FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Jerzy Pogonowski

Kontekst Przekazu w Matematyce*

Abstract. We introduce the concept of the *context of transmission*. It covers the ways in which mathematical knowledge and mathematical abilities are transmitted in education and popularization of mathematics. We stress the role of *intuitive explanations* in these processes. Several examples of such explanations are presented, related to: linguistic explanations, perception, empirical models, and internal explanations inside mathematics itself.

1. Uwagi wstępne

W ogólnej metodologii nauk od dawna funkcjonuje odróżnienie: *kontekstu odkrycia* oraz *kontekstu uzasadnienia*. W przypadku matematyki możemy je rozumieć następująco: *Kontekst odkrycia*. Dochodzenie do nowych wyników matematycznych oczywiście nie daje się przedstawić w postaci procedury algorytmicznej, bazującej na jakimś efektywnym przepisie. To, co można badać, są (gorzej lub lepiej rozpoznawalne) uwarunkowania twórczości matematycznej. Składają się na nie m.in.: bieżący *stan wiedzy* w danej dyscyplinie (określający m.in. także *niewiedzę*, problemy oczekujące rozwiązań), *motywacje* z innych nauk (przede wszystkim nauk fizycznych) bazujące na przekonaniu, że matematyka daje się w nich skutecznie stosować, trudne do obiektywnego scharakteryzowania czynniki natury *estetycznej* (profesjonalni matematycy chętnie o tym wspominają) oraz – jeszcze trudniejsze w opisie – indywidualne *zdolności* poszczególnych matematyków (nie istnieje przecież formuła ustalająca co robić, aby mieć talent). Badać można również *postępowanie* profesjonalistów w dochodzeniu do nowych twierdzeń i teorii, o ile oczywiście jest się w posiadaniu raportów na ten temat. Rezultaty pracy matematyka, w postaci publikacji, są podobne do dzieł sztuki: widzimy efekt końcowy, natomiast droga do jego uzyskania pozostaje ukryta. W trakcie pokonywania tej

*The context of sharing mathematical knowledge, skills and abilities

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D30, 97B60

Key words and phrases: kontekst przekazu, objaśnienie intuicyjne, dydaktyka matematyki

Tekst przygotowany w ramach projektu badawczego NCN 2015/17/B/HS1/02232: *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne.*

drogi, matematyk może odwoływać się np. do wskazówek *indukcyjnych* (sugestii dla postawienia hipotezy), rozumowań przez *analogię* (na podstawie zauważonych podobieństw strukturalnych), skłonności do *uogólniania* (typowej dla działalności matematyków i często prowadzącej do lepszego rozumienia zagadnień), poszukiwania *kontrprzykładów* (pozwalających określić zasięg stosowalności twierdzenia), itd. Często podkreśla się, że niezbywalnym czynnikiem w kontekście odkrycia jest *intuicja matematyczna*, o której będziemy jeszcze mieli okazję powiedzieć parę słów poniżej.

Kontekst uzasadnienia. Obejmuje to wszystko, co ma gwarantować poprawność wyników matematycznych. Podstawowa jest oczywiście procedura *dedukcji*, czyli wyprowadzania twierdzeń z przyjmowanych założeń z zachowaniem *wynikania logicznego*. W praktyce uzasadnianie twierdzeń matematycznych polega na wyposażeniu ich w *dowody matematyczne*. Powszechnie przyjmowany jest pogląd, że każdy dowód matematyczny może w zasadzie zostać poddany rekonstrukcji (uzupełnieniu) w taki sposób, że jej wynikiem jest *dowód w sensie logicznym*, czyli konstrukcja składniowa złożona z poszczególnych kroków dowodowych powiązanych na mocy przyjmowanych reguł wnioskowania, bazujących na wynikaniu logicznym. Osobną sprawą jest uzasadnianie przyjmowanych *aksjomatów*: w tym przypadku ważne są względy natury logicznej (np. niezależność aksjomatów), metodologicznej („moc dedukcyjna" aksjomatów), pragmatycznej (m.in. ich *oczywistość*, ale także walory *estetyczne*). Podobnie, dobór pojęć *pierwotnych* uzależniony jest od ich „mocy definicyjnej", ich naturalności oraz oczywistości. Do kontekstu uzasadniania włączyć należy także refleksję metateoretyczną zawodowych matematyków, dotyczącą tego, które z *metod* (używanych np. w *konstruowaniu* lub *obliczaniu*) należy uważać za poprawne. Często powtarzanym sloganem jest uważanie *dowodzenia jako potwierdzania intuicji matematycznej*, co wskazuje na jedno z połączeń między obydwoma wspomnianymi kontekstami.

