można rzecz jasna uważać to, że ową procedurę dodawania można zawsze przeprowadzić. Można znaleźć w arytmetyce jeszcze wiele tego rodzaju założeń, które polegają na tym, że pewne procedury, które – jak powiadamy – przebiegają wedle określonych reguł, można zawsze przeprowadzić w określony sposób, a w pewnych przypadkach kontynuować też bez końca. Również to, że procedura prowadzi do zakończenia [obliczeń] może być w pewnych okolicznościach oczywiste, a w innych wymagać musi udowodnienia. Każde takie założenie, które zostanie przyjęte jako oczywiste, pozostaje w ścisłym związku z regułą, wedle której przebiega odnośna procedura, tj. z pojęciem [tej] procedury, i wydaje mi się, że nie możemy tych założeń tak wydzielić z naszego myślenia, iż moglibyśmy wyprowadzić z określonej ich liczby całą niższą i wyższą arytmetykę, bez czynienia nowych, podobnych założeń. Chodzi tu o rodzaj

*The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement

[1] Por. H. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, 1861, s. 4, nr 15; von Helmholz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3 tomy, 1885, s. 363 (z: „Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet", 1887, s. 11–52). Von Helmholz pojmuje zresztą w *op. cit.* treść arytmetyki oraz teorii wielkości dokładnie tak, jak czyni się to w przedstawionej tu pracy. (Por. też F. Klein, *Mathematische Annalen*, **37**, s. 572.)

doświadczenia, którego jednak nie zaliczymy do właściwego doświadczenia zmysłowego, gdyż może ono mieć miejsce także [jedynie] w myśli, a które jest w zasadzie tym samym – kombinatorycznym – rodzajem doświadczenia, którym czasami zastępujemy zewnętrzne [doświadczenie] zmysłowe, mianowicie wtedy, gdy mówimy, że dowodzimy dedukcyjnie. Jawi się zatem jako celowe, aby wszelkie tego rodzaju wytwory myśli oznaczać jako „czysto logiczne" i możemy powiedzieć, gdy tak uczynimy, że arytmetyka liczb całkowitych może zostać zbudowana [na sposób] czysto logiczny[2] i nie zakłada żadnych aksjomatów. To samo zachodzi dla arytmetyki ułamków oraz liczb niewymiernych, gdy zostaną one stosownie zdefiniowane.

Inaczej rzeczy się mają w geometrii oraz mechanice, gdzie muszą zostać przyjęte pewne aksjomaty, które wywodzą się z doświadczenia zmysłowego (lub, jak wolą niektórzy, z oglądu). W podobny sposób jak geometrię i mechanikę także ogólną teorię wielkości mierzalnych ugruntować można na dobranej liczbie faktów, które chciałbym określać jako aksjomaty wielkości lub aksjomaty ilości. Teoria wielkości mierzalnych stosuje się w taki sam sposób do porównywania i dodawania czasów, mas, odcinków, powierzchni itd. Aby jednak od razu zapobiec nieporozumieniom, zauważę, że aksjomaty teorii wielkości nie są w geometrii przyjmowane i stosowane do odcinków i powierzchni w postaci, w której tu zostaną wprowadzone. Wręcz przeciwnie, przedstawia się aksjomaty czysto geometryczne np. dla punktów i odcinków prostej, z których można potem udowodnić (por. część druga), że dla odcinków zachodzą fakty, które w ogólnej teorii wielkości są zakładane jako aksjomaty[3].

Teoria wielkości mierzalnych została rozwinięta na wysokim poziomie już przez Euklidesa. Współcześnie doświadczyła pogłębionego potraktowania z różnych stron. Mimo to teoria ta wydaje mi się jeszcze niewystarczająco dokładnie [przedstawiona]; w niektórych nowych opracowaniach zakradły się błędy i niejasności i dlatego sądzę, że potrzebne jest nowe rozwinięcie tej ważnej i podstawowej teorii.

---

[2] Uważam za niekwestionowane, że ogół badań, które w sensie tego tekstu są „czysto logiczne", nie sprowadza się do przyjętych w filozofii formalizmów logicznych oraz gotowego rachunku symboli.

[3] Podczas gdy dla odcinków musi zostać założone, że dwa odcinki można porównywać i że przy tym okazują się one koniecznie równe bądź nierówne, to na gruncie aksjomatów, w których w ogóle nie występuje słowo „powierzchnia" i na gruncie pewnej definicji można udowodnić, że dwie figury mogą być porównywane pod względem powierzchni (Schur, *Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft* 1892; Killing, *Grundlagen der Geometrie*, tom 2, 1898, rozdział 5, §5; Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* 1899, s. 48). Zasadza się to na tym, że równość odcinków uważana jest w geometrii za pojęcie „pierwotne", a równość powierzchni za [pojęcie] „konstruowalne" (por. moją pracę: *Anschauung und Denken in der Geometrie* 1900, s. 2 oraz Zindler, *Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der K. Akad. d. Wiss. zu Wien* tom 118, 1889: *Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntniss*, s. 32; Zindler nazywa pojęcia pierwotne „aksjomatycznymi").

