FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Georg Cantor

O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*

Podam niżej pewne rozszerzenie twierdzenia głoszącego, że przedstawienia szeregów trygonometrycznych są jednoznaczne.

Dowód tego, że dwa szeregi geometryczne:

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad oraz \quad \frac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx),$$

które dla każdej wartości x są zbieżne i mają tę samą sumę, mają też identyczne współczynniki, przedstawiłem w *Journal f. d. r. u. angew. Math.* **72**, s. 139; w innym miejscu, w notatce, odwołującej się do tej pracy, pokazałem dalej, że twierdzenie to pozostaje słuszne, gdy dla skończonej liczby wartości x zrezygnuje się ze zbieżności lub równości sum szeregów.

Rozważane *tutaj* rozszerzenie zasadza się w tym, że można zrezygnować ze zbieżności lub równości sum szeregów dla *nieskończonej* liczby wartości x w przedziale $(0 \dots (2\pi))$, bez utraty słuszności twierdzenia.

W tym celu jestem jednak zmuszony przedstawić rozważania, choć w większej części tylko w postaci wskazówek, które mogą służyć do tego, aby objaśnić związki, które pojawiają się stale, gdy tylko wielkości liczbowe podane są w skończonej lub nieskończonej ilości; doprowadzi to przy tym do pewnych definicji, które zostaną tu ustanowione jedynie dla zapewnienia możliwie zwięzłego przedstawienia rozważanego twierdzenia, którego dowód będzie podany w §3.

§1.

Liczby wymierne stanowią podstawę dla ustalenia szerszego pojęcia wielkości liczbowej; będę je oznaczał jako dziedzinę A (z włączeniem zera).

Gdy mówię o wielkości liczbowej w sensie szerszym, to jest tak najpierw w przypadku, gdy dany jest przez jakieś prawo nieskończony ciąg liczb wymiernych:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \tag{1}$$

*The generalization of a theorem in the theory of trigonometric series który ma tę własność, że różnica $a_{n+m} - a_n$ przy zmiennej n staje się nieskończenie mała, jakakolwiek jest dodatnia liczba całkowita m, lub innymi słowy, że dla dowolnej (dodatniej, wymiernej) ε istnieje taka liczba całkowita n_1, że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geq n_1$, zaś m jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

Tę własność ciągu (1) wyrażam słowami: *„Ciąg (1) ma określoną granicę b".*

Słowa te nie mają więc na razie żadnego innego sensu jak ten, który jest wyrażeniem owej własności ciągu, a z warunku, że łączymy z ciągiem (1) szczególny znak b, wynika, iż dla różnych tego rodzaju ciągów tworzyć też należy różne znaki b, b', b''.

Jeśli dany jest drugi ciąg:

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots, \tag{1'}$$

który ma określoną granicę b', to okazuje się, że oba ciągi (1) i (1') pozostają do siebie w jednej z 3 zależności, które nawzajem się wykluczają:

1. $a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n, lub
2. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε, lub
3. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$.

Gdy ma miejsce pierwsza zależność, to przyjmuję

$$b = b',$$

przy drugiej przyjmuję $b > b'$, a przy trzeciej $b < b'$.

Podobnie okazuje się, że ciąg (1), który ma granicę b, pozostaje z liczbą wymierną a tylko w jednej z następujących 3 zależności.

1. $a_n - a$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n, lub
2. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε, lub
3. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$.

Aby wyrazić zachodzenie tych zależności, piszemy odpowiednio:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

Z tych oraz kolejnych definicji otrzymuje się jako *wniosek*, że gdy b jest granicą ciągu (1), a następnie $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, to określenie „granica ciągu (1)" na b znajduje *ubocznie* pewne uzasadnienie.

Ogół wielkości liczbowych b będę oznaczał przez B.

Za pomocą powyższych ustaleń elementarne operacje, które były przyjęte dla liczb wymiernych dają się rozszerzyć na obie dziedziny A oraz B razem wzięte.

Jeśli mianowicie b, b', b'' są trzema wielkościami liczbowymi z B, to wzory:

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

wyrażają to, że pomiędzy ciągami odpowiadającymi liczbom b, b', b'':

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, \dots \\ a'_1, a'_2, \dots \\ a''_1, a''_2, \dots \end{array}$$

zachodzą, odpowiednio zależności:

$$\begin{array}{l} \lim(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0, \\ \lim(a_n a'_n - a''_n) = 0 \\ \lim(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n) = 0, \end{array}$$

gdzie, na mocy poprzednich wyjaśnień nie muszę wchodzić bliżej w znaczenie znaku lim. Podobne definicje podaje się dla przypadku, gdy jedna lub dwie z tych trzech liczb należy do dziedziny A.