Proponujemy dodać do tych dwóch kontekstów trzeci, który nazywamy – umownie – *kontekstem przekazu*. Zauważmy najpierw, że w kontekście odkrycia mowa jest przede wszystkim o *tworzeniu* matematyki, zaś w kontekście uzasadnienia o jej *uprawianiu*, a właściwie o prezentowaniu otrzymanych wyników z zachowaniem obowiązujących standardów. Są jednak inne jeszcze obszary aktywności intelektualnej, w których występuje matematyka. Do najważniejszych z nich należą:

1. *Uczenie się matematyki.*
2. *Nauczanie matematyki.*
3. *Popularyzacja matematyki.*
4. *Zastosowania matematyki w innych naukach oraz w filozofii.*
5. *Wykorzystanie matematyki w sztuce.*

Chcielibyśmy przez *kontekst przekazu* rozumieć pierwsze trzy z wyżej wymienionych typów aktywności. Wyodrębniają się one od pozostałych tym, że dochodzi w nich właśnie do *przekazu*: wiedzy, zaleceń dotyczących umiejętności oraz kompetencji o charakterze matematycznym. W każdym z tych trzech obszarów mówi się i pisze *na temat* samej matematyki, a więc nie chodzi w nich jedynie o przekaz treści matematycznych, lecz w grę wchodzi także nakłonienie odbiorcy do aktywności intelektualnej, która owocować ma lepszym rozumieniem omawianych idei. W tego typu przekazach wykorzystujemy coś więcej niż w takich aktywnościach matematycznych, jak dowodzenie twierdzeń i wykonywanie obliczeń. Sądzimy, że podstawowym składnikiem owej nadwyżki są *objaśnienia intuicyjne* i właśnie im poświęcone są dalsze rozważania. Nie będziemy natomiast zajmować się innymi aspektami działań wykonywanych we wspomnianych trzech obszarach.

Objaśnienia intuicyjne mają oczywiście wspomagać proces *rozumienia*: pojęć, twierdzeń, konstrukcji, idei matematycznych. Podstawową sprawą jest odróżnienie dobrych (trafnych, poprawnych) intuicji od intuicji złudnych, prowadzących do zniekształcenia rozumienia omawianych idei matematycznych. Zarówno w programach nauczania, jak i w samych podręcznikach pisze się często, że do podstawowych zadań dydaktyki matematyki należy wykształcenie *poprawnych* intuicji matematycznych. Powstaje pytanie: czy cel ten jest osiągnięty już wtedy, gdy uczeń wykonuje wszystkie obliczenia i kroki dedukcyjne zgodnie z zalecanym standardem, otrzymując poprawne odpowiedzi? Czy też wymagane jest przy tym coś więcej, co angażuje proces *rozumienia* wykonywanych działań? Wreszcie, jak możemy rozpoznać, że doszło do takiego rozumienia?

Szczególną wagę w naszych rozważaniach przywiązujemy do działań edukacyjnych, dotyczących *terapii matematycznej*: takiego wykładu matematyki na poziomie uniwersyteckim (dla studentów kierunków pozamatematycznych), który pomógłby słuchaczom pozbyć się traumatycznych uprzedzeń wobec matematyki, z różnych powodów wyniesionych z edukacji szkolnej. O celowości tego typu działań przekonuje nas kilka dekad doświadczeń dydaktycznych, podczas których stale mieliśmy styczność z tego typu uprzedzeniami ze strony słuchaczy.

Sądzimy, że stosunkowo mało uwagi poświęca się nauczaniu matematyki dorosłych, w porównaniu z zaangażowaniem teoretyków i praktyków dydaktyki w opracowywanie nowoczesnych i skutecznych metod nauczania dzieci i młodzieży szkolnej. Trzeba rzecz jasna zgodzić się z poglądem, że najlepsze efekty daje nauczanie matematyki w możliwie młodym wieku i że wspomniane zaangażowanie jest całkowicie usprawiedliwione. Uważamy też jednak, że należy wykorzystać ostatnią z możliwości prowadzenia edukacji matematycznej, jaką są studia wyższe (cały czas mówimy tu o kierunkach pozamatematycznych) i dołożyć starań – w dużej części naprawczych – aby także młodzież studencka opuszczała uczelnie bez awersji do matematyki, bez strachu przed nią, prowadzącego często do jej lekceważenia. I aby została matematyką zaciekawiona i doceniała jej rolę w kulturze.

2. Wstępne hipotezy

Wprowadzając nowe pojęcie zadbać musimy o jego charakterystykę, podając jego zakres oraz cechy konstytutywne jego desygnatów, a także czynione na jego temat założenia. Trzeba również zadeklarować, jak rozumiemy inne pojęcia, pełniące rolę pomocniczą, a więc w naszym przypadku takie pojęcia, jak: *rozumienie*, *objaśnienie intuicyjne*, *intuicja matematyczna*, *dobra* (poprawna) intuicja w odróżnieniu od *złej*.