Część Pierwsza

Wielkości i liczby pomiarowe

§1. Aksjomaty

Aksjomaty wielkości, tj. fakty przyjęte w teorii (absolutnych) wielkości mierzalnych, są następujące[4]:

[4] Celowe jest poczynienie założenia, że nie istnieją żadne równe wielkości, które są rozróżnialne, a więc nieidentyczne. Przez to odpadają aksjomaty [mówiące], że dwie wielkości są równe, gdy są równe trzeciej i że równe dodane do równych dają równe. Fakty te muszą naturalnie zostać uwzględnione w zastosowaniach (por. aksjomat ζ w §18).
Moim celem jest tu jedynie podanie prostego systemu aksjomatów, z którego dadzą się wyprowadzić własności zwykłego kontinuum wielkości; nie zamierzam, jak czynił to Bettazi (*Teoria delle grandezze*, 1890), wprowadzać szczególnych rodzajów wielkości lub rozszerzać powszechnie przyjętego pojęcia kontinuum, co próbował czynić Veronese w swoim *Continuo assoluto* (*Atti della R. Acc. dei Lincei*, ser. 4, menorie d. cl. d. sc. f. vol. 6, 1889, s. 613; por. też *Fondamenti di geometria a più specie di unita rettilinee esposti in forma elementare*, 1891, po niemiecku w Schepp 1894).
Można jeszcze powiedzieć co nieco o niezależności zaproponowanych aksjomatów. Założę przy tym jednak, że zachodzą aksjomaty I, III, VI. Można wtedy pokazać, że aksjomaty II, IV, V, VII są w określonym sensie niezależne od siebie oraz od już przyjętych aksjomatów. Istnieje mianowicie system rzeczy, dla których nie zachodzi aksjomat II, podczas gdy aksjomaty I, III, IV, V, VI, VII są spełnione, a mianowicie ogół dodatnich liczb całkowitych. Istnieje również system rzeczy, dla których nie zachodzi aksjomat VII, podczas gdy wszystkie pozostałe aksjomaty są spełnione, mianowicie ogół wszystkich dodatnich liczb wymiernych. Rozmaitość, dla której zachodzą wszystkie aksjomaty oprócz IV, jest przedstawiona przez wszystkie liczby rzeczywiste, dodatnie i ujemne (wymierne i niewymierne) wraz z zerem, gdy pojęcia „większa" i „mniejsza" bierze się w sensie algebraicznym. Aby teraz otrzymać jeszcze rozmaitość, która nie spełnia jedynie aksjomatu V, rozważa się wszystkie pary liczbowe (x, y), gdzie x przebiega wszystkie dodatnie liczby różne od zera, a y wszystkie liczby od a do b z włączeniem samych liczb a oraz b, które są dodatnie i różne od zera. Niech przy tym $(x, y) > (x', y')$ gdy albo $x > x'$, albo $x = x'$ oraz $y > y'$. Suma $(x, y) + (x'', y'')$ niech będzie zdefiniowana wzorem $(x + x'', \overline{y})$, gdzie $\overline{y}$ oznacza większą z liczb y i y''.
Wybrane tutaj aksjomaty od I do VI są zgodne z zasadami I do III u Veronese (por. *Atti d. Acc. d. Linc.*, *op. cit.*, s. 604 i 610). Aksjomat VII to w zasadzie aksjomat ciągłości Dedekinda (por. aksjomat κ w §18 oraz uwaga na s. 40), który czyni z naszego systemu wielkości kontinuum, *pod warunkiem, że wprzódy spełnione są aksjomaty od I do VI.*
Naturalnie mogą zostać przyjęte różnorodne równoważne systemy aksjomatów. Tak więc, można np. tymczasowo wyłączyć z rozważań pojęcia „większa" i „mniejsza", przy czym znów, jak w tekście, nieidentyczne wielkości uważane mają być za różne, a poza tym założone będzie tylko:

[1] Dwie wielkości a i b mają w określonym porządku jednoznacznie wyznaczoną sumę $a + b$.

[2] $a + b$ jest różna od a i od b.

[3] $(a + b) + c = a + (b + c)$.

[4] Gdy a jest różna od b, to istnieje albo x taka, że $a + x = b$, albo x' taka, że $b + x' = a$.

Pokazuje się natychmiast, że z obu wspomnianych w [4] wielkości x oraz x' w danym przypadku może istnieć tylko jedna, bowiem w przeciwnym wypadku byłoby $(a + x) + x' = a$, tj. $a + (x + x') = a$, co stoi w sprzeczności z [2]. Można potem ustalić, że a będzie nazywana mniejszą od b, gdy $a + x = b$ i wtedy aksjomat I jest oczywiście spełniony. Pojęcia „większa" i „mniejsza" okazują się przy tym ujęciu pojęciami *konstruowanymi*, podczas gdy w tekście traktowane są jako *pierwotne*, tj. *aksjomatyczne*.
Z zaproponowanych w tekście aksjomatów nie wszystkie byłyby jeszcze spełnione; tak np. spełnione byłyby tylko pierwsze części aksjomatów IV i V. Jeśli zażądamy teraz jeszcze co następuje:

[5] Dla dwóch wielkości a i x istnieje zawsze trzecia y taka, że $y + a = a + x$,

I. Gdy dane są dwie wielkości a oraz b, to albo a jest identyczna z b ($a = b$, $b = a$), albo a jest większa od b ($a > b$, $b < a$), albo, na odwrót, b jest większa od a, a a mniejsza od b; te trzy przypadki nawzajem się wykluczają.

