FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Recenzje, konferencje, biografie, informacje

Piotr Błaszczyk

Nota o rozprawie Otto Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*[*]

1. Zawartość rozprawy

Rozprawa *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*[1] została napisana z dużym rozmachem. Już sam spis treści ukazuje jej rozległy plan. *Część I* zatytułowana *Wielkości i liczby pomiarowe* składa się z następujących paragrafów:

§ 1. *Aksjomaty*
§ 2. *Najprostsze konsekwencje aksjomatów I-VI*
§ 3. *Wielokrotność*
§ 4. *Aksjomat Archimedesa*
§ 5. *Prawo przemienności dodawania*
§ 6. *Wnioski z prawa przemienności dodawania*
§ 7. *Części właściwe*
§ 8. *Antyczne i współczesne ujęcie teorii proporcji*
§ 9. *Liczby wymierne i niewymierne*
§ 10. *Liczba przyporządkowana stosunkowi wielkości (liczba pomiarowa)*
§ 11. *Wielkości współmierne*
§ 12. *Liczba pomiarowa sumy wielkości*
§ 13. *Zmiana jednostki*
§ 14. *Współczesne podstawy teorii proporcji wielkości*
§ 15. *Istnienie wielkości o podanej liczbie pomiarowej*
§ 16. *Mnożenie wielkości*
§ 17. *Zdefiniowane mnożenie jest jedyne*

Część II. Zastosowanie do przedziałów linii prostej zawiera aksjomatyczny wykład geometrii elementarnej z pojęciami pierwotnymi: punkt, prosta, odcinek. Hölder zakłada, że odcinki spełniają aksjomaty „wielkości”, a dodatkowe aksjomaty opisują uporządkowanie punktów na prostej. Dalej Hölder rozwija teorię proporcji odcinków i ustanawia bijekcję między punktami prostej a liczbami rzeczywistymi.

---

[*] A note on Otto Hölder's treatise *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*

[1] Zob. O. Hölder, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe, 53, Leipzig 1901, s. 1–63.

Generalny zamysł rozprawy przypomina więc to, co polski czytelnik zna z monografii Karola Borsuka i Wandy Szmielew *Podstawy geometrii*, w tej części, w której autorzy wprowadzają metrykę w przestrzeni absolutnej[2]. Przy czym, gdy polscy matematycy przyjmują arytmetykę liczb rzeczywistych, Hölder stosuje teorię „wielkości".

Prezentowany przekład pierwszych paragrafów *Die Axiome der Quantität* zawiera dwa ciekawe wyniki: (1) w półgrupie uporządkowanej z aksjomatu ciągłości wynika aksjomat Archimedesa, (2) półgrupa archimedesowa jest przemienna. Twierdzenia te są obecnie dobrze znane, chociaż rzadko wiąże się je z konkretnym nazwiskiem. Ponadto, ich dowody są proste, co dodatkowo sprawia, że funkcjonują one jako bezimienne fakty matematyczne. Natomiast ustalenie ram logicznych, tj. aksjomatów i podstawowych definicji pozwalających przeprowadzić te dowody, okazało się dość złożonym procesem. Świadectwo gorącej dyskusji toczonej wokół aksjomatów „wielkości" stanowią bardzo rozbudowane przypisy rozprawy.

2. Wielkości

We wstępie Hölder pisze: *Teoria wielkości mierzalnych została rozwinięta na wysokim poziomie już przez* Euklidesa. *Współcześnie doświadczyła pogłębionego potraktowania z różnych stron. Mimo to teoria ta wydaje mi się jeszcze niewystarczająco dokładnie [przedstawiona]; w niektórych nowych opracowaniach zakradły się błędy i niejasności i dlatego sądzę, że potrzebne jest nowe rozwinięcie tej ważnej i podstawowej teorii.*

Pierwsze z tych zdań odnosi się oczywiście do teorii proporcji z Księgi V *Elementów*. Teoria ta traktuje o obiektach geometrycznych, o odcinkach, wielokątach, kątach, które Euklides obejmuje jednym pojęciem μέγεθος, wielkość. Greckie słowo μέγεθος oddawano w tłumaczeniach łacińskich jako *quantitas*, w językach nowożytnych zaś funkcjonują zamiennie dwa odpowiedniki: w angielskim – *quantity* oraz *magnitude*, we francuskim – *quantité*, *grandeur*, w niemieckim – *Quantität*, *Grösse*; Hölder używa pojęcia *Quantität*. W XX wieku słowo „wielkość" jest stopniowo zastępowane przez „liczby rzeczywiste", tym niemniej jeszcze pod koniec lat 40-tych Nicolas Bourbaki posługuje się pojęciem *grandeur* w znaczeniu liczba rzeczywista[3].

Teoria proporcji wielkości jest stosowana w Księdze VI *Elementów*, w teorii figur podobnych i spełnia w matematyce greckiej funkcję podobną do tej, jaką arytmetyka liczb rzeczywistych pełni we współczesnej geometrii.

Wielcy matematycy nowożytności, Kartezjusz, Leibniz, Newton, stosowali teorię figur podobnych nie zważając na jej aksjomatyczne podstawy. Następne pokolenia rozwijały matematykę odnosząc się do swoich bezpośrednich poprzedników, a nie do Euklidesa. W rezultacie zainteresowanie Księgą V przeniosło się z tekstów czysto matematycznych do prac historycznych i komentarzy zamieszczanych

---

[2] Zob. K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972; zob. także P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007, rozdz. 2.

[3] Zob. N. Bourbaki, *Théorie de la mesure et de l'intégration. Introduction*, Université Henri Poincaré, Nancy 1947.

w kolejnych edycjach *Elementów*. Wyjątkową przenikliwością w tej dziedzinie wyróżnia się edycja Roberta Simsona, w której do definicji z Księgi V dopisano cztery aksjomaty, aby usunąć luki w dowodach Euklidesa[4].