W ogólności każde równanie

$$F(b, b', \dots b^{(\rho)}) = 0$$

utworzone poprzez zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych będzie dawało wyraz określonej zależności, zachodzącej między ciągami, które są wyznaczone przez liczby $b, b', \dots b^{(\rho)}$[1].

Dziedzina B wyprowadzona była z dziedziny A; teraz w analogiczny sposób wytwarza ona, wspólnie z dziedziną A, nowa dziedzinę C.

Jeśli dany jest nieskończony ciąg:

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \tag{2}$$

wielkości liczbowych z dziedzin A oraz B, które nie należą wszystkie do dziedziny A oraz jeżeli ciąg ten ma tę własność, że $b_{n+m} - b_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, jakakolwiek jest m, a więc własność, która na mocy poprzednich definicji jest czymś całkowicie określonym, to mówię o takim ciągu, iż ma on określoną granicę c.

Wielkości liczbowe c konstytuują dziedzinę C.

Definicje równości, większości oraz mniejszości, jak też operacje elementarne zarówno między wielkościami c, jak również między nimi oraz wielkościami z B oraz A podaje się w analogiczny sposób jak poprzednio.

[1]Gdy np. równanie μ-tego stopnia $f(x) = 0$ ze współczynnikami całkowitoliczbowymi posiada pierwiastek rzeczywisty ω, to znaczy to w ogólności nic innego niż to, że dany jest ciąg

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

o własności ciągu (1), dla którego granicą wybrany jest znak ω i który ma poza tym własność

$$\lim f(a_n) = 0.$$

Podczas gdy dziedziny B oraz A mają się tak do siebie, że choć każde a przyporządkowane jest pewnemu b, ale nie każde b przyporządkowane może być jakiemuś a, to okazuje się, że zarówno każde b może zostać przyporządkowane pewnemu c, jak i każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b.

Chociaż dziedziny B oraz C poniekąd nawzajem się pokrywają, jest istotne w przedstawionej tu teorii (w której wielkość liczbowa występuje najpierw w ogólności bezprzedmiotowo, jedynie jako część składowa twierdzeń, którym przydaje się przedmiotowości, np. twierdzeniu, że stosowny ciąg ma tę wielkość liczbową jako granicę), aby trzymać się pojęciowego rozróżnienia pomiędzy obydwiema dziedzinami B oraz C, przy czym nawet przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b, b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą.

Z dziedziny C wyprowadza się, analogicznie jak poprzednio, dziedzinę D, z tej dziedzinę E, itd.; poprzez λ takich przejść (gdzie przejście od A do B uważam za pierwsze) dochodzi się do dziedziny wielkości liczbowych L. Rzecz przedstawia się tak samo, gdy myśli się o łańcuchu definicji dla równości, większości i mniejszości oraz operacji elementarnych jako o przenoszonych na dziedzinę z dziedziny poprzedniej, z wyjątkiem A, w ten sposób, że wielkość liczbowa l zawsze może zostać przyrównana do jednej z wielkości $k, i, \ldots, c, b$ oraz na odwrót.

Wyniki analizy (pomijając nieliczne znane przypadki) dają się sprowadzić do postaci takich przyrównań, chociaż (co tutaj może opierać się tylko na owych wyjątkach) pojęcie liczby, tak jak daleko jest tu rozwinięte niesie w sobie zalążek koniecznego samego w sobie i absolutnie nieskończonego rozszerzania.

Wydaje się właściwe, gdy dana jest wielkość liczbowa w dziedzinie L, posługiwać się wyrażeniem: *jest ona dana jako wielkość liczbowa, wartość lub granica λ-tego rodzaju*, z czego jest widoczne, że w ogólności w tym samym znaczeniu posługuję się słowami *wielkość liczbowa*, *wartość* oraz *granica*.