II. Dla każdej wielkości istnieje [od niej] mniejsza.

III. Dwie wielkości a oraz b, które mogą również być identyczne, wytwarzają w ustalonym szeregu jednoznacznie określoną sumę $a + b$.

IV. $a + b$ jest większa od a i większa od b.

V. Jeśli $a < b$, to istnieje x taka, że $a + x = b$ oraz y taka, że $y + a = b$.

VI. Zawsze zachodzi $(a + b) + c = a + (b + c)$.

---

to widać natychmiast, że również druga część aksjomatu V jest spełniona. Można teraz poza tym udowodnić również drugą część IV, która mówi, że $b < a + b$. Zauważmy najpierw, że na mocy [2] $a + b$ jest w każdym razie różna od b; musi być zatem albo $b < a + b$, albo $a + b < b$. Jeśli jednak byłby to ten ostatni przypadek, to mielibyśmy $(a + b) + x = b$, a więc na mocy [5] $y + (a + b) = b$, lub $(y + a) + b = b$, co jest niezgodne z [2]. A zatem IV jest teraz spełniony i tylko jeszcze dwa aksjomaty, które są analogiczne do II oraz VII, musiałyby w odpowiedniej formie zostać wprowadzone.

Można próbować zmieniać system aksjomatów w inny jeszcze sposób, np. tak, iż pozostawia się aksjomaty od I do IV, a dalej VI i VII, podczas gdy aksjomat V zostaje zastąpiony stwierdzeniami, które nie zawierają niczego o równości, lecz odnoszą się tylko do pojęć „większa” i „mniejsza”. Żąda się przy tym, aby założone były na początku konsekwencje zawarte w punktach 1, 2, 3 z §2. Jeśli $a < b$, to wszystkie wielkości mogą teraz zostać podzielone na dwie klasy tak, iż do pierwszej wchodzą te, które dodane do a tworzą sumę $< b$, a do drugiej te, które tworzą sumę $\geqslant b$. Pokazuje się, że w konsekwencji przyjętych teraz warunków każda wielkość pierwszej klasy musi być mniejsza od każdej [wielkości] klasy drugiej; nie widać stąd jednak jeszcze, że rzeczywiście muszą istnieć wielkości pierwszej klasy, i dlatego wprowadzamy jeszcze następujący postulat:

[6] Jeśli $a < b$, to istnieje c taka, że również $a + c$ jest mniejsza od b.

Wynika teraz z aksjomatu VII, że istnieje wielkość ξ taka, iż dla $\xi' < \xi$ suma $a + \xi' < b$, a dla $\xi'' > \xi$ suma $a+\xi'' \geqslant b$. Możemy nawet powiedzieć, że w ostatnim przypadku musi być $a+\xi'' > b$, gdyby bowiem było $a+\xi'' = b$, to moglibyśmy (na mocy punktu 3 z §2) znaleźć ξ''' między ξ oraz ξ'' i z ostatniego równania wynikałoby wtedy $a + \xi''' < b$, co byłoby sprzeczne z własnościami wielkości ξ, ponieważ byłoby wtedy $\xi''' > \xi$. Nie możemy jednak jeszcze zaniedbać dowodu, że istotnie $a + \xi = b$ (zapomniano o tym w Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 2 wydanie, tom 1, 1898, s. 8 i 9). Gdyby było $a + \xi < b$, to na mocy [6] istniałaby η taka, że $(a + \xi) + \eta < b$, tj. $a + (\xi + \eta) < b$, a to przeczy własnościom wielkości ξ. Dotąd jednak nie jest widoczne, że nie może być $a + \xi > b$. Dlatego wprowadzam jeszcze aksjomat:

[7] Jeśli a oraz b są jakimikolwiek wielkościami, to istnieje $a' < a$ i to taka, że $a' + b > a$.

Gdyby było $a + \xi > b$, to na mocy [6] istniałaby η taka, że $a + \xi > b + \eta$. Dalej, ponieważ na mocy [7] musiałaby istnieć $\xi' < \xi$ taka, że byłoby $\xi' + \eta > \xi$, to mielibyśmy wtedy $a + (\xi' + \eta) > a + \xi > b + \eta$, tj. $(a + \xi') + \eta > b + \eta$, z czego wynika (w istocie nie bezpośrednio), że $a + \xi' > b$. To z kolei jest znów sprzeczne z własnościami wielkości ξ, ponieważ założono $\xi' < \xi$.

Tym samym udowodniona została pierwsza część V; aby udowodnić drugą część, musielibyśmy wprowadzić więcej jeszcze aksjomatów.