Uważamy, że termin *intuicja matematyczna* stosowany jest w literaturze (filozoficznej i dydaktycznej) dla oznaczenia wielu różnorodnych treści, przez co wcale nie zyskuje on na klarowności. Chcielibyśmy odróżniać rodzaje (poziomy) tego typu intuicji, dla przykładu:

1. *Intuicje przededukacyjne.* Związane są z naszym uposażeniem poznawczym oraz sferą doświadczenia potocznego. Sądzimy, że zaliczyć do nich można np. *subitację* oraz intuicyjne przekonania o statusie geometrycznym lub topologicznym, np. odróżnianie *wnętrza* od *zewnętrza.*

2. *Intuicje nabywane w procesie edukacji.* Te intuicje wpajane nam są w trakcie nauczania matematyki w szkole i na uczelni. Dla przykładu, szeregowanie obiektów oraz ustalanie stabilności liczebności kolekcji przedmiotów prowadzi do podstawowych intuicji związanych z *liczeniem.*

3. *Intuicje profesjonalnych matematyków.* Do tej grupy zaliczamy przeczucia, przekonania, wyobrażenia, itp. przekształcane w sposób nieformalny przez matematyków, które leżą u podstaw ich twórczości. Czym są te intuicje wyjaśnić mogą chyba jedynie sami zawodowi matematycy. Niezwykle trudno jest bowiem dokonywać takich interpretacji tekstów źródłowych, które pozwoliłyby w sposób jednoznaczny wyjawić czynniki intelektualne sterujące procesem dochodzenia do nowych idei matematycznych.

Osobną sprawą jest to, na ile intuicje z wymienionych wyżej poziomów podlegają werbalizacji, czyli wyrażeniu żywionych przekonań w sposób artykułowany. Intuicje mogą być wyobrażeniami lub przekonaniami. Mogą być motywowane uprzednimi doświadczeniami podmiotu, ale mogą też bazować na jego zwerbalizowanej wiedzy. Wśród intuicji każdego z wymienionych poziomów dokonywać można dalszych rozróżnień. Dla intuicji pierwszego poziomu dystynkcji takich dostarczają nauki kognitywne. Dydaktyka matematyki poświęca uwagę przeróżnym intuicjom drugiego poziomu. Do odróżniania intuicji trzeciego poziomu wykorzystać można, jak sądzimy, np. *style myślenia* w matematyce, przez co rozumiemy m.in. *styl algebraiczny*, *styl geometryczny.* Niektórzy matematycy mistrzowsko opanowali *kombinatoryczny* sposób myślenia (np. Paul Erdős), inni posługują się kompetentnie wyobrażeniami *przestrzennymi* (np. William Thurston), itp.

Nasze dalsze uwagi będą dotyczyły intuicji drugiego z wymienionych poziomów. Interesuje nas bowiem w niniejszym tekście to, jak można intuicje tego typu kształtować, jak kultywować *dobre* (poprawne) intuicje i jak wystrzegać się *złych* (złudnych) intuicji.

Przyjmujemy, że *znaczenie* pojęć matematycznych jest określone wyłącznie w odnośnej teorii, w której występują te pojęcia. W szczególności, znaczenie pojęć *pierwotnych* danej teorii wyznaczone jest jej *aksjomatami*, a znaczenie pojęć *definiowanych* wywieść można z ich definicji. To, w jaki sposób używamy pojęć w rozwijaniu danej teorii jest zdeterminowane tak określonymi ich znaczeniami. Zdajemy sobie sprawę, że to podejście może być krytykowane, np. poprzez odwołanie się do oczywistego faktu uprawiania poszczególnych dyscyplin matematycznych w ich stadium przedaksjomatycznym, przez wiele stuleci. Sądzimy, że w takich przypadkach znaczenia używanych pojęć określane były przez *sposoby ich używania*.

W kontekście przekazu znaczenia pojęć (wyznaczone przez teorię) opatrywane są *objaśnieniami intuicyjnymi*. Mówiąc o *intuicyjnym znaczeniu* np. pojęcia całki, liczby zespolonej, liczb π oraz e, itd. można, jak sądzimy, odwoływać się do dwóch różnych spraw:

1. Intuicji, które towarzyszyły matematykom przy wprowadzaniu rozważanego pojęcia. W tym przypadku odwołujemy się zatem do *kontekstu odkrycia*.
2. Intuicji, które przywołujemy dla uzyskania rozumienia omawianego (w podręczniku lub na wykładzie) pojęcia. W tym przypadku nasze komentarze stanowią dodatek do znaczenia pojęcia, ustalonego w teorii. Te objaśnienia należą zatem do *kontekstu przekazu*.

