FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Historia matematyki, Konferencje

Piotr Błaszczyk

Nota o *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* Georga Cantora*

Cantor rozpoczynał karierę matematyczną na Uniwersytecie Berlińskim, będąc pod wpływem Kroneckera, Kummera i Weierstrassa. W roku 1869 objął stanowisko *Privatdozenta* na Uniwersytecie w Halle i tam przedłożył rozprawę habilitacyjną. W tym okresie zajmował się teorią liczb.

W Halle, za namową Heinego, zainteresował się analizą matematyczną i szeregami trygonometrycznymi. Już w roku 1870 osiągnął istotny wynik, udowodnił mianowicie twierdzenie: *Jeżeli funkcję rzeczywistą $f(x)$ można przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego zbieżnego dla każdej wartości x, to przedstawienie to jest jednoznaczne.* W kolejnych pracach rozważał funkcje, dla których przedstawienie w postaci szeregu trygonometrycznego zachodzi poza pewnymi zbiorami, najpierw skończonymi, później nieskończonymi. To doprowadziło go do pojęcia *punktu granicznego* (punktu skupienia – we współczesnej nomenklaturze) oraz pochodnej zbioru[1].

1. Praca *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* została opublikowana w roku 1872[2]. Cantor dowodzi w niej następującego twierdzenia:

„Jeśli dane jest równanie postaci:

$$(I) \qquad 0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots,$$

gdzie $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, dla wszystkich wartości x z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom danego w przedziale $(0 \ldots (2\pi))$ zbioru punktów P ν-tego rodzaju, przy czym ν oznacza dowolnie dużą liczbę całkowitą, to

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0''.$$

*Note on Georg Cantor's *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*

[1]Zob. J. Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton Univeristy Press, Princeton 1990, ss. 30–37.

[2]G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* **5**, 1872, 123–132, dalej cytowana za G. Cantor, *O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych*, tłumaczenie J. Pogonowski, w niniejszym tomie.

Pojęcie *zbioru ν-tego rodzaju* oparte jest na pojęciu *punktu granicznego*. Odpowiednie definicje podane są w nienumerowanej części artykułu – interludium między drugiem a trzecim paragrafem. Czytamy tam:

„Przez punkt graniczny zbioru punktów P rozumiem punkt prostej tak położony, że w każdym jego otoczeniu znajduje się *nieskończenie* wiele punktów z P, przy czym może się zdarzyć, że ponadto on sam należy do tego zbioru. Przez otoczenie punktu niech będzie tu rozumiany każdy przedział, który zawiera ten punkt *w swoim wnętrzu*. [...] Dla każdego punktu prostej jest w pełni określone, czy względem danego zbioru punktów P jest on jego punktem granicznym czy też takim nie jest, a stąd wraz ze zbiorem punktów P podany jest pojęciowo zbiór jego punktów granicznych, który będę oznaczał przez P' oraz nazywał *pierwszym pochodnym zbiorem punktów* dla P. Jeśli zbiór punktów P' nie składa się z jedynie skończonej liczby punktów, to ma on również pochodny zbiór punktów P'', nazywam go *drugim pochodnym zbiorem dla* P. Poprzez ν takich przejść tworzy się pojęcie ν-tego pochodnego zbioru punktów $P^{(\nu)}$ dla P".

Definicje te traktują – jak widzimy – o podzbiorach *prostej*, ale w rozprawie i ogólniej XIX-wiecznej analizie matematycznej w ogóle, linia prosta nie była jasno zdefiniowanym obiektem. Zapoczątkowany przez Weierstrassa program arytmetyzacji analizy postulował wyeliminowanie z dowodów odwołań do *intuicji geometrycznych*, co sprowadzało się do tego, że należało przyjmować tylko wprost sformułowane własności liczb rzeczywistych, a liczby te winny być definiowane na gruncie arytmetyki liczb wymiernych[3]. W omawianej rozprawie myśl ta jest realizowana w zawiły sposób. Otóż w § 1 Cantor konstruuje liczby rzeczywiste, zaś w § 2 ustanawia bijekcję między linią prostą i osią liczb rzeczywistych. Skoro jednak prosta – powtórzmy – nie jest zdefiniowana, wywód ten z konieczności jest niejasny (zob. niżej punkt 4). Więcej, nie jest on nawet potrzebny. Opowieść o podzbiorach prostej jest tylko parafrazą powodowaną wymogiem *poglądowości* i Cantor pisze o tym wprost:

„Na mocy tego, co poprzednio powiedziano można myśleć o wielkościach liczbowych [tj. liczbach rzeczywistych – P.B.] jako przyporządkowanych punktom prostej. Dla poglądowości (choć nie należy to do istoty rzeczy) posługujemy się tym przedstawieniem w dalszym ciągu i gdy mówimy o punktach mamy zawsze przed oczyma wartości, przez które są one podane".

W istocie więc *punkt graniczny*, *otoczenie punktu*, *przedział*, *zbiór P* i jego kolejne *pochodne* są definiowane na osi liczb rzeczywistych, tak jak we współczesnych wykładach topologii[4]. Z matematycznego punktu widzenia wywód Cantora z § 2 jest więc zbędny. Oceniając go natomiast z perspektywy historycznej, stanowi on ciekawe świadectwo rachunku różniczkowego z okresu kształtowania się programu arytmetyzacji. Cantor, podobnie jak Dedekind w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[5], posługuje się linią prostą niczym drabiną, która pozwala mu wspiąć

[3]Zwięzłą charakterystykę tego programu przedstawił F. Klein w artykule The arithmetizing of mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2(8), 1896, 241–246. Zob. także niżej pkt. 3.3.

[4]Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1973, s. 136 oraz R. Engelking, *Topologia ogólna*, t. I, PWN, Warszawa 1989, s. 40; zob. także niżej pkt. 3.

[5]R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872.

się na wyższe piętra abstrakcji. Ale droga abstrakcji prowadzi tylko w jedną stronę i z chwilą osiągnięcia poziomu liczb rzeczywistych linia prosta zostaje odrzucona jako dalej bezużyteczna. Z czasem, gdy Pasch i Hilbert zaczną budować nowoczesną geometrię, ciągłość liczb rzeczywistych stanie się aksjomatem geometrii i linia prosta zostanie scharakteryzowana jako ciągła w sensie ustalonym przez Dedekinda i Cantora[6].

W niniejszej nocie zostaną omówione dwa pierwsze paragrafy rozprawy. Traktują one o konstrukcji liczb rzeczywistych oraz związku między liczbami rzeczywistymi a linią prostą. Zaczniemy od konstrukcji, następnie szerzej omówimy zagadnienie zupełności liczb rzeczywistych, a w ostatnim punkcie zostaną skomentowane Cantora próby ustalenia związku między linią prostą a osią liczb rzeczywistych.

2. Współcześnie konstrukcję Cantora przedstawia się jak następuje. W punkcie wyjścia przyjmowane jest ciało liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Następnie rozważany jest zbiór ciągów spełniających warunek Cauchy'ego, $\mathcal{C}$, w którym zadana jest relacja równoważności: $(a_n) \equiv (b_n)$, gdy $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$[7]. Działania na klasach abstrakcji definiowane są *po współrzędnych*, np. $[(a_n)]+[(b_n)] = [(a_n+b_n)]$, zaś porządek $[(a_n)] < [(b_n)]$ zachodzi wtedy, gdy dla pewnego ε należącego do $\mathbb{Q}_+$ istnieje taki indeks k, że dla $n > k$ jest $a_n + \varepsilon < b_n$. Klasy ciągów stałych $[(a, a, a, ...)]$, dla $a \in \mathbb{Q}$, reprezentują w nowej strukturze liczby wymierne. Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ są definiowane jako zbiór ilorazowy $\mathcal{C}/_{\equiv}$. Pokazuje się, że struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