Hilbert postawił niedawno problem *niesprzeczności* aksjomatów wielkości (*Mathematische Probleme*, *Gött. Nachr.* 1900). Dotąd zwykło się uważać, że niesprzeczność aksjomatów od I do VII została wykazana poprzez arytmetyczne ugruntowanie teorii liczb (wymiernych i niewymiernych). Por. nadto s. 21 oraz uwaga 22. Z niesprzeczności aksjomatów od I do VII można wywieść niesprzeczność aksjomatów geometrycznych od (α) do (κ) oraz na odwrót (por. uwagę na s. 40).

VII. Gdy wszystkie wielkości są podzielone na dwie klasy tak, że każda wielkość przydzielona jest do jednej i tylko jednaj klasy, każda klasa zawiera [jakieś] wielkości oraz każda wielkość pierwszej klasy jest mniejsza od każdej wielkości drugiej klasy, to istnieje wielkość ξ tego rodzaju, że każda $\xi' < \xi$ należy do pierwszej klasy, a każda $\xi'' > \xi$ należy do drugiej klasy. Sama ξ może należeć do pierwszej lub drugiej klasy, zależnie od rozważanego przypadku[5].

§2. Najprostsze konsekwencje aksjomatów I–VI

1. Jeśli $a < a'$ oraz $a' < a''$, to na mocy V istnieją dwie wielkości x oraz x' takie, że $a + x = a'$ oraz $a' + x' = a''$. Zachodzi więc także $(a + x) + x' = a''$, a zatem na mocy VI $a + (x + x') = a''$, a dalej na mocy IV $a < a''$. Z $a < a'$ i $a' < a''$ wynika więc $a < a''$.

2. Jeśli znów $a < a'$, a x jest tak wybrana, że $a+x = a'$, to $b+(a+x) = b+a'$, a zatem $(b + a) + x = b + a'$, a więc $b + a < b + a'$. Jeśli przy tym y dobrana jest tak, że $y + a = a'$, to otrzymuje się $(y + a) + b = a' + b$, a więc $y + (a + b) = a' + b$, skąd na mocy IV $a + b < a' + b$. Tak więc z $a < a'$ wynika $b + a < b + a'$ oraz $a + b < a' + b$, gdzie b oznacza jakąkolwiek wielkość.

Dalej, jeśli założymy $a < a'$ oraz $b < b'$, to dostaje się $a + b < a' + b < a' + b'$; otrzymujemy zatem twierdzenie, że *mniejsze dodane do mniejszego daje mniejsze.*

3. Niech $a < b$. Ustalamy znowu x tak, iż $a + x = b$ i zakładamy, co możliwe jest na mocy II, że $x' < x$; wtedy (na mocy §2, 2) $a+x' < a+x$, tj. $< b$. Z drugiej strony, na mocy IV $a + x' > a$. Gdy więc $a < b$, to istnieje co najmniej jedna wielkość, która jest $> a$ oraz $< b$, tj. *istnieje co najmniej jedna wielkość między a i b.*

4. *Dla każdej wielkości istnieje* [od niej] *większa*, ponieważ przecież np. $a+a > a$.

5. Wielkość x postulowana w aksjomacie V jest wyznaczona *jednoznacznie* (jednoznaczność jednego sposobu odejmowania)[6]. Gdyby mianowicie było $a + x = b$, a jednocześnie $a + x' = b$, to byłoby $a + x = a + x'$. Gdyby jednak było $x > x'$ lub $x < x'$, to ostatnie równanie stałoby w sprzeczności z punktem 2 tego paragrafu. Na mocy aksjomatu I pozostaje więc możliwe tylko, że $x = x'$.

Podobnie dowodzi się, że postulowana w V wielkość y jest wyznaczona jednoznacznie (jednoznaczność drugiego sposobu odejmowania).

---

[5] W §4 zostanie pokazane, że tak zwany aksjomat Archimedesa jest konsekwencją aksjomatu ciągłości (VII) oraz pozostałych aksjomatów, a z drugiej strony, jeśli weźmie się pod uwagę tylko dodatnie liczby wymierne, to widać, iż aksjomaty od I do VI mogą być spełnione łącznie z aksjomatem Archimedesa, nie pociągając przy tym za sobą aksjomatu ciągłości. Większa część uzyskanych w dalszym ciągu wyników pozostaje w mocy, gdy przyjmie się aksjomaty od I do VI wraz z aksjomatem Archimedesa, bez postulowania aksjomatu VII.
Hilbert zastąpił aksjomat ciągłości Dedekinda dołączony do innych aksjomatów wielkości poprzez dwie zasady: aksjomat Archimedesa oraz „aksjomat zupełności” (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 1900, s. 180).

[6] Por. Veronese, *Atti d. R. Acc. d. Lincei, ser. 4, memoire d. cl. d. sc. f.*, *op. cit.*, s. 606 u góry.