W skład kontekstu przekazu wchodzą działania (proces dydaktyczny, działalność publicystyczna), dzięki którym osiągać możemy rozumienie pojęć matematycznych, a także wytwory takich działań, czyli powstające w ich wyniku teksty, nagrania odczytów, filmy. Od akademickiego wykładu matematyki różnić się one mogą takim oddziaływaniem na wyobraźnię czytelników, słuchaczy, widzów, które coś dodaje do kanonicznych treści wykładu. Tym dodatkiem są właśnie objaśnienia intuicyjne, pozwalające na tworzenie reprezentacji mentalnych omawianych pojęć.

Terminu *objaśnienie* używamy tu celowo i chcemy odróżniać objaśnienia od *wyjaśniania w matematyce*. Ten drugi termin rozumiemy zaś tak, jak czyni się to w ogólnej metodologii nauk. Wyjaśniamy jakiś fakt przez wskazanie stosownego *prawa*, którego fakt ten jest konsekwencją. Na temat specyfiki wyjaśniania w matematyce pisze się np. w: Lange (2014), Mancosu (2015), Steiner (1978).

Objaśnienia intuicyjne proponujemy natomiast rozumieć jako argumentacje innego rodzaju. Chcemy je mianowicie traktować jako pomoce służące do oswajania znaczeń pojęć matematycznych. Mogą to być pomoce wizualne (rysunki, diagramy, gesty, filmy), eksplikacje lingwistyczne (z wykorzystaniem np. metafor), odwołania do modeli fizycznych (np. mechanicznych). Akceptujemy pogląd wyrażony przez Annę Sierpińską, że obiekty matematyczne nie są po prostu *widziane*, ale są *widziane jako coś* (Sierpińska, 1994). Każdy rozdział książki Sierpińskiej zawiera motto z prac Poincarégo; na pierwszej stronie znajdujemy następujący fragment z jego *Science and Method* (Sierpińska, 1994, s. 1):

> We are in a class of the fourth grade. The teacher is dictating: ‘A circle is the position of the points in a plane which are at the same distance from an interior point called the centre.’ The good pupil writes this phrase in his copy-book and the bad pupil draws faces, but neither of them understands. Then the teacher takes the chalk and draws a circle on the board. ‘Ah’, think the pupils, ‘why didn’t he say at once, a circle is a round, and we should have understood’.

To właśnie jest typowy przykład objaśnienia intuicyjnego. Wiąże ono podaną na początku definicję z przedstawieniem (wyobrażeniem, reprezentacją mentalną) obiektu, który spełnia warunek tej definicji. Może warto dodać, że w podanym przedstawieniu odwołujemy się do ustalonej metryki, wyznaczonej przez wartość bezwzględną. Jak wiadomo, przedstawienie okręgu w innej metryce (np. taksówkowej lub Czebyszewa) wygląda całkiem inaczej.

W kontekście przekazu odnosimy się zatem do pewnych kompleksów, złożonych z pojęć wraz z metodami ich wprowadzenia i towarzyszącymi tym metodom komentarzami. Będziemy takie kompleksy nazywali *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie*. Konkretne przykłady staramy się podać w następnej części tekstu.

Jeśli chodzi o założenia filozoficzne dotyczące kontekstu przekazu, to nie widzimy w tym miejscu potrzeby dokładniejszej ich analizy. Poprzestaniemy na deklaracji, że w naszej opinii matematyka w jej kontekście przekazu powinna jawić się jako:

1. *Nauka o wzorcach.* Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.

2. *Nauka o rozwiązywaniu problemów.* Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim, jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, przeprowadzanie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy z dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk. Pozwalamy sobie sądzić, że wielu matematyków zgodzi się z opinią, że matematyka może być także postrzegana jako *sztuka* rozwiązywania problemów (oraz tworzenia pojęć), przy czym ten artystyczny aspekt matematyki poddany jest oczywiście rygorom, narzucanym przez naturę rozumowań matematycznych.

3. Przykłady

Niniejsza notatka jest pierwszym tekstem dotyczącym kontekstu przekazu, który próbujemy opublikować. Nie podejmujemy jakiejkolwiek próby syntezy, dokonamy jedynie przeglądu przykładów typów działań angażujących objaśnienia intuicyjne, które – naszym zdaniem – odgrywają istotną rolę w przekazie wiedzy matematycznej oraz wykształcaniu umiejętności matematycznych.