Oryginalna konstrukcja Cantora tylko w ogólnym zarysie przypomina jej współczesną wersję. W rozprawie, po pierwsze, liczby wymierne nie są wprost scharakteryzowane, nie można też wskazać niejawnie przyjmowanych założeń, bo z uwagi na deklarowaną *szkicowość* – „jestem jednak zmuszony przedstawić rozważania, choć w większej części tylko w postaci wskazówek" – wszystkie obliczenia zostały pominięte. Wiemy natomiast, że rozwijając teorię ciągów Cauchy'ego Cantor musiał założyć – wprost lub *implicite* – że liczby wymierne stanowią ciało uporządkowane. Po drugie, Cantor nie zna jeszcze techniki zbiorów ilorazowych i nie posługuje się relacją równoważności to zaś prowadzi do pewnych trudności matematycznych oraz poważnych wątpliwości filozoficznych. Po trzecie, charakteryzując liczby rzeczywiste Cantor wskazuje zupełność w sensie Cauchy'ego, a więc tylko *pół* aksjomatu ciągłości: *pełny* aksjomat ciągłości jest, jak wiemy, koniunkcją zupełności i aksjomatu Archimedesa[8].

Przyjrzymy się szczegółom.

2.1. Konstrukcję otwiera definicja ciągu Cauchy'ego[9].

„Gdy mówię o wielkości liczbowej w sensie szerszym, to jest tak najpierw w przy-

[6]Zob. M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.

[7]Dla zachowania czystości metody, aby pozostać w obrębie arytmetyki liczb wymiernych, w znanej definicji granicy w miejsce warunku $\forall\varepsilon > 0$ należy przyjąć $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$.

[8]Zob. P. Błaszczyk, O ciałach uporządkowanych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* IV, 2012, s. 23.

[9]W literaturze niemieckiej, dawnej i współczesnej, ciągi Cauchy'ego są nazywane ciągami podstawowymi, *Fundamentalereihe*.

padku, gdy dany jest przez jakieś prawo nieskończony ciąg liczb wymiernych:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

który ma tę własność, że różnica $a_{n+m} - a_n$ przy zmiennej n staje się nieskończenie mała, jakakolwiek jest dodatnia liczba całkowita m, lub, innymi słowy, że dla dowolnej (dodatniej, wymiernej) ε istnieje liczba całkowita n_1 taka, że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geq n_1$, zaś m jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą".

Znajdujemy tu najpierw pojęcie *nieskończenie małej*, które według planu arytmetyzacji miało być całkowicie wyeliminowane z podstaw analizy[10]. Szczęśliwie warunek następujący po zwrocie „innymi słowy" jest już poprawną definicją, którą tak zapiszemy z użyciem symboli:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n, m)(n_1 \leq n \rightarrow |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon). \tag{C1}$$

Jeden niuans techniczny różni definicję Cantora od współczesnej. Obecnie przez ciąg Cauchy'ego liczb wymiernych rozumiemy funkcję $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ spełniającą warunek C1. Funkcja zaś to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego, $a \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, spełniający warunek jednoznaczności: jeżeli $a_n = q,\ a_n = p$, to $q = p$. Podczas gdy u Cantora ciąg jest zadany „przez jakieś prawo", to współcześnie jest to „dowolny podzbiór" iloczynu kartezjańskiego. To jedna ze zmian, jakim uległa matematyka pod wpływem teorii mnogości – teorii, której początki sięgają omawianej rozprawy.

Istotnie różna w porównaniu z dzisiejszą matematyką jest natomiast przyjęta nomenklatura: o ciągu spełniającym warunek C1 Cantor pisze, że „posiada granicę b". W następnym zdaniu wyjaśnia, że znaczy to jedynie tyle, iż ciągowi przypisano znak (*Zeichen*) b, przy czym „różnym ciągom" przypisane są różne znaki:

„Słowa te [tj. że ciąg posiada granicę b – P.B.] nie mają więc na razie żadnego innego sensu jak ten, który jest wyrażeniem owej własności ciągu, a z warunku, że łączymy z ciągiem (1) szczególny znak b wynika, że dla różnych tego rodzaju ciągów tworzyć też należy różne znaki b, b', b''".

Po wprowadzeniu działań Cantor napisze, że „określenie «granica ciągu (1)» na liczbę b znajduje ubocznie pewne uzasadnienie". Wrócimy do tego wątku niżej w punkcie 2.4.