Oryginalny tekst *Elementów* nie zachował się, stąd istotne różnice między poszczególnymi wydaniami dotyczące samej zawartości traktatu. Dość powiedzieć, że w Średniowieczu i Renesansie *Elementy* były znane w 15 księgach, podczas gdy obecnie 13 ksiąg uznaje się za w pełni autentyczne. W latach 1883-1888 duński filolog Johan Ludvig Heiberg opublikował wydanie, które do dziś uznawane jest za klasyczną edycję i z którego korzystają wszyscy badacze i wydawcy Euklidesa[5]. Z tej edycji czerpali też matematycy działający na przełomie XIX i XX wieku.

Zainteresowanie teorią proporcji z *Elementów* przywrócił matematyce Otto Stolz. W wydanej w roku 1885 monografii *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik* osobny rozdział poświęcił on omówieniu Księgi V oraz VI, a teorię proporcji umieścił w jednym szeregu obok arytmetyki liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych[6]. Kolejne prace rozwijające antyczną teorię proporcji to *Wstęp* do *Lehrbuch der Algebra* Heinricha Webera[7] oraz omawiana rozprawa Höldera. Gdy w roku 1900 ukazał się artykuł Davida Hilberta *Über den Zahlbegriff*[8], uwaga matematyków skupiła się na ciele liczb rzeczywistych, natomiast Księgą V interesowali się już tylko historycy i filozofowie[9]. Warto w tym miejscu przypomnieć, że Hilbert przedstawił w *Grundlagen der Geometrie* swoją koncepcję proporcji, co dodatkowo świadczy o tym, że ten antyczny sposób rozumowania wabił jeszcze matematyków przełomu wieków jakąś atrakcyjnością[10].

XIX-wieczne odrodzenie teorii proporcji zapoczątkował niemiecki historyk Hermann Hankel. W roku 1876 podał on pierwszy nowoczesny opis Ksiąg V-VI, a zaproponowany przez niego symboliczny zapis definicji proporcji został użyty w edycji Heiberga i jest powtarzany po dzień dzisiejszy[11]. Drugim istotnym składnikiem tej historii jest opublikowana w roku 1861 monografia *Lehrbuch der Arithmetik* autorstwa Hermanna Grassmanna[12]. Zawiera ona bodaj pierwsze w historii

---

[4] Zob. R. Simson, *The Elements of Euclid viz. the first six Books, together with the eleventh and twelfth. The Errors by which Theon and others have long ago vitiated these Books are corrected and some of Euclid's Demonstrations are restored*, Glasgow 1762, s. 114-115.

[5] J.L. Heiberg, *Euclidis Elementa*. edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, vol. I-V, in aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae 1883-1888. Księgę V zamieszczono w tomie drugim, wydanym w roku 1884.

[6] O. Stolz, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig 1885, s. 85-96.

[7] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra. Einleitung*, Vieweg, Braunschweig 1895, s. 1-20; wydanie drugie: 1898.

[8] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, 1900, s. 180–184; *O pojęciu liczby*, tłum. J. Pogonowski, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV, 2012, s. 199-202.

[9] Zob. O. Becker, *Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid*, Eudoxos-Studien I, 1933, s. 311-333; F. Beckmann, *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, Archive for History of Exact Sciences IV, 1967, s. 1-144; I. Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1981, s. 118-151; P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

[10] Zob. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig 1899, s. 35-37.

[11] H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Teubner, Leipzig 1876, s. 389- 404; J.L. Heiberg, *Euclidis Elementa*, op. cit., vol. II, s. 3.

[12] H. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Enslin, Berlin 1861.

matematyki systematyczne opracowanie zagadnienia zgodności porządku liniowego z działaniami, a zależności te stanowią istotny składnik matematycznego opisu pojęcia „wielkość".

3. Struktura wielkości

Przedstawimy teraz trzy koncepcje wielkości. Pochodzą one z prac Paula Du Bois-Reymonda, Otto Stolza i Heinricha Webera. Ich cechą wspólną jest to, że definiują wielkość jako strukturę algebraiczną, dokładniej, jako półgrupę z porządkiem liniowym $\mathfrak{M} = (M, +, <)$. Nie wszystkie własności składające się na współczesną definicję półgrupy były wprost wymieniane przez wskazanych autorów, nie wspominając już o tym, że żaden z nich nie używa pojęcia „półgrupa". Podobnie nie każdy z nich miał wyraźną koncepcję porządku liniowego. Ponadto do warunków charakteryzujących strukturę $\mathfrak{M}$ niektórzy zaliczali też aksjomaty równości oraz prawa podstawiania, a więc zasady, którymi współcześnie zajmuje się raczej logika niż algebra. Pominiemy te różnice i skupimy uwagę na aksjomatach charakteryzujących związek działania $+$ z porządkiem $<$.

Szczególną rolę w charakterystyce wielkości odgrywa aksjomat ciągłości. W omawianych pracach był on wzorowany na postaci zaczerpniętej z rozprawy Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. W związku z tym przytoczymy jego oryginalne sformułowanie: *Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki*[13].

Użyty przez Dedekinda termin „linia prosta" oznacza *de facto* zbiór uporządkowany liniowo w sposób gęsty i w referowanych pracach aksjomat ciągłości jest formułowany jako własność przekrojów. Przypomnijmy więc, że para (A, B) jest przekrojem zbioru liniowo uporządkowanego $(M, <)$ wtedy i tylko wtedy, gdy (1) $A, B \neq \emptyset$, (2) $A \cup B = M$, (3) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x < y)$. Przekrój (A, B), który jest tego rodzaju, że ani w klasie A nie ma największego elementu, ani w klasie B nie ma największego, nazywany jest luką.

W pierwszych opisach „wielkości" nie pojawia się zagadnienie niezależności aksjomatów, mamy tu raczej do czynienia z wyodrębnieniem pewnych własności, które okazują się istotne w dowodach. Kwestia niezależności stała się przedmiotem badań pod wpływem *Grundlagen der Geometrie* Hilberta i dopiero Hölder podejmuje rozważanie tego typu w odniesieniu do aksjomatów „wielkości".