3.1. Objaśnienia werbalne

Uprawiamy matematykę w jej języku, który jest językiem *sztucznym* (specjalnie skonstruowanym) z wyraźnie i precyzyjnie określonymi zasadami składni. Dla uczących się matematyki jest to jednak początkowo język *obcy*. W dodatku, jest to *dziwny* język obcy, bo wykorzystuje wiele wyrażeń ich języka ojczystego, które rygorystycznie każe się rozumieć w zalecany sposób, często ujmując coś ze znaczenia potocznego tych wyrażeń, do którego uczący się przywykli lub proponując całkowicie nowe ich znaczenie.

Samo nadanie szaty słownej matematycznym wyrażeniom symbolicznym nie może jeszcze pretendować do miana intuicyjnego objaśnienia, choć może dla niektórych być pomocne. Czasem sformułowania symboliczne wymagają w „przetłumaczeniu" ich na język etniczny jawnego wyrażenia pewnych domyślnych treści. Gdy np. chcemy wyrazić słownie znaczenie wyrażenia:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y (d(x,y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon),$$

to zapewne uczynimy to w sposób następujący:

> Dla dowolnie *małej* dodatniej liczby ε istnieje dodatnia liczba δ taka, że jeśli odległość d między argumentami funkcji f jest mniejsza od δ, to odległość między wartościami funkcji f dla tych argumentów jest mniejsza od ε. Parafrazując, jeśli argumenty funkcji są wystarczająco bliskie, to wartości funkcji są dowolnie bliskie. Ponadto, „wystarczająco bliskie" jest tu rozumiane tak samo dla dowolnej pary argumentów.

Widoczne są tu pewne „naddatki" werbalne, które wspomagać mają rozumienie wyrażenia formalnego.

Studenci kierunków pozamatematycznych zwykle domagają się, aby mówiąc o zbiorach, relacjach, funkcjach itp. podawać przykłady „z życia", czyli odnoszące się do doświadczenia potocznego oraz „zwykłego" rozumienia wyrażeń. Ze względu na m.in. nieostrość większości wyrażeń językowych oraz zjawisko intensjonalności bywa to trudne. W matematycznej teorii mnogości mówimy jedynie o zbiorach. To, czy istnieją jakiekolwiek indywidua, jakiekolwiek obiekty fizyczne, jest dla tej teorii nieistotne. To, czy wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami jest problemem filozofii matematyki i nie możemy tego rozstrzygać na usługowych zajęciach z matematyki. Nie chcemy jednak pozbawiać się możliwości *stosowania* formalizmu teorii mnogości w odniesieniu do świata fizycznego, doświadczenia potocznego, konstrukcji pojęciowych w ogólności. Tak więc, zgadzamy się na to, aby mówić o zbiorach, których elementami są obiekty fizyczne. Wtedy taki zbiór jest już jednak obiektem abstrakcyjnym. Jak ujął to jeden z najwybitniejszych polskich filozofów, zbiór lwów nie jest lwem – zbiory nie ryczą. Należy być świadomym, że w przypadku zbiorów, których elementami są obiekty fizyczne mogą wystąpić trudności z precyzyjnym ustaleniem inwentarza tych elementów. Co mamy na myśli, mówiąc o *zbiorze wszystkich Polaków*? Wszystkich obywateli Rzeczpospolitej Polskiej? Wszystkich dzisiaj żyjących takich obywateli? Wszystkie osoby pochodzenia polskiego rozproszone na całej planecie? Wszystkich kiedykolwiek żyjących Polaków? Czy wreszcie, przekraczając granice ponurej groteski, wszystkich *Prawdziwych Polaków*? Tego typu trudności nie są jednak trudnościami samej teorii mnogości, lecz uwarunkowane są możliwościami aplikacyjnymi (oraz ich ograniczeniami) teorii formalnych, o czym więcej słuchacze dowiadują się na zajęciach z filozofii.

Do wyobraźni słuchaczy zwykle silnie przemawiają różnego rodzaju metafory, przywoływane w celach dydaktycznych. Chodzi przy tym nie o metafory rozumiane jako środki stylistyczne, ale o tzw. metafory poznawcze. Teoria *metafor poznawczych* (Lakoff, Núñez, 2000) głosi, że treści bardziej abstrakcyjne objaśniane są przez treści bardziej konkretne, w ostatecznym rozrachunku sprowadzane do wyobrażeń doświadczenia potocznego. Była z sukcesem zastosowana w lingwistyce (Lakoff, Johnson, 1980). Lakoff i Núñez próbują ją także stosować w odniesieniu do matematyki, charakteryzując w następujących słowach odnośną metodę tworzenia pojęć (Lakoff, Núñez, 2000, s. 6):

> Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. [...] It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic).