Równanie $F(l, l', \ldots, l^{(\rho)}) = 0$ dane poprzez skończoną liczbę operacji elementarnych na liczbach $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$ jawi się w nakreślonej tu teorii dokładnie, jako wyrażenie dla określonej zależności pomiędzy $\rho + 1$, *w ogólności λ-krotnie nieskończonych, ciągów liczb wymiernych*; są to ciągi, które wychodzą od ciągów prosto nieskończonych, z którymi najpierw wiążą się wielkości $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$, a gdy zastąpi się w nich elementy poprzez stosowne ciągi, to powstałe, w ogólności dwukrotnie nieskończone ciągi są traktowane podobnie i proces ten jest prowadzony tak długo, aż widzi się przed sobą tylko liczby wymierne.

Zastrzegam sobie, by do wszystkich tych związków powrócić bardziej szczegółowo w innym miejscu. Nie ma tu również miejsca na to, aby zagłębiać się w to, *jak* wprowadzone w tym § ustalenia oraz operacje mogą służyć potrzebom analizy infinitezymalnej. Także w tym co następuje, gdzie przedstawiony zostanie związek wielkości liczbowych z geometrią linii prostej, ograniczam się nieomal wyłącznie do koniecznych twierdzeń, z których, o ile się nie mylę, cała reszta może zostać wyprowadzona za pomocą czysto logicznych środków dowodowych. Dla porównania z § 1 oraz § 2 niech zostanie przywołana księga 10 „Elementów Euklidesa", która pozostaje miarodajna dla przedstawionego tam przedmiotu.

§2.

Punkty linii prostej są pojęciowo określone przez to, że podaje się, w leżącej u podstaw jednostce miary, ich odcięte, ich odległości od ustalonego punktu o linii prostej, ze znakiem $+$ lub $-$, w zależności od tego, czy rozważany punkt leży w (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej części prostej.

Jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary, to będzie ona wyrażona przez wielkość liczbową z dziedziny A; w innych przypadkach, gdy punkt jest na przykład *znany* na mocy jakiejś konstrukcji, zawsze możliwe jest podanie ciągu:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

który ma własność wyrażoną w §1 oraz pozostaje w takim związku do rozważanej odległości, że punkty linii prostej, które otrzymują odległości $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ wraz ze wzrastającą n, zbliżają się nieskończenie do owego określonego punktu.

Wyrażamy to w ten sposób, że mówimy: *Odległość rozważanego punktu od punktu o równa jest b, gdzie b* jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1).

Następnie dowodzi się, że większość, mniejszość oraz równość znanych odległości pozostaje w zgodzie ze zdefiniowanymi w § 1: większością, mniejszością oraz równością odpowiednich wielkości liczbowych, które podają odległości.

To, że również wielkości liczbowe z dziedzin $C, D, \ldots$ są w stanie określać znane odległości, otrzymuje się bez trudności. Aby jednak uczynić pełnym przedstawiony w tym § związek dziedzin wielkości liczbowych zdefiniowanych w § 1 z geometrią linii prostej, należy tylko dodać *aksjomat*, który polega po prostu na tym, że także na odwrót, każdej wielkości liczbowej odpowiada ustalony punkt prostej, którego współrzędna jest równa owej wielkości liczbowej, i to równa w tym sensie, jaki został objaśniony w niniejszym §[2].

Nazywam to twierdzenie *aksjomatem*, ponieważ w jego naturze leży to, iż nie jest ono w ogólności dowodliwe.

Poprzez ów aksjomat uzyskuje się pewną przedmiotowość wielkości liczbowych, od której jest on jednak całkiem niezależny.

Zgodnie z powyższym traktuję punkt prostej jako określony, gdy jego odległość od o, zaopatrzona w przynależny znak, jest dana jako wielkość liczbowa, wartość lub granica λ-tego rodzaju.

—

Chcemy teraz, zbliżając się do naszego właściwego przedmiotu rozważań, omówić zależności, które występują, gdy tylko wielkości liczbowe dane są w skończonej lub nieskończonej liczbie.

Na mocy poprzednio powiedzianego można myśleć o wielkościach liczbowych jako przyporządkowanych punktom prostej. Dla poglądowości (choć nie należy to

[2]Do każdej wielkości liczbowej przynależy zatem określony punkt, jednemu punktowi jest jednak przyporządkowanych niezliczenie wiele równych wielkości liczbowych jako współrzędnych w powyższym sensie; gdyż z czysto logicznych powodów wynika, jak już to wyżej zaznaczano, że równym wielkościom liczbowym *nie* mogą odpowiadać różne punkty oraz że nierównym wielkościom liczbowym jako współrzędnym *nie* może być przyporządkowany jeden i ten sam punkt.

do istoty rzeczy) posługujemy się tym przedstawieniem w dalszym ciągu i gdy mówimy o punktach mamy zawsze przed oczyma wartości, przez które są one podane.