Przedstawiając kolejne koncepcje wielkości posłużymy się jednolitym sposobem zapisu. We wzorach będziemy stosować kwantyfikatory, przyjmujemy przy tym, że zmienne wolne przebiegają zbiór wielkości M, w pozostałych przypadkach wyraźnie wskazujemy zakres zmienności. Dla porządku zaznaczmy, że żaden z omawianych autorów nie używał formuł z kwantyfikatorami.

[13] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872, s. 18, tłum. J. Pogonowski.

3.1. Euklides

Zaczniemy od Euklidesa, bo to jego teoria proporcji dała początek rozważaniom na temat wielkości. Oto aksjomaty charakteryzujące strukturę wielkości z Księgi V *Elementów*[14]:

E1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[nx > y]$,

E2 $(\forall x, y)(\exists z)[x < y \Rightarrow x + z = y]$,

E3 $(\forall x, y, z)[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$,

E4 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)[x = ny]$,

E5 $(\forall x, y, z)(\exists v)[x : y :: z : v]$.

W *Elementach* nie występuje ani pojęcie porządku liniowego, ani działania, Euklides nawet nie używa słowa „suma" czy innego pojęcia, które by odpowiadało symbolowi $+$. Z pięciu przedstawionych aksjomatów wprost zapisany jest jedynie aksjomat E1 – u Euklidesa jest to definicja V.4. Występujący w E5 symbol $x : y :: z : v$ oznacza relację proporcji – u Euklidesa jest ona zadana definicją V.5. Symbol nx oznacza „wielokrotność", sumę n składników x, $nx = x + ... + x$. Został on wprowadzony w cytowanych wyżej pracach Hermanna Grassmanna i Hermanna Hankla, a w rozprawie Höldera jest definiowany indukcyjnie. Ściśle rzecz biorąc „wielokrotność" to działanie zewnętrzne, $\mathbb{N} \times M \ni (n, x) \mapsto nx \in M$.

Aksjomat E1 decyduje między innymi o tym, że wśród wielkości nie ma „zera", tj. elementu neutralnego. Z koniunkcji aksjomatów E1, E2, E3 wynika zależność $(\forall x, y)(x + y > x)$, którą można interpretować w ten sposób, że w zbiorze M nie ma ani „zera", ani „wielkości ujemnych". Element z który występuje w aksjomacie E2, w niektórych pracach jest oznaczany jako $y - x$.

Aksjomaty E1-E5 stanowią interpretację pojęcia wielkość. Przyjmując środki współczesnej logiki, można wyprowadzić z nich wszystkie twierdzenia Księgi V[15]. Uzupełniają one teorię proporcji Euklidesa w takim sensie, w jakim aksjomaty z wykładu Hilberta *Grundalgen der Geometrie* uzupełniają geometrię Euklidesa.

3.2. Du Bois-Reymond, 1882

Oto aksjomaty charakteryzujące „wielkości liniowe", *lineären mathematischen Grössen*, *quantitiés mathématisque linéaires*, przedstawione przez Paula Du Bois-Reymonda w roku 1882 w książce *Die Allgemeine Functionentheorie*[16]:

D1 $(\forall x)(\exists y, z)[y < x \wedge z > x]$,

D2 $(\forall x, y)[x + y > x]$,

D3 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)[x = ny]$,

D4 $(\forall x, y)(\exists z)[x < y \Rightarrow x + z = y]$,

---

[14] Zob. F. Beckmann, *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, op.cit., I. Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, op. cit., P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, op. cit.

[15] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Elementy, Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, op. cit.

[16] Zob. P. Du Bois-Reymond, *Die Allgemeine Functionentheorie*, Lauppschen, Tübingen 1882, s. 43-48; wyd. francuskie: *Théorie Générale des Fonctions*, Nice 1887.

D5 $(\forall x, y, z)[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$,

D6 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[x \leqslant y \Rightarrow nx \geqslant y]$,

D7 $(\forall x, y)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists z)[z < y \wedge x = nz]$.

Dysponując pojęciem „wielkości", Du Bois-Reymond, a później Stolz przedstawili pierwsze systemy „wielkości niearchimedesowych".

3.3. Otto Stolz, 1885

W ujęcie Otto Stolza „wielkości absolutne", *absolute Grössen*, spełniają aksjomaty[17]:

S1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow nx > y]$,

S2 $(\forall x, y)(\exists! z)[x < y \Rightarrow x + z = y]$,

S3 $(\forall x, y, z)[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$,

S4 $(\forall x, y)[x + y > x]$,

S5 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)[x = ny]$.

Konsekwencje
Z aksjomatów S1–S5 Stolz wyprowadza następujące wnioski:

S6 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow nx \leqslant y < (n+1)x]$.

S7 $(\forall x, y, z)(\exists m, n \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow x < \frac{m}{n}z < y]$[18].

W związku z ciągłością Stolz wprowadza kolejne aksjomaty:

S9 Porządek $<$ jest gęsty,

S10 $(\forall x)(\exists y, z)[y < x \wedge z > x]$,

S11 Jeżeli $\Sigma \subset M$ oraz (A, B) jest luką w zbiorze $(\Sigma, <)$ tego rodzaju, że
$(\forall x \in M)(\exists y \in A)(\exists z \in B)[z - y < x]$, to
$(\exists! x \in M)(\forall y \in A)(\forall z \in B)[y < x < z]$.

Konsekwencje

S12 (S2–S5, S9–S11) $\Rightarrow$ S1.

Dowód własności S12 podany przez Stolza nie był poprawny[19].

[17] Zob. O. Stolz, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig 1885, s. 82-83.

[18] Na podstawie S5 dla każdej wielkości z oraz liczby naturalnej n istnieje taka wielkość v, że $z = nv$. Wiekość v jest oznaczana symbolem $\frac{1}{n}z$. Wtedy mv to $\frac{m}{n}z$.

[19] Zob. niżej § 5.1.