W myśl tej koncepcji np. zbiory rozumieć możemy lepiej przez odwołanie się do *pojemników*, rozumienie liczb bazować miałoby na odwoływaniu się do grupowania obiektów, przebywania drogi, wielokrotnego odkładania jednostki miary, itp. Nie wypowiadamy się w tym miejscu na temat trafności zastosowania koncepcji metafor poznawczych w matematyce – uczyniliśmy to już wcześniej (Pogonowski, 2011, 2012, 2013), odnosząc się z dużą rezerwą do możliwości sprowadzenia genezy oraz funkcjonowania matematyki jedynie do procesu tworzenia metafor poznawczych. W cytowanych pracach przywołujemy też krytyczne opinie matematyków na temat tej koncepcji.

Odnotujmy jedynie, że doświadczenie dydaktyczne z nauczaniem matematyki studentów kierunków pozamatematycznych ukazuje, że istotnie korzystają oni z rozumienia liczb rzeczywistych jako punktów na prostej – to rozumienie zostało im silnie wpojone w edukacji szkolnej. Staramy się wskazywać, że mamy w tym przypadku do czynienia z *izomorfizmem* między strukturą liczb rzeczywistych a strukturą geometryczną prostej, rozumianej jako uporządkowany w odpowiedni sposób zbiór punktów.

Studenci wspomnianych kierunków studiów wyobrażający sobie liczby rzeczywiste przez odwołania do rozwinięć dziesiętnych (a więc tak, jak w definicji Hoborskiego) zadają czasem pytania poświadczające trudności z rozumieniem pojęć *nieskończoności*, *gęstości* oraz *ciągłości*, np.: *skoro liczba rzeczywista ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, to jak znaleźć następną po niej liczbę rzeczywistą?*

Uważamy, że po części usprawiedliwione w omawianym typie dydaktyki jest korzystanie z metafor poznawczych dotyczących ruchu oraz wyobrażeń geometrycznych w intuicyjnych objaśnieniach pojęć rachunku różniczkowego. Zachować jednak przy tym trzeba stosowną ostrożność, podkreślając metaforyczność objaśnienia. Można się bowiem obawiać, że studenci kierunków pozamatematycznych zachowają w pamięci jedynie owe metafory, nie próbując nawet jakiejkolwiek refleksji teoretycznej nad omawianymi pojęciami.

Trudności z rozumieniem matematycznego pojęcia wyeksplikowanego werbalnie nawet w wyczerpujący sposób mogą wiązać się z kłopotami natury logicznej (np. z rozumieniem kwantyfikacji), które miewają studenci. Dla przykładu: *nie rozumiem, co to znaczy, że relacja jest przeciwzwrotna, ale rozumiem przykład, że nie zachodzi* $2 < 2$.

3.2. Percepcja

Na temat wykorzystywania rysunków w nauczaniu matematyki wypowiadają się bodaj wszyscy dydaktycy matematyki. Nie sądzimy, że możemy dodać cokolwiek odkrywczego na ten temat. Przypomnieć wypada, że – wedle współczesnych standardów – rysunek nie może być traktowany jako dowód, może natomiast pełnić rolę objaśnienia intuicyjnego. Ponadto, rysunki nie mogą być zbyt *sugestywne*, aby nie narzucały sposobu rozumienia przedstawianej przez nie sytuacji. Ładne zastosowania diagramów w objaśnianiu pojęć i twierdzeń analizy zespolonej zawiera praca Needham (1997).

Przypominamy sobie dość zabawny spór, który miał miejsce na naszym seminarium. Otóż prelegent narysował dwa diagramy: na jednym z nich w uniwersum, reprezentowanym prostokątem zaznaczony został, poprzez koło wewnątrz tego prostokąta zbiór A, zaś drugi diagram był przedzielonym na połowy prostokątem i jedna z tych połówek miała być zbiorem A. Prelegent utrzymywał, że mamy tu do czynienia z dwiema różnymi sytuacjami: w pierwszej z nich zbiór A miałby być *wyróżniony* w uniwersum, a w drugiej miałoby mieć miejsce *odróżnienie* zbioru A od jego dopełnienia. Oczywiście z matematycznego punktu widzenia, gdy posługujemy się diagramami Venna, obie te sytuacje są identyczne (bo nie bierzemy przecież pod uwagę np. własności topologicznych rozważanych obszarów). Najwyraźniej prelegent chciał wyrazić swoimi rysunkami jakąś dodatkową informację, której użyte w tym przypadku diagramy Venna nie zawierają. Zapewne chodziło mu o podkreślenie, że w pierwszym przypadku zbiór A znajduje się w centrum uwagi, natomiast w przypadku drugim role pełnione przez A oraz dopełnienie A są takie same. Zauważmy, że gdyby prelegent użył np. diagramów Carrolla, to owych dodatkowych informacji nie mógłby na takim diagramie uwzględnić.