Daną skończoną lub nieskończoną liczbę wielkości liczbowych nazywam dla zwięzłości *zbiorem wartości*, a odpowiednio, daną skończoną lub nieskończoną liczbę punktów prostej nazywam *zbiorem punktów*. To, co w dalszym ciągu zostanie powiedziane o zbiorach punktów, można, zgodnie z powiedzianym, przetłumaczyć bezpośrednio na zbiory wartości.

Gdy w skończonym przedziale dany jest zbiór punktów, to w ogólności dany jest wraz z nim drugi zbiór punktów, a w ogólności wraz z nim trzeci zbiór punktów, itd., które są istotne dla pojmowania natury pierwszego zbioru punktów.

Aby zdefiniować te pochodne zbiory punktów, trzeba najpierw wprowadzić pojęcie *punktu granicznego zbioru punktów*.

Przez punkt graniczny zbioru punktów P rozumiem punkt prostej, w takim położeniu, że w każdym jego otoczeniu znajduje się *nieskończenie* wiele punktów z P, przy czym może się zdarzyć, że ponadto on sam należy do tego zbioru. Przez otoczenie punktu niech będzie tu rozumiany każdy przedział, który zawiera ten punkt *w swoim wnętrzu*. Następnie łatwo udowodnić, że złożony z nieskończonej liczby punktów zbiór punktów zawsze ma *co najmniej jeden* punkt graniczny.

Dla każdego punktu prostej jest w pełni określone, czy względem danego zbioru punktów P jest on jego punktem granicznym czy też takim nie jest, a stąd wraz ze zbiorem punktów P podany jest pojęciowo zbiór jego punktów granicznych, który będę oznaczał przez P' oraz nazywał *pierwszym pochodnym zbiorem punktów* dla P.

Jeśli zbiór punktów P' nie składa się z jedynie skończonej liczby punktów, to ma on również pochodny zbiór punktów P'', nazywam go *drugim pochodnym zbiorem dla* P. Poprzez ν takich przejść tworzy się pojęcie ν-tego pochodnego zbioru punktów $P^{(\nu)}$ dla P.

Jeśli, dla przykładu, zbiór P składa się ze wszystkich punktów prostej, którym odpowiadają odcięte wymierne pomiędzy 0 i 1, z włączeniem lub nie granic, to zbiór pochodny P' składa się ze *wszystkich* punktów przedziału $(0 \ldots 1)$, z włączeniem granic 0 oraz 1. Następne zbiory $P'', P''', \ldots$ pokrywają się z P'. Albo, jeśli zbiór P składa się z punktów, którym odpowiadają odcięte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, to zbiór P' składa się z jednego punktu 0 i sam nie ma żadnego zbioru pochodnego.

Może się zdarzyć, a jest to przypadek, który wyłącznie nas tu interesuje, że po ν przejściach zbiór $P^{(\nu)}$ składa się ze skończonej liczby punktów, a stąd sam nie ma pochodnej; w tym przypadku chcemy nazywać wyjściowy zbiór P zbiorem *ν-tego rodzaju*, z czego wynika, że $P', P'', \ldots$ są wtedy, odpowiednio, $\nu - 1$-ego, $\nu - 2$-ego,..., rodzaju.

Przy tym sposobie pojmowania dziedzina wszystkich zbiorów punktów określonego rodzaju będzie zatem traktowana, jako szczególny typ wewnątrz dziedziny wszystkich do pomyślenia zbiorów punktów, w którym to typie tak zwane zbiory punktów ν-tego rodzaju tworzą rodzaj szczególny.

Przykładu zbioru punktów ν-tego rodzaju dostarcza już jeden jedyny punkt, gdy jego odcięta jest dana jako wielkość liczbowa ν-tego rodzaju, która czyni zadość pewnym, łatwym do ustalenia warunkom. Jeśli mianowicie rozłoży się tę wielkość liczbową na człony $(\nu - 1)$-ego rodzaju w odpowiadającym jej ciągu, te człony znowu na konstytuujące je człony $(\nu-2)$-ego rodzaju, itd., to otrzyma się w końcu nieskończoną liczbę liczb wymiernych; jeśli pomyśli się o odpowiadającym tym liczbom zbiorze punktów, to jest on sam ν-tego rodzaju[3].