2.2. W zbiorze ciągów Cauchy'ego definiuje Cantor równość oraz „różność". I tak relacje $(a_n) = (a'_n)$, $(a_n) > (a'_n)$, $(a_n) < (a'_n)$ zachodzą, gdy

„1. $a_n - a'_n$ staje się nieskończenie mała wraz ze wzrastającą n, lub 2. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε, lub 3. $a_n - a'_n$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$".

Warunki te zapiszemy symbolicznie jak następuje:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow |a_n - a'_n| < \varepsilon)^{11}, \tag{C2}$$

[10] W późniejszym okresie Cantor nawet próbował udowodnić, że nieskończenie małe nie istnieją. Jednakże do końca swojej kariery nie rozpoznał on aksjomatu Archimedesa, a nieskończenie małe rozumiane jako obiekty w ciele uporządkowanym należy definiować przez odniesienie do tego aksjomatu.

[11] Cantor co prawda nie znał relacji równoważności i klas abstrakcji, ale dokładnie rozumiał

$$(\exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \to a_n - a_n^{'} > \varepsilon), \tag{C3}$$

$$(\exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \to a_n - a_n^{'} < -\varepsilon). \tag{C4}$$

Istotnie, przyjmując, że liczby wymierne są ciałem uporządkowanym można pokazać, że zachodzi jeden z warunków C2, C3, C4, a ponadto, warunki te – jak pisze Cantor – „nawzajem się wykluczają".

Odtwarzając w strukturze ciągów liczby wymierne Cantor przyjmuje, że ciąg $(a_n - a)$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia dokładnie jeden z warunków C2, C3, C4:

„Podobnie okazuje się, że ciąg (1), który ma granicę b, pozostaje z liczbą wymierną a tylko w jednej z następujących 3 zależności. 1. $a_n - a$ jest nieskończenie małe wraz ze wzrastającą n, lub 2. pozostaje, począwszy od pewnej n, stale większa od dodatniej (wymiernej) wielkości ε, lub 3. $a_n - a$ pozostaje, począwszy od pewnej n, stale mniejsza od ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$".

Można by więc przyjąć, że liczba a jest utożsamiana z ciągiem stałym $(a, a, ...)$. Cantor nie wykonał jednak tego prostego, wydawałoby się, kroku (zob. niżej pkt. 2.4.).

2.3. Definiując ciągi Cauchy'ego Cantor zastrzegał, że zwrot „ciąg (1) ma określoną granicę b" jest jedynie konwencją językową. Po ustaleniach na temat liczb wymiernych dochodzi do tezy, że b jest granicą ciągu (a_n) w ścisłym sensie:

„Z tych oraz zaraz następujących definicji otrzymuje się jako *wniosek*, że gdy b jest granicą ciągu (1), a następnie $b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, to określenie «granica ciągu (1)» na b znajduje *ubocznie* pewne uzasadnienie".

Warunek „z [...] zaraz następujących definicji" odnosi się do działań na ciągach. Odpowiednio definiowane jest więc dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie. I tak sumą ciągów (a_n), (a'_n) jest ciąg (a''_n), gdy

$$\lim(a_n + a'_n - a''_n) = 0,$$

co znaczy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \to |a_n + a'_n - a''_n| < \varepsilon). \tag{C5}$$

Podsumowaniem tego wątku jest zdanie:

„Ogół wielkości liczbowych (*Zahlengrossen*) b będę oznaczał przez B".

Wcześniej, aż do tego miejsca rozprawy, b, b', b'' były jedynie znakami, w tym zdaniu po raz pierwszy nazwane są liczbami.

2.4. Zestawmy teraz oryginalne rozstrzygnięcia Cantora z ich współczesną wersją. W strukturze ilorazowej jest tak, że $(a_n) \equiv (a'_n)$, gdy ciąg $(a_n - a'_n)$ jest zbieżny do zera, zaś równość zachodzi między klasami abstrakcji, $[(a_n)] = [(a'_n)]$. Dalej, z ciągiem (a_n) „łączymy" nie „znak", ale zbiór $[(a_n)]$. Tym sposobem aspekt ontologiczny konstrukcji jest jasny: liczby rzeczywiste są zbiorami (klasami abstrakcji) nie znakami.

związki zachodzące między ciągi (a_n) i (a'_n). Dalej w rozprawie napisze: „przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b, b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą [czyli ciągami (a_n) i (a'_n) – P.B.]. Współcześnie relację tę zapisujemy jako $(a_n) \equiv (a'_n)$.