3.4. Otto Stolz, Joseph A. Gmeiner, 1902

W roku 1902 Otto Stolz przy współpracy z Josephem Gmeinerem wydał *Theoretische Arithmetik* – rozszerzoną i zmienioną wersją *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*. W tym nowym ujęciu aksjomat ciągłości podany jest w klasycznej postaci:

S13 Jeżeli (A, B) jest przekrojem zbioru $(M, <)$, to albo w klasie A jest element największy, albo w klasie B jest element najmniejszy.

Dowód faktu, że z S13 wynika S1, przy założeniu pozostałych aksjomatów, jest tym razem tak prowadzony: Niech a, b są takie, że $a < b$ oraz $na < b$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przyjmując

$$A = \{x \in M : nx < b\}, \quad B = \{x \in M : nx > b\},$$

Stolz pokazuje, że ani w klasie A nie ma elementu największego, ani w klasie B nie ma elementu najmniejszego, co ma być sprzeczne z założeniem, że żaden przekrój zbioru $(M, <)$ nie wyznacza luki[20].

Ten dowód także nie jest poprawny, nie wiadomo bowiem, dlaczego w definicji zbiorów A, B pominięto przypadek $nx = b$, który decyduje o tym, że para (A, B) stanowi lukę.

3.5. Heinrich Weber, 1895

We *Wstępie* do *Lehrbuch der Algebra* Heinrich Weber jasno odróżnia pojęcia „zbiór", „zbiór uporządkowany" oraz „zbiór mierzalny", *messbare Menge*. Jasne jest również to, że pojęcie „miara", *Mass*, odnosi się do struktury porządkowo-algebraicznej $\mathfrak{M} = (M, +, <)$. W związku z tym czytamy: „Zbiór uporządkowany $\mathfrak{M}$ nazywa się *mierzalnym* przy następujących założeniach"[21]. To, co następuje dalej, zapisujemy wzorami:

W1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[nx > y]$,

W2 $(\forall x, y)(\exists z)[x < y \Rightarrow x + z = y]$,

W3 $(\forall x, y)[x + y > x]$,

W4 Porządek $<$ jest gęsty i jeżeli (A, B) jest przekrojem zbioru $(M, <)$, to $(\exists z)(\forall x \in A)(\forall y \in B)[x \leqslant z \leqslant y]$.

Aksjomat W4 Weber tak formułuje: „Gdy każdy przekrój w zbiorze gęstym $\mathfrak{M}$ jest wytworzony przez określony element μ, to zbiór ten nazywa się ciągłym"[22].

Konsekwencje

W5 $(\forall x, y, z[(x < y \Rightarrow x + z < y + z]$.

W6 Porządek $<$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall x)(\exists y)[y < x]$.

W7 $(\mathrm{W1} \wedge \mathrm{W3} \wedge \mathrm{W4}) \Rightarrow \mathrm{W2}$.

[20] Zob. O. Stolz, J.A. Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*, Teubner, Leipzig 1902, s. 115.
[21] Zob. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, op. cit., s. 6-7, tłum. J. Pogonowski.
[22] Zob. tamże, s. 4.

Dowód własności W7 jest tak szkicowany: Niech $a < b$, $A = \{x \in M \colon a + x \leqslant b\}$, $B = \{x \in M \colon a + x > b\}$. Niech ξ „wytwarza" przekrój (A, B), tj. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)[x \leqslant \xi \leqslant y]$. Wówczas, konkluduje Weber, zachodzi $a + \xi = b$[23].

Rozumowanie Webera jest niedokończone. Hölder podejmuje je słowami: „Nie możemy jednak jeszcze zaniedbać dowodu, że istotnie $a+\xi = b$ (zapomniano o tym w Weber *Lehrbuch der Algebra*)". Mimo iż Hölder przyjmuje kolejne aksjomaty, nie udaje mu się doprowadzić tego dowodu do końca.

W istocie dowód Webera nie mógł być poprawny. Przyjmijmy bowiem $M_1 = \mathbb{R} \setminus [-2, 2)$ z działaniem $x \circ y = |x \cdot y|$ oraz naturalnym porządkiem. W półgrupie $\mathfrak{M}_1 = (M_1, \circ, <)$ jest spełniony aksjomat W1, bo $nx = |x|^n$, dla $n > 1$, oraz $\lim_{n\to\infty} |x|^n = \infty$, dla każdego $x \in M_1$. Zachodzi też $x \circ y = |x \cdot y| > |x| \geqslant x$, co znaczy, że spełniony jest aksjomat W3. Porządek w zbiorze M_1 jest oczywiście ciągły. Przyjmując $x = -4$, $y = 3$ otrzymujemy, że $x < y$ oraz $x \circ z \neq y$, bo $x \circ z \geqslant 8$, dla każdego $z \in M_1$. Zatem w $\mathfrak{M}_1$ nie zachodzi W2.

W *Lehrbuch der Algebra* znajdujemy jeszcze i taką uwagę:

> W8 Definicja ciągłości, którą za Dedekindem bierzemy tu za podstawę, jest tak dalece wyczerpująca, że zbiór ciągły w tym sensie, któremu przysługuje jeszcze za chwilę podana własność mierzalności, nie może być częścią bogatszego zbioru ciągłego. Nie wiem, czy własność ta jest gdziekolwiek dowiedziona i mam nadzieję wrócić do tego przy innej sposobności. Zauważę jednak, że taka własność dowodliwa jest jedynie dla zbiorów mierzalnych. Zbiór tylko uporządkowany może być zawsze, jakkolwiek by był gęsty, pojmowany jako część zbioru jeszcze bardziej gęstego[24].

Hölder kontynuuje tę myśl i w rozprawie czytamy: *Jeśli mamy dwa systemy wielkości, z których każdy spełnia aksjomaty od I do VII, to można te systemy odwzorować wzajemnie jednoznacznie na siebie tak, aby również sumy odpowiednich wielkości wzajem sobie odpowiadały* [...]. *W tym celu należy tylko wybrać w każdym systemie jednostkę i przyporządkować sobie nawzajem te wielkości, które mają tę samą liczbę pomiarową*[25].