§3. Wielokrotność[7]

1. Aby bez niejednoznaczności przedstawić zwielokrotnienie wielkości przyjmuje się:

$$2a = a + a, \quad 3a = (a + a) + a, \quad 4a = ((a + a) + a) + a,$$

i tak dalej, a więc w ogólności mamy:

$$na = (n - 1)a + a.$$

Ponieważ prawo łączności podane jest w aksjomacie VI dla trzech wielkości, więc jak dobrze wiadomo prawo to zachodzi dla dowolnie wielu wielkości. Jeśli weźmie się $m + n$ wielkości, które wszystkie równe są a, to widać, że równanie

$$ma + na = (m + n)a \tag{1}$$

zachodzi dla dowolnej wielkości a oraz dwóch dowolnych (całkowitych, dodatnich) liczb m oraz n.

Poprzez wielokrotne zastosowanie równania (1) otrzymuje się:

$$ma + ma + ma + \ldots = (m + m + m + \ldots)a,$$

gdzie sumy z lewej i z prawej zawierają m' składników. Tak więc,

$$m'(ma) = (m'm)a \tag{2}$$

dla dowolnych liczb całkowitych m oraz m'.

2. Z (1) wynika, z pomocą aksjomatu IV, że $(m + n)a > ma$ i widać teraz, że $m'a \gtreqless ma$, *w zależności od tego, czy dla liczb całkowitych* m' *i* m *zachodzi* $m' \gtreqless m$. W szczególności z $m'a = ma$ wynika, że liczby całkowite m oraz m' są sobie równe.

Poprzez wielokrotne stosowanie punktu 2 §2 widać też, *że* $ma \lesseqgtr mb$, *w zależności od tego, czy* $a \lesseqgtr b$; można więc w szczególności zawsze wnioskować z $ma = mb$, że wielkości a i b są sobie równe, jakakolwiek byłaby liczba całkowita m.

3. *Jeśli dana jest wielkość* a *oraz liczba całkowita* n, *to zawsze można znaleźć wielkość* b *taką, że* $nb < a$. Można mianowicie, na mocy II, najpierw znaleźć $a' < a$, a potem a'' takie, że $a' + a'' = a$. Jeśli teraz wybierze się a_1 mniejszą od a' i jednocześnie mniejszą od a'', to, na mocy punktu 2 §2, mamy $a_1 + a_1 < a' + a''$, tj. $2a_1 < a$. Można teraz tak samo wyznaczać a_2 tak, że $2a_2 < a_1$, potem a_3 tak, że $2a_3 < a_2$, itd. Wybiera się teraz liczbę całkowitą ν tak, że $2^\nu > n$ i przyjmuje $a_\nu = b$, a wtedy $nb < a$, c.b.d.u.

§ 4. Aksjomat Archimedesa[8]

Niech a i b będą dwiema wielkościami oraz niech $a < b$. Chcemy udowodnić, że istnieje liczba całkowita n taka, iż $na > b$. Załóżmy najpierw, że na odwrót:

[7] Rozważania tego paragrafu, podobnie jak poprzedniego, zakładają jedynie aksjomaty I–VI.

[8] Ten aksjomat (*Archimedis Opera*, rec. Heiberg, vol. I, 1880, s. 11) okazuje się tutaj twierdzeniem dowodliwym. Nie panuje pożądana jasność na temat jego związku z aksjomatem VII. Stolz zauważył (*Math. Ann.* **22**, s. 510), że aksjomat Archimedesa jest konsekwencją ciągłości, gdy jest ona definiowana w sensie Dedekinda, tj. przez aksjomat VII. Ta uwaga jest słuszna,