Fakt, że Cantor nie odróżnia ciągu stałego $(a, a, ...)$ od liczby wymiernej a utrudnia interpretację tezy „b jest granicą ciągu (1)". W uzasadnieniu czytamy co prawda, że „$b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała", ale w myśl wcześniejszych definicji oznacza to, że ciąg $b - a_n$ spełnia warunek C2. Niestety, $b - a_n$ nie jest w ogóle ciągiem liczb wymiernych: wyrażenie $b - a_n$ oznacza literalnie $(a_n) - a_n$.

Wyrażenie $b - a_n$ można owszem zinterpretować w przestrzeni ciągów. Gdy liczby wymierne utożsamimy z ciągami stałymi, wtedy $b - a_n$ będzie oznaczać ciąg, którego kolejnymi wyrazami są ciągi:

$$b - (a_1, a_1, a_1, ...),\ b - (a_2, a_2, a_2, ...), \ldots . \tag{2}$$

W rozprawie przestrzeń ciągów stanowi strukturę $(B, +, -, \cdot, :, <)$. Zdanie „$b - a_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała" zinterpretowane w tej strukturze oznacza, że ciąg $b - a_n$ spełnia warunek C2, z tą różnicą, że w miejsce $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ przyjmiemy $\forall\varepsilon \in B_+$. Po tej modyfikacji warunek C2 zastosowany do ciągu (2) przyjmie postać:

$$(\forall\varepsilon \in B_+)(\exists n_1)(\forall n)(n_1 \leq n \rightarrow |b - (a_n, a_n, a_n ...)| < \varepsilon),$$

to zaś oznacza, że b jest granicą ciągu liczb wymiernych zinterpretowanych w przestrzeni B – granicą w dosłownym, współczesnym rozumieniu tego pojęcia.

Jest to – jak widać – trochę skomplikowane i dopiero konstrukcja ilorazowa rozjaśnia zawiłości spowodowane dwojakim przedstawieniem liczb wymiernych.

Współcześnie, gdy chcemy wyrazić zależność między ciągiem (a_n) a liczbami wymiernymi, które go tworzą, czyli $a_1, a_2, ...$ itd., liczby te przedstawiamy w postaci ciągów stałych, odpowiednio $(a_1, a_1, a_1, ...)$, $(a_2, a_2, a_2, ...)$ itd. Przechodząc do klas abstrakcji otrzymamy zależność między liczbą rzeczywistą $[(a_n)]$ i liczbami wymiernymi $a_1^* = [(a_1, a_1, a_1, ...)]$, $a_2^* = [(a_2, a_2, a_2, ...)]$ itd. Pokazuje się, że w przestrzeni $\mathcal{C}/_{\equiv}$ liczba $[(a_n)]$ jest granicą ciągu $(a_1^*, a_2^*, ...)$, to jest[12]

$$\lim_{n\to\infty} a_n^* = [(a_n)].$$

Cantor – jak już zauważyliśmy – nie znał techniki zbiorów ilorazowych, mógł jednak przedstawiać liczby wymierne w postaci ciągów stałych. Dlaczego nie przyjął takiego rozwiązania? Otóż chciał, aby liczby rzeczywiste reprezentowały punkty linii prostej i najwyraźniej nie umiał pogodzić tego z podwójnym przedstawieniem liczb wymiernych. W rezultacie poprzestał na tym, że w sensie ontologicznym liczby rzeczywiste są reprezentowane przez ciągi liczb wymiernych, a dalej, w sensie topologicznym, są granicami ciągów liczb wymiernych. Uzasadnienie tej zbieżności jest – jak pisze Cantor – *gewisse*, czyli pewne, ścisłe. Trudno jednak się z tym zgodzić, gdyż Cantor nie wskazał przestrzeni, w której zachodzi owa zbieżność. Gwoli sprawiedliwości trzeba jednak przyznać, że i współcześni autorzy mają problemy z klarownym przedstawieniem wszystkich szczegółów konstrukcji Cantora[13].