Naszkicowany pomysł nie jest dalej prowadzony, a można go tak rozwinąć. $(\mathbb{R}_+, +, <, 1)$ jest systemem, który spełnia aksjomaty Höldera, dlatego wystarczy wskazać izomorfizm między $(M, +, <, a)$, gdzie $a \in M$, oraz półgrupą liczb rzeczywistych. Niech więc r_x jest liczbą rzeczywistą wyznaczoną przez przekrój (A_x, B_x), gdzie

$$A_x = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : na > mx\right\}, \quad B_x = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : na \leqslant mx\right\}.$$

Funkcja $\varphi(x) = r_x$ jest izomorfizmem struktur $(M, +, <, a)$ oraz $(\mathbb{R}_+, +, <, 1)$, spełnia przy tym warunek $\varphi(a) = 1$.

Te drobne uwagi Webera i Höldera stanowią genezę twierdzenia o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych, a własność W8 stała się częścią tych aksjomatów w ujęciu Hilberta. W *Über den Zahlbegriff* aksjomat ciągłości jest bowiem koniunkcją aksjomatu Archimedesa oraz warunku: „liczby [rzeczywiste] tworzą

---

[23] Zob. tamże, s. 8-9.

[24] Zob. tamże, s. 5-6, tłum. J. Pogonowski. Uwaga ta została usunięta z drugiego wydania.

[25] O. Hölder, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, op. cit., s. 32.

system rzeczy, który przy zachowaniu wszystkich aksjomatów nie jest zdolny do żadnego dalszego rozszerzenia"[26].

Równie ważna jest druga część własności W8: „Zbiór tylko uporządkowany może być zawsze, jakkolwiek by był gęsty, pojmowany jako część zbioru jeszcze bardziej gęstego". W rozprawie Höldera znajdujemy metodę pozwalającą zanurzyć dowolny zbiór $(M,<)$ uporządkowany w sposób ciągły, a zatem i gęsty, w innym zbiorze uporządkowanym w sposób ciągły. Oto nieznacznie zmodyfikowany przykład z przypisu 4. rozprawy. Niech $(M,<)$ będzie uporządkowany w sposób ciągły, niech $[a,b] \subset M$ będzie przedziałem. Przyjmijmy $L = M \times [a,b]$ z porządkiem leksykograficznym $\prec$. Zbiór $(L,\prec)$ można traktować jako rozszerzenie $(M,<)$, bo np. oś $(M \times \{a\},\prec)$ jest *kopią* $(M,<)$. Łatwo pokazuje się, że porządek $\prec$ jest gęsty. Ale jest on także ciągły. Niech (A,B) jest przekrojem $(L,\prec)$, niech $x_0 = sup\{x \in M : (\exists y)((x,y) \in A)\}$[27]. Następnie niech $y_0 = sup\{a \leqslant x \leqslant b : (\exists y \in M)((x,y) \in A)\}$. Element (x_0,y_0) jest albo najmniejszy w klasie A, albo największy w klasie B.

3.6. Karol Borsuk, Wanda Szmielew, 1972

Na zakończenie tej części przedstawimy strukturę odcinków swobodnych z wykładu Karola Borsuka, Wandy Szmielew *Podstawy geometrii.* Czynimy to, po pierwsze, by przedstawić współczesny odpowiednik teorii wielkości, po drugie, by przez kontrast uwypuklić specyfikę teorii wielkości polegającą na tym, że podstawowe pojęcia są przyjmowane w niej jako pierwotne.

Struktura odcinków swobodnych dokładnie przystaje do ogólnej charakterystyki wielkości, polscy matematycy nie są jednak świadomi związków z tą tradycją[28]. W ich krótkiej charakterystyce systemu Euklidesa znajdujemy m.in. takie zdania: „Różnica między pewnikami a postulatami nie jest u Euklidesa bliżej wyjaśniona. Zdania nazwane przez niego pewnikami – jak np. *całość jest większa niż część* – mają charakter wypowiedzi o przedmiotach należących do bliżej nieokreślonych kategorii wielkości"[29].

W *Podstawach geometrii* odcinki swobodne, oznaczane literami $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, tworzą półgrupę przemienną $\mathcal{O} = (O,+,<)$ z porządkiem liniowym oraz działaniem zewnętrznym – mnożeniem przez liczby dwójkowe, które są oznaczane literami w, v. Dowodzi się, że w strukturze tej zachodzą następujące związki:

(i) $(\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b})(\exists n \in \mathbb{N})[n\mathfrak{a} > \mathfrak{b})]$,

(ii) $(\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b})(\exists \mathfrak{c})[\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}]$,

(iii) $(\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})[\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}]$,

(iv) $(\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b})(\exists n \in \mathbb{N})[\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Rightarrow n\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b} < (n+1)\mathfrak{a}]$,

[26] D. Hilbert, *O pojęciu liczby*, op. cit., s. 201.

[27] Hölder zna twierdzenie o równoważności W4 zasadzie supremum, co widać z ostatniego akapitu przypisu 8. rozprawy.

[28] Inne XX-wieczne nawiązanie do teorii wielkości, tym razem najzupełniej świadome, znajdujemy u Bourbakiego, gdzie aksjomaty W1-W3 stanowią punkt wyjścia do konstrukcji ciała liczb rzeczywistych; zob. N. Bourbaki, *Théorie de la mesure et de l'intégration. Introduction*, op. cit.

[29] K. Borsuk W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, op. cit., s. 10.