Po tych przygotowaniach jesteśmy teraz w stanie w następnym § krótko podać oraz udowodnić rozważane twierdzenie.

§3.

Twierdzenie. *Jeśli dane jest równanie o postaci:*

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots, \tag{I}$$

gdzie $C_0 = \frac{1}{2}d_0$*;* $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$*, dla wszystkich wartości* x *z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom danego w przedziale* $(0\ldots(2\pi))$ *zbioru punktów* P ν*-tego rodzaju, przy czym* ν *oznacza dowolnie dużą liczbę całkowitą, to*

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Dowód: Jak będzie widoczne w toku dowodu, gdy mowa o P, to nie mamy przed oczyma jedynie podanego zbioru ν-tego rodzaju punktów wyjątkowych w przedziale $(0\ldots(2\pi))$, lecz ten zbiór, który powstaje z owego podanego przez periodyczne powtórzenie na całej nieskończonej linii prostej.

Rozważmy teraz funkcję

$$F(x) = C_0\frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \ldots - \frac{C_n}{nn} - \ldots$$

Z natury zbioru punktów ν-tego rodzaju wynika łatwo, że musi istnieć przedział $(\alpha\ldots\beta)$, w którym nie leży żaden punkt zbioru P; dla wszystkich wartości x w tym przedziale, wobec zbieżności naszego szeregu (I) będzie zatem

$$\lim(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

a stąd zgodnie ze znanym twierdzeniem (patrz: *Math. Ann.* Bd. **IV**, s. 139):

$$\lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 0.$$

Funkcja $F(x)$ ma zatem (patrz: Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, §8) następujące własności:

1. jest ona ciągła w pobliżu każdej wartości x,
2. $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, gdy $\lim\alpha = 0$, dla wszystkich wartości x z wyjątkiem wartości, odpowiadających punktom ze zbioru P,
3. $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, gdy $\lim\alpha = 0$, dla każdej bez wyjątku wartości x.

[3] To, że nie zawsze jest to ten przypadek, zasługuje może jeszcze na wyraźne podkreślenie. W ogólności, zbiór punktów wyprowadzony na ów sposób z wielkości liczbowej ν-tego rodzaju może być równie dobrze mniejszego lub większego rodzaju od ν-tego, a może i całkiem nie być określonego rodzaju.

Pokażę teraz, że $F(x) = cx + c'$. W tym celu rozważam najpierw dowolny przedział $(p \dots q)$, w którym leży tylko skończona liczba punktów ze zbioru P; niech tymi punktami będą $x_0, x_1, \dots, x_r$, wypisane wedle ich następowania po sobie.

Twierdzę, że $F(x)$ jest *liniowa* w przedziale $(p \dots q)$; na mocy własności 1 oraz 2 $F(x)$ jest bowiem funkcją liniową w każdym przedziale, na które podzielony zostanie $(p \dots q)$ poprzez punkty $x_0, x_1, \dots, x_r$; ponieważ w żadnym z tych przedziałów nie leżą punkty wyjątkowe, więc zachodzą tu wnioski otrzymane w mojej rozprawie (patrz: *Journal f. d. r. u. angew. Math.* Bd. **71**, s. 139); pozostaje zatem wykazać identyczność tych funkcji liniowych.

Uczynię to dla każdych dwóch sąsiednich przedziałów i wybieram w tym celu te funkcje w obu przedziałach $(x_0 \dots x_1)$ oraz $(x_1 \dots x_2)$.

W $(x_0 \dots x_1)$ niech $F(x) = kx + l$.

W $(x_1 \dots x_2)$ niech $F(x) = k'x + l'$.

Ze względu na 1 jest $F(x_1) = kx_1 + l$; dalej, dla wystarczająco małej wartości α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l'; \quad F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

Ze względu na 3 mamy zatem:

$$\lim \frac{(k' - k)x + l' - l + \alpha(k' - k)}{\alpha} = 0, \quad \text{dla } \lim \alpha = 0,$$

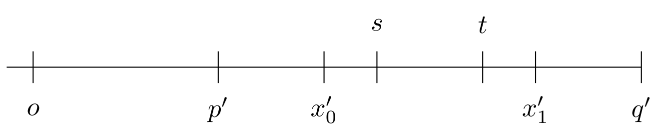
co nie może być niczym innym, jak przypadkiem gdy:

$$k = k', \quad l = l'.$$

Dla przejrzystości chcemy szczególnie podkreślić ten wynik:

($\mathbb{A}$) *„Jeśli $(p \dots q)$ jest jakimkolwiek przedziałem, w którym leży tylko skończona liczba punktów zbioru P, to $F(x)$ jest w tym przedziale liniowa”.*

Dalej rozważam jakikolwiek przedział $(p' \dots q')$, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ pierwszej pochodnej P' i twierdzę najpierw, że w każdym z przedziałów częściowych, na które $(p' \dots q')$ jest podzielony poprzez punkty $x'_0, x'_1, \dots$ funkcja $F(x)$ jest liniowa, np. w $(x'_0 \dots x'_1)$.



Ponieważ każdy z tych przedziałów częściowych zawiera wprawdzie w ogólności nieskończenie wiele punktów z P, więc wynik ($\mathbb{A}$) nie znajduje w nim bezpośrednio zastosowania; natomiast każdy przedział $(s \dots t)$, który całkowicie wpada wewnątrz $(x'_0 \dots x'_1)$ zawiera tylko skończenie wiele punktów z P' (gdyż w przeciwnym razie między x'_0 a x'_1 wpadałyby jeszcze inne punkty zbioru P) i funkcja $F(x)$ jest, na mocy ($\mathbb{A}$), liniowa w $(s \dots t)$. Jako że można punkty końcowe s oraz t przesunąć nieskończenie blisko do punktów x'_0 oraz x'_1, zostaje rozstrzygnięte, że funkcja ciągła $F(x)$ też jest liniowa w $(x'_0 \dots x'_1)$.

Gdy jest to udowodnione dla każdego z przedziałów częściowych $(p' \dots q')$ otrzymuje się, poprzez te same wnioski, które dawały wynik ($\mathbb{A}$), co następuje:

($\mathbb{A}'$) *„Jeśli* $(p' \dots q')$ *jest jakimkolwiek przedziałem, w którym leży tylko skończona liczba punktów z* P'*, to* $F(x)$ *jest w tym przedziale liniowa.*

Dowód postępuje dalej w taki oto sposób. *Jeśli ustalono, że* $F(x)$ *jest funkcją liniową w jakimkolwiek przedziale* $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$*, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów z* k*-tego zbioru pochodnego* $P^{(k)}$ *dla zbioru* P*, to uzasadnia się dalej tak samo jak przy przejściu od* ($\mathbb{A}$) *do* ($\mathbb{A}'$)*, że* $F(x)$ *jest funkcją liniową także w jakimkolwiek przedziale* $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$*, który zawiera w sobie tylko skończoną liczbę punktów z* $k+1$*-ego zbioru pochodnego* $P^{(k+1)}$ *dla zbioru* P*.*

Wnioskujemy tak poprzez skończoną liczbę przejść, że $F(x)$ jest liniowa w każdym przedziale, który zawiera tylko skończoną liczbę punktów ze zbioru $P^{(\nu)}$. Zbiór P jest teraz jednak ν-tego rodzaju, jak założono, a stąd całkiem dowolnie wzięty z prostej przedział $(a \dots b)$ zawiera tylko skończenie wiele punktów z $P^{(\nu)}$. A zatem $F(x)$ jest liniowa w dowolnie wziętym przedziale $(a \dots b)$, a z tego wynika, jak łatwo widać, że $F(x)$ jest postaci: $F(x) = cx + c'$ dla wszystkich wartości x. Gdy to już uczyniono, dowód przebiega dalej od tego momentu mianowicie w ten sposób, jak w cytowanej już dwukrotnie rozprawie, gdzie również dowodzi się, że $F(x)$ ma postać liniową.

Udowodnionemu tu twierdzeniu można też nadać następujące sformułowanie:

„Funkcja nieciągła $f(x)$*, która dla wszystkich wartości* x*, które odpowiadają punktom zbioru punktów* P ν*-tego rodzaju danego w przedziale* $(0 \dots (2\pi))$*, jest różna od zera lub nieokreślona, lecz jest równa zero dla wszystkich pozostałych wartości* x*, nie może zostać przedstawiona poprzez szereg trygonometryczny.*

Halle, 8 listopada 1871.

* * *

Podstawa przekładu: Cantor, G. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **5**, 123–132.

Przekład: Jerzy Pogonowski
30 września 2010