[12] Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007, s. 115.

[13] Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna...*, op. cit., s. 113–121.

3. Zbiór $\mathbb{R}$ z funkcją $d(r,s) = |r - s|$ jest oczywiście przestrzenią metryczną. Punkt skupienia podzbioru A przestrzeni metrycznej jest definiowany jako granica ciągu: $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, gdzie $p_n \neq p$, $p_n \in A$. Zbiór punktów skupienia, oznaczany zwykle jako A^d, nazywany jest pochodną zbioru. Domknięcie zbioru dane jest wówczas równością $\overline{A} = A \cup A^d$. Konstrukcję Cantora można opisać w tym języku jako $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, a zupełność liczb rzeczywistych oznacza, że $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$[14].

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest definiowana w ciele uporządkowanym, dlatego topologia generowana przez metrykę d jest tym samym, co topologia porządkowa i wyżej przedstawione fakty odpowiadają temu, co Cantor pisze o zbiorze B. Niżej pokażemy, jak w rozprawie jest opisana zupełność liczb rzeczywistych.

3.1. Procedurę rozszerzenia $\mathbb{Q}$ za pomocą ciągów Cauchy'ego opisaną wyżej w punkcie 2. Cantor powtarza w odniesieniu do $\mathbb{R}$: w zbiorze ciągów liczb rzeczywistych spełniających warunek C1 – z tą różnicą, że w miejsce warunku $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ należy przyjąć $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ – definiowana jest równość, porządek oraz działania. Czysto formalnie, konstruowana jest więc kolejna struktura oznaczana w rozprawie jako C. Nim zacytujemy odpowiedni fragment, przypomnijmy, że liczby wymierne oznacza Cantor literą A, liczby rzeczywiste – literą B.

„Dziedzina B wyprowadzona była z dziedziny A; teraz w analogiczny sposób wytwarza ona, wspólnie z dziedziną A, nową dziedzinę C. Jeśli dany jest mianowicie nieskończony ciąg:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

wielkości liczbowych z dziedzin A oraz B, które nie należą wszystkie do dziedziny A oraz jeżeli ciąg ten ma tę własność, że $b_{n+m} - b_n$ wraz ze wzrastającą n staje się nieskończenie mała, jakakolwiek jest m [...], to mówię o takim ciągu, iż ma on określoną granicę c. Wielkości liczbowe c konstytuują dziedzinę C. Definicje równości, większości oraz mniejszości, jak też operacje elementarne zarówno między wielkościami c, jak również między nimi oraz wielkościami z B oraz A podaje się w analogiczny sposób jak poprzednio".

3.2. Własność opisana w kolejnym zdaniu jest kluczowa dla całej konstrukcji liczb rzeczywistych:

„Podczas gdy dziedziny B oraz A mają się tak do siebie, że choć każde a przyporządkowane jest pewnemu b, ale nie każde b przyporządkowane może być jakiemuś a, to okazuje się, że zarówno każde b może zostać przyporządkowane pewnemu c, jak i każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b".

Zdanie „każde a przyporządkowane jest pewnemu b" oznacza, że każdą liczbę wymierną można przedstawić jako pewien ciąg liczb wymiernych spełniających warunek C1. Zdanie „nie każde b przyporządkowane może być jakiemuś a" oznacza, że przestrzeń liczb wymiernych nie jest zupełna w sensie Cauchy'ego. Zdanie „każde c może zostać przyporządkowane pewnemu b" oznacza, że przestrzeń liczb rzeczywistych jest zupełna w sensie Cauchy'ego.

Cantor nie dowodzi żadnej z tych własności i – o ile nam wiadomo – nigdy później nie wracał do tej kwestii. Współczesne dowody zupełności $\mathbb{R}$ wykorzystują

[14] Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, op. cit., rozdz. XI.

metodę przekątniową, zaprezentowaną przez Cantora przy okazji innego twierdzenia[15].