(v) $(\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b})(\forall w)[w(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = w\mathfrak{a} + w\mathfrak{b}]$,

(vi) $(\forall \mathfrak{a})(\forall w, v)[(w+v)\mathfrak{a} = w\mathfrak{a} + v\mathfrak{a}]$,

(vii) $(\forall \mathfrak{a})(\forall w, v)[w(v\mathfrak{a}) = (w \cdot v)\mathfrak{a}]$,

(viii) $(\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b})(\forall w)[w\mathfrak{a} < w\mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} < \mathfrak{b}]$,

(ix) $(\forall \mathfrak{a})(\forall w)[w\mathfrak{a} < v\mathfrak{a} \Leftrightarrow w < v]$,

(x) $(\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b})(\exists k \in \mathbb{N})\left[\frac{1}{2^k}\mathfrak{a} < \mathfrak{b}\right]$,

(xi) $(\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})(\exists n, k \in \mathbb{N})[\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} < \frac{n+1}{2^k}\mathfrak{c} < \mathfrak{b}]$[30].

Wszystkie obiekty występujące w tej koncepcji – odcinki, ich dodawanie oraz porządek – są definiowane na gruncie aksjomatów geometrii. W teorii „wielkości" obiekty, działanie oraz porządek są pojęciami pierwotnymi. Hölder na przykład wyraźnie zaznacza, że porządek „wielkości" jest pojęciem pierwotnym[31].

Zauważmy wreszcie, że w przedstawionych koncepcjach występuje aksjomat o „podziale wielkości" na dowolną liczbę części – E4, D3, S5, H14 – i odpowiednio związane z tym mnożenie przez liczby wymierne. W *Podstawach geometrii* w miejsce liczb wymiernych występują liczby dwójkowe. Wynika to stąd, że w odniesieniu do odcinków liczby dwójkowe mają jasny sens geometryczny wywodzący się z twierdzenia o bisekcji[32], zaś twierdzenie o podziale na n części wymagałoby już bardziej zaawansowanych środków, np. twierdzenia Talesa[33].

4. Otto Hölder, 1901

Jako odrębne aksjomaty Hölder przyjmuje:

Dla dowolnych x, y zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy: $x < y \vee x = y \vee x > y$.

$M \times M \ni (x, y) \mapsto x + y \in M$.

$(\forall x, y, z)[(x+y)+z = x+(y+z)]$.

W odróżnieniu od Stolza czy Webera Hölder nie zakłada przemienności działania – jest ona przedmiotem odrębnego twierdzenia. O porządku $<$ przyjmuje tylko prawo trychotomii, a z aksjomatów charakteryzujących „wielkości" wyprowadza przechodniość.

Oto aksjomaty charakteryzujące wielkości:

H1 $(\forall x)(\exists y)[y < x]$,

H2 $(\forall x)(\forall y)[x + y > x \wedge x + y > y]$,

H3 $(\forall x, y)(\exists z, w)[x < y \Rightarrow (x + z = y \wedge w + x = y)]$,

---

[30] Tamże, s. 107-109, 144-145. Tak szczegółowa charakterystyka struktury $\mathcal{O}$ wynika stąd, że spełnia ona istotną rolę w twierdzeniu o istnieniu miary; zob. tamże, s. 156.

[31] Zob. „Pojęcia 'większa' i 'mniejsza' okazują się przy tym pojęciami *konstruowanymi*, podczas gdy w tekście traktowane są jako *pierwotne*, tj. aksjomatyczne".

[32] Zob. K. Borsuk W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, op. cit., s. 93.

[33] Zob. tamże, s. 215-217.

H4 Jeżeli (A, B) jest przekrojem zbioru $(M, <)$, to
$(\exists z)(\forall x \in A)(\forall y \in B)[x \leqslant z \leqslant y]$.

Konsekwencje

H5 $(\forall x, y, z)[x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$,

H6 $(\forall x, y, z)[x < y \Rightarrow x + z < y + z,\ x < y \Rightarrow z + x < z + y)]$,

H7 $(\forall x, y)(\exists z)[x < y \Rightarrow x < z < y]$,

H8 $(\forall x)(\exists y)[y > x]$,

H9 $(\forall x, y)(\exists! z)[y < x \Rightarrow x = y + z]$,

H10 $(\forall x)(\forall m, n \in \mathbb{N})[(m + n)x = mx + nx]$,

H11 $(\forall x)(\forall m, n \in \mathbb{N})[m(nx) = (m \cdot n)x]$,

H12 $(\forall x, y)(\forall n \in \mathbb{N})[x \lesseqqgtr y \Leftrightarrow nx \lesseqqgtr ny]$

H13 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)[ny < x]$,

H14 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! y)[ny = x]$.

H15 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow nx > y]$,

H16 $(\forall x, y)[x + y = y + x]$.

Dowód własności H15 prowadzony jest nie wprost. Niech $a < b$ i przypuśćmy, że dla każdego n jest $na \leqslant b$. Przyjmijmy $A = \{x : (\exists n \in \mathbb{N})(x \leqslant na)\}$, $B = \{x : (\forall n \in \mathbb{N})(x > na)\}$. Para (A, B) tworzy przekrój i na mocy H4 istnieje taki element ξ, że zachodzi $(\forall x \in A)(\forall y \in B)[x \leqslant \xi \leqslant y]$. Niech teraz $a' < a$. Wtedy $a' \in A$, stąd $a' < \xi$. Niech ξ' będzie takim elementem, że $a' + \xi' = \xi$. Wtedy $\xi' < \xi$, stąd $\xi' \in A$ i dla pewnego n zachodzi $na > \xi'$. Dodając stronami tę nierówność do nierówności $a > a'$, otrzymujemy $(n + 1)a > \xi' + a' = \xi$, co jest sprzeczne z definicją ξ[34].

Dla dowodu własności H16 przyjmuje Hölder, że a, b są dowolne, zaś c spełnia warunek $c < a, c < b$. Na mocy H15 istnieją takie liczby naturalne n oraz m[35], że $(n - 1)c \leqslant a < nc$, $(m - 1)c \leqslant b < mc$. Stąd

$$(n + m - 2)c \leqslant a + b, \quad b + a < (m + n)c.$$

Dodając do obu stron pierwszej nierówności $2c$ otrzymujemy $(n+m)c \leqslant (a+b)+2c$. Zatem $b + a < (a + b) + 2c$, stąd zaś wynika, że nie może być $b + a > a + b$. W przeciwnym razie otrzymalibyśmy, że dla pewnego x zachodzi $b+a = (a+b)+x$. Wówczas, na mocy H13, można tak dobrać c, że spełnia warunki $2c < x$, $c < a$, $c < b$, wtedy zaś otrzymamy

$$b + a = (a + b) + x > (a + b) + 2c > b + a.$$

[34] Dowód ten w stylizacji geometrycznej i w odniesieniu do odcinków jest powtarzany w K. Borsuk; W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, op. cit., s. 143.