gdy założone zostaną również aksjomaty od I do VI. Dowód podany przez Stolza *op. cit.*, s. 511 oraz w jego *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, część I 1885, s. 82 i nast. nie jest jednak wystarczający, czego, jak sądzę, nie trzeba tu dowodzić, gdyż Stolz wycofał swoje uwagi pod wpływem zarzutów Veronese (*Math. Ann.* **39**, s. od 107 do 112).
Veronese (*op. cit.*, s. 612) opowiadał się za tym, że pojęcie kontinuum powinno zostać sformułowane inaczej, niż sposobem podanym przez Dedekinda, że aksjomat Dedekinda (nasz aksjomat VII) zawiera aksjomat Archimedesa, że, dalej, (por. Veronese s. 603) Stolza definicja ciągłości (w *Vorlesungen über Arithmetik*, s. 82) zakłada aksjomat Archimedesa i że, w konsekwencji, dowód Stolza tego aksjomatu jest zbyteczny.
Sformułowanie, iż aksjomat Archimedesa miałby być „zawarty" w aksjomacie ciągłości Dedekinda może prowadzić do nieporozumień. Podkreślam, że aksjomat Archimedesa może zostać *wyprowadzony* z aksjomatu VII, przy pomocy aksjomatów od I do VI, ale tylko na sposób podany w tekście lub podobny i dlatego taki dowód w żadnej mierze nie jest zbędny.
Dalej, jeśli chodzi o wybór aksjomatów, to jest on oczywiście do pewnego stopnia dowolny i co najwyżej względy celowości rozstrzygać mogą o tym, czy na pierwszeństwo zasługuje aksjomat ciągłości Dedekinda wraz z aksjomatami od I do VI, czy też inne aksjomaty.
Veronese (*op. cit.*, s. 612, zasada IV) jako aksjomat ciągłości wprowadza następujący postulat: Gdy dwie wielkości x oraz x' zmieniają się tak, że x stale rośnie, x' stale maleje, że zawsze pozostaje $x < x'$, a $x' - x$ staje się nieskończenie mała, to w systemie istnieje także wielkość, która jest większa od wszystkich wartości przyjmowanych przez x i mniejsza od wszystkich wartości przyjmowanych przez x'.
Jeśli pominie się zależność, która ustanowiona jest między zmiennymi x i x' poprzez wyobrażenie ich czasowej zmienności, to zakładane jest tu co następuje:
Dane są dwie klasy wielkości: wielkości x oraz wielkości x'; żadna wielkość nie może należeć jednocześnie do obu klas, [przy czym] nie jest konieczne, aby obie klasy razem wyczerpywały ogół wszystkich wielkości lub wszystkich wielkości przedziału. Każda wielkość x jest mniejsza od każdej wielkości x', wśród x nie ma największej, a wśród x' nie ma najmniejszej wielkości i dla każdej jakkolwiek wybranej wielkości δ znaleźć można x oraz x' takie, że $x' - x < \delta$. Postulat Veronese stwierdza, że przy tych założeniach istnieje leżąca pomiędzy obu klasami wielkość różna od x oraz od x'. Należy nadto zauważyć, że ten postulat jest co najmniej zmodyfikowany w formie, poprzez opuszczenie owego obecnego w sformułowaniu Veronese związku pomiędzy zmiennymi x oraz x'.
Z tego postulatu nie można wywieść aksjomatu Archimedesa, gdy założone będą tylko aksjomaty od I do VI, ani tym bardziej aksjomatu ciągłości Dedekinda. Jednakże ten ostatni można wydedukować ze (zmodyfikowanego) postulatu Veronese, gdy założy się [przy tym] aksjomat Archimedesa łącznie z aksjomatami od I do VI. Jeśli mianowicie wyobrazimy sobie podział *wszystkich* wielkości, jak pomyślane jest to w aksjomacie Dedekinda (VII), a dalej, jeśli X oznacza wielkość pierwszej, a Y wielkość drugiej klasy oraz δ jakąkolwiek wielkość, to w ciągu $X, X+\delta, X+2\delta, X+3\delta, \ldots$ muszą wystąpić, na mocy aksjomatu Archimedesa, wielkości, które są $> Y$. Można więc znaleźć też dwie wielkości $X + (\nu - 1)\delta$ oraz $X + \nu\delta$, które różnią się o δ i z których $X + (\nu - 1)\delta$ należy do pierwszej, a $X + \nu\delta$ należy do drugiej klasy. δ była tutaj dowolna. Gdyby teraz ani w pierwszej klasie nie było wielkości największej, ani w drugiej wielkości najmniejszej, to założenia zmodyfikowanego postulatu Veronese byłyby spełnione, a to prowadziłoby do wielkości, która nie należy do żadnej z obu klas, wbrew pierwotnemu założeniu, iż wszystkie wielkości mają być podzielone na obie klasy. Jeśli jednak pierwsza klasa zawierałaby wielkość największą x_1, a jednocześnie druga klasa [zawierałaby] wielkość najmniejszą x_1', to obie te wielkości musiałyby być różne, ponieważ powyżej, jak w aksjomacie VII, każda wielkość przydzielona została do jednej tylko klasy i na mocy punktu 3 §2 musiałaby istnieć między x_1 oraz x_1' wielkość, która znów nie mogłaby należeć do żadnej klasy, co przecież przeczy pierwotnie założonym własnościom podziału. Pozostaje więc tylko [ta możliwość], że albo pierwsza klasa zawiera wielkość największą x_1, a druga klasa nie zawiera żadnej wielkości najmniejszej, albo na odwrót druga klasa [zawiera] wielkość najmniejszą x_1', a pierwsza [nie zawiera] żadnej największej. W pierwszym przypadku x_1, a w drugim x_1' byłaby wielkością, której istnienia żąda aksjomat Dedekinda (VII). Aksjomat ten jest zatem spełniony (por. też Veronese *op. cit.*, s. 613, No 5a)).
Przy wyborze aksjomatu ciągłości Veronese jest się zmuszonym, gdy chce się opisać zwykłe kontinuum, wprowadzić także specjalnie aksjomat Archimedesa (w Ascoli, *R. Instituto Lombardo di Sc. e. Lett. Rend.*, ser. II, vol. **28**, 1895, s. 1060 i nast. podane jest w istocie to samo

dla każdej liczby całkowitej n wielkość $na \leqslant b$ tak, iż każdą wielkość, która jest mniejsza od wielokrotności a przypisać można do pierwszej klasy, zaś wszystkie pozostałe wielkości do drugiej klasy. Ponieważ np. a należy do pierwszej, zaś b do drugiej klasy, więc istotnie w każdej klasie występują [jakieś] wielkości. Jeśli c jest wielkością drugiej klasy, to $na \leqslant c$ dla każdej liczby całkowitej n. Jeśli c_1 należy do pierwszej klasy, to istnieje liczba całkowita n_1 taka, że $c_1 < n_1 a$, a ponieważ jednocześnie dla *tej* n_1 musi zachodzić nierówność $n_1 a \leqslant c$, więc $c_1 < c$. Każda wielkość pierwszej klasy jest zatem mniejsza od każdej [wielkości] drugiej [klasy]. Na mocy VII można wywnioskować istnienie wielkości ξ tego rodzaju, iż każda ξ', która jest mniejsza od ξ, należy do pierwszej [klasy], a każda ξ'', która jest większa od ξ, należy do drugiej klasy.