3.3. Chociaż stosowanie ciągów Cauchy'ego do zbioru B nie stwarza już nowych punktów, to Cantor skrupulatnie odróżnia zbiory B i C oraz kolejne zbiory tworzone tą metodą. Bierze się to stąd, że można wskazać takie podzbiory, których kolejne pochodne są różne. Dla konstrukcji liczb rzeczywistych kolejne pochodne zbioru liczb wymiernych nie są istotne, ale naczelnym zadaniem pierwszych paragrafów rozprawy jest przedstawienie idei pochodnej dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych.

„Chociaż [...] dziedziny B oraz C poniekąd nawzajem się pokrywają, jest istotne w przedstawionej tu teorii [...], aby trzymać się pojęciowego rozróżnienia pomiędzy obydwiema dziedzinami B oraz C, przy czym nawet przyrównanie dwóch wielkości liczbowych b, b' z B nie pociąga za sobą ich identyczności, lecz wyraża tylko pewną określoną relację, zachodzącą pomiędzy ciągami, do których one się odnoszą. Z dziedziny C wyprowadza się, analogicznie jak poprzednio, dziedzinę D, z tej dziedzinę E, itd.; poprzez λ takich przejść (gdzie przejście od A do B uważam za pierwsze) dochodzi się do dziedziny wielkości liczbowych L".

Dalej Cantor pokazuje, jak elementy zbioru L są wyrażane przez liczby wymierne. Przyjmując dla uproszczenia w miejsce L zbiór C, otrzymamy następującą parafrazę obrazującą ideał arytmetyzacji, czyli reprezentowania nowych obiektów przez liczby wymierne:

Równanie $F(c, c', \ldots, c^{(\rho)}) = 0$ dane poprzez skończoną liczbę operacji elementarnych na liczbach $c, c', \ldots, c^{(\rho)}$ jawi się w nakreślonej tu teorii dokładnie, jako wyrażenie dla określonej zależności pomiędzy $\rho + 1$ dwukrotnie nieskończonych ciągów liczb wymiernych; są to ciągi, które wychodzą od ciągów prosto nieskończonych, z którymi najpierw wiążą się wielkości $c, c', \ldots, c^{(\rho)}$, a gdy zastąpi się w nich ich elementy poprzez stosowne ciągi, to powstałe, w ogólności dwukrotnie nieskończone ciągi są traktowane podobnie, aż widzi się przed sobą tylko liczby wymierne.

Innymi słowy, liczba c jest reprezentowana przez ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie każda z liczb b_n jest reprezentowana przez ciąg liczb wymiernych $(a_j^n)_{j=1}^{\infty}$, tak, że w rezultacie c jest reprezentowana przez dwuwymiarową, nieskończoną tablicę liczb wymiernych $(a_j^n)_{n,j=1}^{\infty}$.

4. W § 2 ustalany jest związek między *linią prostą* a liczbami rzeczywistymi. O ile jednak wiemy, co Cantor rozumie przez liczby rzeczywiste, to definicji linii prostej możemy się co najwyżej domyślać. Czytamy:

„Punkty linii prostej są pojęciowo określone przez to, że podaje się, w leżącej u podstaw jednostce miary, ich odcięte, ich odległości od ustalonego punktu o linii prostej, ze znakiem + lub −, w zależności od tego, czy rozważany punkt leży we (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej części prostej.

Jeśli ta odległość jest w stosunku wymiernym do jednostki miary, to będzie wyrażona przez wielkość liczbową z dziedziny A; w innych przypadkach, **gdy punkt jest na przykład *znany* na mocy jakiejś konstrukcji, zawsze możliwe jest**

[15]Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna ...*., op. cit. s. 114–117.

podanie ciągu:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

który ma własność wyrażoną w § 1 oraz pozostaje w takim związku do rozważanej odległości, że punkty linii prostej, które otrzymują odległości $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ wraz ze wzrastającą n zbliżają się nieskończenie do owego określonego punktu. Wyrażamy to w ten sposób, że mówimy: *Odległość rozważanego punktu od punktu o równa jest b, gdzie b* jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1)" (podkreślenie – P.B.).