[35] W istocie, obok własności H15 Hölder *implicite* przyjmuje też zasadę minimum, tj. że zbiór $(\mathbb{N}, <)$ jest dobrze uporządkowany. Zasada ta była stosowana w sposób niejawny przez Euklidesa i później w większości prac traktujących o „wielkościach".

Sprzeczność. Całe powyższe rozumowanie można powtórzyć i wychodząc od nierówności

$$(m+n-2)c \leqslant b+a, \quad a+b < (n+m)c,$$

dojdziemy do konkluzji, że nie może zachodzić $a+b > b+a$. Ostatecznie musi być $a+b = b+a$.

W dowodzie tym istotne jest, że dodawanie wielokrotności nc, mc jest przemienne, $nc+mc = mc+nc$. Nie mniej ważne jest oczywiście założenie H15.

W *Grundlagen der Geometrie* Hilbert skonstruował ciało niearchimedesowe nieprzemienne[36]. Jednocześnie pokazał, że w ciele archimedesowym mnożenie musi być przemienne. Dowód tego faktu tylko nieznacznie różni się od zreferowanego dowodu własności H16 i niewątpliwie był dla Höldera inspiracją[37].

5. Aksjomat ciągłości

Hölder wykazuje niezależność aksjomatów konstruując odpowiednie modele. Najciekawsze przykłady polegają na wprowadzeniu porządku leksykograficznego oraz działań w iloczynie kartezjańskim. Niżej przedstawimy dwa wątki wyodrębnione z tych rozważań, a związane z aksjomatem ciągłości.

5.1. Veronese aksjomat ciągłości

Giuseppe Veronese przeszedł do historii matematyki jako twórca geometrii niearchimedesowej. W naturalny sposób w obrębie jego zainteresowań leżała ciągłość i jej związek z aksjomatem Archimedesa. Hölder komentuje aksjomat ciągłości w wersji przyjętej przez Veronese. W istocie aksjomat ten jest powtórzeniem warunku S11.

V Jeżeli $\Sigma \subset M$ oraz (A, B) jest luką w zbiorze $(\Sigma, <)$ tego rodzaju, że
$(\forall \delta \in M)(\exists x \in A)(\exists x' \in B)(x' - x < \delta)$, to
$(\exists z \in M)(\forall x \in A)(\forall x' \in B)(x < z < z')$.

Hölder dowodzi, że z aksjomatów H1-H3, H15 oraz V wynika H4. Tym samym otrzymujemy jeszcze jedną, prawie nieznaną wersję aksjomatu ciągłości[38]. Następnie pokazuje, że z aksjomatów H1-H3 oraz V nie wynika ani aksjomat Archimedesa, ani aksjomat ciągłości. W związku z tym twierdzeniem przedstawimy model, który w trochę prostszy sposób oddaje rozumowanie Höldera.

Przyjmijmy $M_2 = (\{0\} \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ z porządkiem leksykograficznym $\prec$ oraz dodawaniem „po współrzędnych" $\oplus$. Wprost sprawdzamy, że $\mathfrak{M}_2 = (M_2, \oplus, \prec)$ jest półgrupą, w której spełnione są aksjomaty H1- H3.

Dalej, gdy para (A, B) spełnia założenia aksjomatu V, wówczas przyjmując $\delta = (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dostajemy, że istnieje taka oś $l = \{a\} \times \mathbb{R}$, że $A \cap l \neq \emptyset, B \cap l \neq \emptyset$. Stąd zaś wynika, na mocy faktu, że w półgrupie $(\mathbb{R}, +, <)$ jest spełniony aksjomat V, że w $\mathfrak{M}_2$ spełniony jest aksjomat V.

---

[36] Zob. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, op. cit., s. 73-76.
[37] Zob. tamże, s. 72-73.
[38] Zob. P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticum Mathematicae IV, 2012, s. 15-30, §6.

Zauważmy teraz, że elementy osi $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ sprawiają, że półgrupa $\mathfrak{M}_2$ nie jest archimedesowa. Dla dowolnego n zachodzi bowiem $n(0,b) = (0,nb) \prec (1,0)$. Skoro w $\mathfrak{M}_2$ nie jest spełniony aksjomat Archimedesa, to w konsekwencji nie jest też spełniony aksjomat H4.

Warte odnotowania są wypowiedzi Höldera dotyczące kontinuum: *Przy wyborze aksjomatu ciągłości* VERONESE *jest się zmuszonym, gdy chce się opisać zwykłe kontinuum, wprowadzić także specjalnie aksjomat Archimedesa"; „Moim celem jest tu jedynie podanie prostego systemu aksjomatów, z którego dadzą się wyprowadzić własności zwykłego kontinuum wielkości; nie zamierzam, jak czynił to* BETTAZI *(*Teoria delle grandezze *1890), wprowadzać szczególnych rodzajów wielkości, lub rozszerzać powszechnie przyjętego pojęcia kontinuum, co próbował czynić* VERONESE *w swoim* Continuo assoluto *1889).*

Znajdujemy tu oczywiste nawiązanie do budowanych przez Verosnese systemów niearchimedsowych, ale ponadto widzimy, że dla Höldera „zwykłe kontinuum" jest strukturą porządkowo-algebraiczną $(M, +, <)$, a nie zbiorem uporządkowanym $(M, <)$ czy przestrzenią topologiczną (M, τ).