Współczesna dydaktyka matematyki wspomagana jest – często znakomitymi – ogólnie dostępnymi w sieci pomocami audiowizualnymi. Liczne portale matematyczne prezentują filmy dydaktyczne, ilustrujące zarówno stosunkowo proste zagadnienia matematyczne, jak też pomagające zrozumieć nawet bardzo złożone konstrukcje, np.: twierdzenie Smale'a o przenicowaniu sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ lub wiązkę Hopfa. Niewątpliwie jest to jeden z najbardziej obiecujących kierunków rozwoju dydaktyki matematyki.

Podczas wykładów z matematycznych metod rozwiązywania problemów posługiwaliśmy się – oprócz wspomnianych wyżej filmów – także (amatorskimi) nagraniami piosenek o treści matematycznej, których zabawne fabuły mogą pomóc utrwalać rozumienie wzorów i konstrukcji. Jednak zwykle piosenki takie adresowane są do młodszych dzieci, znaleźliśmy stosunkowo mało utworów dotyczących matematyki na poziomie uniwersyteckim.

3.3. Modele fizyczne

Wspomaganie dydaktyki matematyki odwołaniami do modeli fizycznych ma długą i bogatą tradycję. Słynnym przykładem stosowania modeli fizycznych są rozważania Archimedesa dotyczące wykorzystania mechaniki w uzasadnianiu twierdzeń geometrycznych (zob. np. Heath, 2002). Trzeba podkreślić, że Archimedes podając argumentacje odwołujące się do mechaniki w obliczeniach pól i objętości otwarcie i wyraźnie pisał, że te argumentacje należą do *kontekstu odkrycia*, a precyzyjne dowody odnośnych twierdzeń wykorzystują poprawną matematycznie metodę wyczerpywania.

Ciekawe zestawy przykładów zawierają np. prace: Ghrist (2014) oraz Levi (2009). W pierwszej z nich dużo uwagi poświęca się intuicyjnym objaśnieniom pojęć i twierdzeń topologicznych poprzez odwołania do modeli mechanicznych, w szczególności tzw. *linkages*, czyli układy drążków, które połączone są przegubami. Pozwalają one wspomagać rozwijanie wyobraźni geometrycznej. Ghrist przywołuje twierdzenie, głoszące, iż każda gładka rozmaitość zwarta jest dyfeomorficzna z przestrzenią konfiguracyjną pewnego płaskiego układu takich drążków. Odpowiednio dobrane układy drążków służyć mogą zatem do kinematycznej reprezentacji tworów nawet o wymiarach większych od trzech. Na marginesie może warto dodać, że badanie takich układów drążków jest ważne m.in. we współczesnej robotyce.

Druga z wymienionych wyżej pozycji zawiera liczne przykłady argumentacji fizycznych, wspomagających rozumienie twierdzeń matematycznych. Autor ukazuje np. związki twierdzenia Pitagorasa z prawem zachowania energii, powiązania między analizą ruchu koła roweru lub ciśnienia gazu a twierdzeniem Gaussa-Bonneta, odpowiedniość między pewnymi twierdzeniami analizy zespolonej a ruchem cieczy lub przepływem ciepła, itp. Wedle autora, zaletami takich fizycznie zorientowanych objaśnień są: mniej skomplikowane obliczenia, uzyskiwanie wyników dobrze pojęciowo reprezentowanych, mniejsze wymagania wobec uprzedniego poziomu matematycznego słuchaczy. Oczywiście, objaśnienia fizyczne nie zastępują dowodów matematycznych, służą jedynie jako heurystyki wspomagające rozumienie. Autor powołuje się na następującą analogię, z której często korzysta (Levi, 2009, s. 27):

Calculus	**Physical interpretation**
The function $f(x)$	Potential energy $P(x)$
The derivative $f'(x)$	The force $F(x) = -P'(x)$
$f(x)$ minimal $\Rightarrow f'(x) = 0$	$P(x)$ is minimal $\Rightarrow F(x) = 0$ (equilibrium)

Sądzimy, że tego typu odwołania fizyczne wspomagające dydaktykę matematyki mogą silnie oddziaływać na wyobraźnię słuchaczy, a także motywować ich do zadawania dalszych pytań, dotyczących zarówno tego *jak* przebiega dane zjawisko, jak też *dlaczego* przebiega właśnie tak, a nie inaczej. Ukazanie takich związków między rzeczywistością fizyczną a jej opisem matematycznym jest nieodzownym składnikiem wykształcenia. Wiadomo przecież, że wiele osób ma błędne, złudne wyobrażenia związane nawet z doświadczeniem potocznym. Wyobrażenia na temat zjawisk fizycznych mogą drastycznie odbiegać od rzeczywistego ich przebiegu, (por. np. Ben-Zeev, Star, 2001, s. 29):

> It has been found that when people were asked to draw the path of a moving object shot through a curved tube, they believed that the object would move along a curved (instead of a straight) path even in the absence of external forces.