Wielokrotność a nie może być ani większa od ξ, ani równa ξ. Gdyby bowiem było $n_1 a > \xi$, istniałaby (§2, punkt 3) pomiędzy $n_1 a$ oraz ξ wielkość, która, ponieważ byłaby $< n_1 a$, musiałaby należeć do pierwszej [klasy], a ponieważ byłaby $> \xi$, musiałaby należeć do drugiej klasy, co przecież jest sprzecznością. Gdyby jednak $n_1 a = \xi$, to (równość (1)) następna wielokrotność $(n_1 + 1)a = n_1 a + a$ byłaby, na mocy IV, większa od $n_1 a$, tj. większa od ξ, wbrew temu, co właśnie pokazano. Jest zatem $na < \xi$ dla każdej liczby całkowitej n.

Niech wybrana teraz będzie $a' < a$ (aksjomat II); na mocy przed chwilą udowodnionego $1 \cdot a$ (czyli a) jest mniejsza od ξ, więc również $a' < \xi$ (§2, punkt 1). Można teraz ustalić ξ' tak (aksjomat V), że $\xi' + a' = \xi$, co implikuje (aksjomat IV) $\xi' < \xi$. Ponieważ ξ' należy do pierwszej klasy, można znaleźć liczbę całkowitą n' taką, że $n'a > \xi'$. Z tej nierówności oraz z $a > a'$ wynika $n'a + a > \xi' + a'$ (por.

---

sformułowanie ciągłości, jak u Veronese, bez bliższego omówienia pozostałych aksjomatów). System rzeczy, który spełnia aksjomat ciągłości Veronese, ale nie spełnia ani aksjomatu Archimedesa, ani aksjomatu VII, otrzymuje się w sposób następujący. Rozważa się wszystkie funkcje [zmiennej] y o postaci $ay + by^2$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą lub zerem, a b oznacza jakąkolwiek rzeczywistą (skończoną) wielkość liczbową, przy czym jednak gdy $a = 0$, to b ma być dodatnia i różna od zera. Jeśli ustali się, że z dwóch funkcji $a_1 y + b_1 y^2$ i $a_2 y + b_2 y^2$ ta pierwsza ma być nazywana większą, gdy $(a_1 y + b_1 y^2) - (a_2 y + b_2 y^2)$ jest dodatnia dla małych dodatnich y i rozważa się dodawanie funkcji zdefiniowane w zwykły sposób, to widać, że spełnione są aksjomaty od I do VI.

Jeśli mamy teraz dwie klasy funkcji spełniające warunki Veronese, funkcje $\alpha y + \beta y^2$ pierwszej [klasy] i funkcje $\alpha' y + \beta' y^2$ drugiej klasy, to musi być możliwe znalezienie także dwóch funkcji $\alpha_0 y + \beta_0 y^2$ oraz $\alpha'_0 y + \beta'_0 y^2$ odpowiednio pierwszej i drugiej klasy takich, że $(\alpha'_0 y + \beta'_0 y^2) - (\alpha_0 y + \beta_0 y^2) < y^2$. Z nierówności tej wynika jednak, że $\alpha'_0 = \alpha_0$. Jeśli rozważy się teraz wszystkie funkcje pierwszej klasy, które są $> \alpha_0 y + \beta_0 y^2$ oraz wszystkie funkcje drugiej klasy, które są $< \alpha'_0 y + \beta'_0 y^2$, to wszystkie te funkcje są postaci $\alpha_0 y + by^2$ i różnią się zatem tylko wartościami b. Otrzymuje się więc teraz dwie klasy wartości b, które znowu spełniają omawiane warunki i można, ponieważ chodzi teraz o zwykłe rzeczywiste wielkości liczbowe, wnioskować o istnieniu wielkości b_0 leżącej między tymi klasami. Funkcja $\alpha_0 y + \beta_0 y^2$ jest właśnie tą, której istnienie głosi postulat Veronese. A zatem postulat ten w zmodyfikowanej, tj. uogólnionej postaci jest spełniony.

Ponieważ żadna wielokrotność y^2 nie jest większa od y, więc nie zachodzi tu aksjomat Archimedesa. Już z tego wynika, że nie zachodzi tu aksjomat Dedekinda; widać to też bezpośrednio, gdy przyporządkujemy do pierwszej klasy funkcje, dla których $a = 0$, a do drugiej funkcje, dla których $a > 0$.