5.2. Ciągłość bez aksjomatu Archimedesa

W rozprawie czytamy: „Sformułowanie, iż aksjomat Archimedesa miałby być 'zawarty' w aksjomacie ciągłości DEDEKINDA, może prowadzić do nieporozumień. Podkreślam, że aksjomat Archimedesa może zostać *wyprowadzony* z aksjomatu VII, przy pomocy aksjomatów od I do VI, ale tylko na sposób podany w tekście lub podobny i dlatego taki dowód w żadnej mierze nie jest zbędny".

Sens tej wypowiedzi jest taki: H15 wynika z koniunkcji warunków H1-H4, a nie z samego aksjomatu H4. Hölder nie rozwija dalej tej myśli, dlatego wskażemy teraz półgrupę, w której zachodzi H4, a nie zachodzi H15.

Zaczniemy od przykładu wprowadzającego. Niech $M_3 = (0,1) \times [0,1]$, gdzie $(0,1)$, $[0,1]$ to przedziały liczb rzeczywistych. Pary należące do M_3 mnożymy „po współrzędnych", tj. $(a,b) \oplus (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. W M_3 przyjmujemy porządek antyleksykograficzny, $(a,b) \prec (c,d)$ wtw. $a > c \vee (a = c \wedge b > d)$.

Podobnie, jak wyżej pokazujemy, że struktura $\mathfrak{M}_3 = (M_3, \oplus, \prec)$ jest półgrupą, a porządek $\prec$ jest ciągły. Spełniony jest też aksjomat Archimedesa. Istotnie, gdy $(a,b) \succ (c,d)$ oraz $a \leqslant c$, to dla pewnego n jest $c^n < a$, czyli $n(c,d) \succ (a,b)$.

Przyjmijmy teraz $M_4 = M_3 \cup (\{0\} \times (0,1])$, zaś działania i porządek niech będą określone tak, jak w M_3. Struktura $\mathfrak{M}_4 = (M_4, \oplus, \prec)$ jest półgrupą, porządek $\prec$ jest ciągły, ale nie jest już spełniony aksjomat Archimedesa. Rozważmy bowiem pary $(0,1)$ oraz $(1/2,1)$. Jest $(1/2,1) \prec (0,1)$, a zarazem dla każdego n zachodzi $n(1/2,1) = (1/2^n,1) \prec (0,1)$.

6. Aksjomat Archimedesa

Na zakończenie słowo o terminie „aksjomat Archimedesa". Stolz nazywa tak warunek S1. Tę samą nazwę i formułę powtarza Hölder. Aksjomat W1 Webera oraz aksjomat E1 Euklidesa mają identyczną postać, ale Weber nie nadaje aksjomatom żadnych nazw. W *Grundlagen der Geometrie* Hilberta E1 występuje jako aksjomat Archimedesa[39] zaś w *Podstawach geometrii* Borsuka i Szmielew jest to „pewnik Archimedesa"[40]. Fakty historyczne i logiczne są natomiast następujące:

Warunek E1 to definicja 4. z Księgi V *Elementów*: „Mówi się o wielkościach, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy zwielokrotniona (πολλαπλασιαζόμενα), jedna może przekroczyć (ὑπερέχειν) drugą"[41].

Lemat Archimedesa w wersji z traktatu *O sferze i cylindrze* ma postać: „Co do nierównych linii i nierównych powierzchni, i nierównych brył, to większa przekracza (ὑπερέχειν) mniejszą, o taką, że dodawana (συντιθέμενον) do siebie może przekroczyć wyznaczoną między wszystkimi, gdy porównane jedna z drugą"[42]. Zapisujemy go formułą:

$$\text{LA} \quad (\forall x, y, z)(\exists n \in \mathbb{N})[x < y \to n(y - x) > z].$$

Archimedes wspomina, że lemat ten był stosowany przez Eudoxosa, co może usprawiedliwiać funkcjonującą również nazwę „aksjomat Archimedesa-Eudoxosa".

Aksjomat LA jest powtórzony w traktacie *Kwadratura paraboli*[43]. Natomiast w traktacie *O liniach spiralnych* przywołując swój lemat Archimedes stosuje E1[44].

Można pokazać, że formuły E1 oraz LA nie są logicznie równoważne (zakładając, że $\mathfrak{M}$ jest półgrupą). W tym celu wystarczy rozważyć strukturę $\mathfrak{M}_2$ z poprzedniego paragrafu. Podobnie formuła H15 oraz LA nie są logicznie równoważne. Formuły E1 oraz H15 także nie są logicznie równoważne.

Nazwę „aksjomat Archimedesa" ukuł – jak wspomnieliśmy – Otto Stolz wskazując jako źródło cytowany wyżej lemat z *O sferze i cylindrze* oraz traktat *Kwadratura paraboli*[45]. Rozpowszechniła się ona za sprawą dużej popularności *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik* oraz *Theoretische Arithmetik*. Natomiast Heiberg w komentarzu do lematu Archimedesa cytuje Euklidesa definicję V.4 wraz z uwagą, że są to te same aksjomaty[46]. To zapewne pod wpływem tego komentarza definicja z Księgi V *Elementów* jest nazywana aksjomatem Archimedesa.

*
* *

Zamieszczone w niniejszym tomie tłumaczenie *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego. Jest to najprawdopodobniej pierwszy przekład na język polski tego teksu. Kolejne paragrafy rozprawy znajdzie Czytelnik na stronie www.eudoxos.pl.

---

[39] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, op.cit., s. 19.

[40] Zob. K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, op. cit., s. 142.

[41] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, op. cit.

[42] *De Sphaera et Cylindro*, I. Lamb. 5, w: *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, ed. J.L. Heiberg, Teubner, Leipzig, 1880, s. 11, tłum. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[43] *Quadratura Parabolae*, w: *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. II, ed. J.L. Heiberg, Teubner, Leipzig, 1881, s. 288-290.

[44] *De Lineis Spiralibus*, w: *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. II, op.cit., s. 21.

[45] Zob. O. Stolz, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, op. cit., s. 70, 332.

[46] Zob. *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, op. cit., s. 11.