W tym fragmencie znajdujemy najpierw wyróżnienie na prostej punktów, które odpowiadają liczbom wymiernym (punktów wymiernych). Ten zabieg jest znany co najmniej od czasu *Geometrii* Kartezjusza i jest przeprowadzany na podstawie konstrukcji z twierdzenia VI.9 *Elementów*. Następnie Cantor przyjmuje – i to już jest zagadkowe założenie – że gdy punkt prostej jest dany „na mocy jakiejś konstrukcji", to może być aproksymowany ciągiem punktów wymiernych. Stąd zaś ma wynikać, że odpowiada mu liczba rzeczywista.

Podsumowując ten wątek wywodu Cantora otrzymujemy: dowolnemu punktowi na prostej odpowiada liczba rzeczywista (wymierna lub niewymierna).

Dalej czytamy:

„Aby jednak uczynić pełnym przedstawiony w tym § związek dziedzin wielkości liczbowych zdefiniowanych w § 1 z geometrią linii prostej, należy tylko dodać *aksjomat*, który polega po prostu na tym, że także na odwrót, każdej wielkości liczbowej odpowiada ustalony punkt prostej, którego współrzędna jest równa owej wielkości liczbowej, i to równa w tym sensie, jaki został objaśniony w niniejszym §. Nazywam to twierdzenie *aksjomatem*, ponieważ w jego naturze leży, iż nie jest ono w ogólności dowodliwe".

4.1. W związku z pierwsza tezą (każdemu punktowi odpowiada liczb rzeczywista), zauważmy, że dowolny punkt prostej można aproksymować punktami wymiernymi, gdy prosta jest archimedesowa. Wiadomo jednak, że także prosta niearchimedesowa może być modelem geometrii rozwijanej w księgach I-IV *Elementów*[16]. Trudno zatem uznać, że Cantor ma jasno sprecyzowane pojęcie linii prostej.

Drugą tezę (każdej liczbie rzeczywistej odpowiada punkt na prostej) Cantor przyjmuje jako aksjomat, co w szczególności znaczy, że pierwszą uznaje za twierdzenie.

Joseph Dauben, autor najpopularniejszej biografii naukowej Cantora, tak komentuje obie tezy:

„Cantor next turned to the task of identifying numbers with points of geometric continuum. For the rational numbers this was not a difficult problem. He knew that given a point on the line, if it had a rational relation from the origin o to the unit abscissa, then it could be expressed by an element from the domain A. Otherwise, it could be approached be a sequence of rational points $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, each of which corresponded to an element in A. Furthermore, Cantor could take a_n as a fundamental sequence which approached the given point arbitrarily closely. [...] Cantor was unable to show, of course, the converse, that for every element of the

[16] Zob. D. Hilbert. *Grundalgen der Geometrie*, op. cit., §12.

domain B there correspond a unique point of the real line. Thus he had to invoke the well-known axiom [...]"[17].

Dauben, podobnie jak Cantor, jest przekonany, że bez żadnych dodatkowych założeń o linii prostej można pokazać, że każdy punkt jest albo wymierny, albo może być aproksymowany ciągiem liczb wymiernych. W związku z drugą tezą Dauben pisze: „Cantor was unable to show, of course, the converse". Nie wiadomo dlaczego dla Daubena jest oczywiste, że Cantor nie mógł udowodnić tezy, którą nazwał aksjomatem. We współczesnej geometrii jest owszem dowodzone twierdzenie o bijekcji między linią prostą a liczbami rzeczywistymi[18]. Zasadnicza różnica między tym twierdzeniem a tezami Cantora polega na tym, że współczesna geometria dysponuje aksjomatyką z której wynika precyzyjna charakterystyka linii prostej.

* * *

Przedkładane tłumaczenie *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego w ramach grantu „Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway", NN 101 287639. Jest to pierwsze tłumaczenie tego artykułu na język polski. Chociaż tekst Cantora ma kapitalne znaczenie filozoficzne, to nie znalazł się w najważniejszym i najobszerniejszym wyborze tekstów z zakresu filozofii matematyki wydanym pod redakcją Williama Ewalda *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*[19].

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail pb@up.krakow.pl

[17] J. Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, op. cit. s. 40.

[18] Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, op. cit. rozdz. *O ciągłości linii prostej.*

[19] Zob. W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, tomy I-II, Clarendon Press, Oxford 1996.