Postulat Veronese nie jest zatem, chociaż założone są wprzódy aksjomaty od I do VI, równoznaczny z aksjomatem Dedekinda (VII). Z drugiej strony, jak łatwo widać, to ten ostatni aksjomat przy poczynionych założeniach jest równoznaczny z faktem, że nieskończenie wiele wielkości, które wszystkie są mniejsze od ustalonej [wielkości], zawsze posiada tak zwany „kres górny”.

§2, punkt 2), tj. $(n'+1)a > \xi$. To stoi w sprzeczności z dopiero co udowodnionym.

Uczynione na początku założenie jest więc niemożliwe, tj. istnieje liczba całkowita n taka, że $na > b$. Ten fakt jest często wysuwany jako szczególny aksjomat i oznaczany jako aksjomat Archimedesa.

§ 5. Prawo przemienności dodawania

W §1 pozostawiono bez rozstrzygnięcia pytanie, czy prawo przemienności dodawania zachodzi, czy nie zachodzi. Zostanie teraz udowodnione, że *równanie* $a + b = b + a$ *jest konieczną konsekwencją aksjomatów od I do VII.*

Wybierzmy c tak, aby była $< a$ oraz $< b$ (poza tym dowolna). Wielkości c, $2c$, $3c$, $4c, \ldots$, na mocy aksjomatu Archimedesa nie są wszystkie $\leqslant a$. Niech pierwszą wielkością z powyższego ciągu, która jest $> a$, będzie μc. Mamy zatem:

$$(\mu - 1)c \leqslant a, \tag{3}$$

$$\mu c > a. \tag{4}$$

Podobnie musi istnieć liczba całkowita ν tego rodzaju, że:

$$(\nu - 1)c \leqslant b, \tag{5}$$

$$\nu c > b. \tag{6}$$

Z (3) oraz (5) dostajemy, na mocy punktu 2 §2:

$$(\mu - 1)c + (\nu - 1)c \leqslant a + b.$$

Tak więc na mocy (1) mamy:

$$(\mu + \nu - 2)c \leqslant a + b. \tag{7}$$

Tak jak ta relacja wynika z (3) oraz (5), tak też z (4) oraz z (6) można wywnioskować (zwróć uwagę na szyk dodawania):

$$(\nu + \mu)c > b + a.$$

Ponieważ jednak dla liczb zachodzi prawo przemienności dodawania, więc mamy też:

$$(\mu + \nu)c > b + a. \tag{8}$$

Z (7) wynika jeszcze $((\mu + \nu - 2)c + 2c) \leqslant (a + b) + 2c$, co ze względu na (1) daje relację:

$$(\mu + \nu)c \leqslant (a + b) + 2c. \tag{9}$$

Na mocy punktu 1 §2 z (8) oraz (9) wynika:

$$b + a < (a + b) + 2c. \tag{10}$$

Widać z tego, że nie może być $b + a > a + b$. Gdyby mianowicie tak było, to można byłoby ustalić x tak, że:

$$(a + b) + x = b + a. \tag{11}$$

Wielkość c była dowolna, pomijając to, że miała być $< a$ oraz $< b$; c mogła więc zostać też tak dobrana (punkt 3 §3), że $2c < x$. W tym przypadku dostałoby się $(a + b) + 2c < (a + b) + x$, tj., na mocy (11), [wielkość] mniejszą od $b + a$, co stoi w sprzeczności z (10).

Ponieważ w całych tych rozważaniach można zamienić role a oraz b, wynika stąd, że nie może być również $a+b > b+a$. Tak więc (na mocy aksjomatu I) musi być $a + b = b + a$[9].

*

* *

Podstawa przekładu: Hölder, O. 1901. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe* **53**, Leipzig, 1–63. Erster Teil: Grössen und Masszahlen, 1–36, §§1–5.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
e-mail pogon@amu.edu.pl
4 lutego 2012 r.

[9] Podany tu dowód różni się od dowodu Veronese (*op. cit.*, s. 620 i nast.) po pierwsze w tym, że Veronese operuje na „segmentach", a więc korzysta z faktów, które odwołują się do odcinków oraz uporządkowania punktów (por. aksjomaty od (α) do (κ) w §18), podczas gdy ja tutaj pokazuję, że dowolne wielkości, które spełniają aksjomaty od I do VII, muszą spełniać prawo przemienności dodawania. Poza tym Veronese zakłada, przynajmniej w przedstawionej formie jego dowodu, istnienie części właściwych. Dowód jednak musi zostać tak poprowadzony, gdy nie potraktuje się istnienia części właściwych jako aksjomatu, że założenie to można pominąć, ponieważ, o ile mi wiadomo, nie podano żadnego wolnego od zarzutów dowodu istnienia części właściwych, który nie używałby prawa przemienności dodawania (por. uwagę na s. 17).
Zauważę jeszcze wyraźnie, *że wyniki tego i następnego paragrafu pozostają w mocy, gdy założy się jedynie aksjomaty od I do VI oraz aksjomat Archimedesa.*