Tego typu wyobrażenia określa się czasem mianem *folk physics.* Należy się ich rzecz jasna wystrzegać przy stosowaniu objaśnień intuicyjnych wspomagających rozumienie pojęć matematycznych.

Jeden z recenzentów niniejszego tekstu odniósł się krytycznie do optymistycznej wiary w skuteczność dydaktyczną modeli fizycznych w nauczaniu matematyki w stylu prezentowanym np. przez Levi (2009). Wedle niego, objaśnienia takie mogą stanowić raczej utrudnienie, ze względu na to, iż uczniowie lub studenci (kierunków pozamatematycznych) fizykę rozumieją w jeszcze mniejszym stopniu niż matematykę. Niezależnie od trafności tej diagnozy, warto może podkreślić, że odwołanie się do modeli fizycznych jest wyrazem przekonania, że takie modele nie mogą generować *złych* intuicji matematycznych.

Modele fizyczne wykorzystywać mogą różnego rodzaju artefakty, których w dziejach matematyki spotykamy bardzo wiele. Obok powszechnie znanych, jak cyrkiel i linijka, mamy też pantografy, elipsografy, spirografy, przyrządy do mierzenia pól, długości oraz miary kątów, itp. Dydaktycy matematyki korzystają również ze specjalnie przygotowanych zestawów pomocy dydaktycznych – (zob. np. Lénárt 1996).

Wykorzystywanie modeli fizycznych we wspomaganiu dydaktyki matematyki opiera się na pewnych założeniach filozoficznych, dotyczących stosowalności matematyki w naukach empirycznych. Zakładamy, że świat fizyczny daje się opisać matematycznie. Mieliśmy też wielokrotnie do czynienia z sytuacją, gdy rozwój danej dyscypliny matematycznej wyprzedzał jej zastosowania w fizyce. Oczywiście w usługowym kursie matematyki raczej nie przewiduje się miejsca na dywagacje filozoficzne, można jednak zachęcać słuchaczy do refleksji nad skutecznością stosowania matematyki w naukach empirycznych. W szczególności, zaciekawienie studentów budzą zwykle wyniki matematyczne ukazujące kolizje między złudnymi wyobrażeniami potocznymi a prawidłowym opisem matematycznym zjawisk, a także różnego rodzaju *supertasks* – (por. np.: Galperin, 2003; Havil, 2007, 2008; Klymchuk, Staples, 2013; Laraudogoitia, 1996; Romero, 2014).

3.4. Objaśnienia wewnętrzne

Tego typu objaśnienia mają nieco inny charakter od uprzednio omówionych, gdyż wykorzystywane objaśnienia odwołują się nie do sfer zewnętrznych wobec matematyki, lecz do innych ustaleń wewnątrz poszczególnych dyscyplin matematycznych. Zwykle są to rozumowania poprzez analogię, odwołujące się do pewnych wspólnych cech strukturalnych, np. dzielenie wielomianów intuicyjnie objaśniamy, odwołując się do dzielenia liczb i wskazując na algorytm Euklidesa, jako wspólną zasadę wykonywania tych operacji.

Objaśnienia wewnętrzne podkreślają zatem spójność matematyki. Fakt wielkiego współcześnie zróżnicowania dyscyplin matematycznych nie przeczy temu, że matematyka jest wewnętrznie spójna. Ową spójność potwierdzają zarówno *wielkie przełomy* w historii matematyki (np. powiązanie algebry z geometrią lub arytmetyzacja analizy), ale także to, że dowody twierdzeń z danej dyscypliny matematycznej mogą odwoływać się do aparatury pojęciowej całkiem innej z takich dyscyplin.

Poniżej ograniczamy się do trzech przykładów tego, co nazywamy objaśnieniami wewnętrznymi. Mamy w nich kolejno do czynienia z: powołaniem się na analogię, przyjęciem intuicyjnego założenia oraz argumentacją o charakterze pragmatycznym. Nie twierdzimy rzecz jasna, że są to przykłady wykorzystywane w usługowej dydaktyce matematyki dla studentów kierunków pozamatematycznych.

3.4.1. Modele teorii mnogości

Dla wykazania niezależności pewnych zdań języka teorii mnogości wykorzystuje się metodę *wymuszania* (ang. *forcing*), polegającą na budowaniu takich modeli tej teorii, w których wybrane zdanie jest fałszywe. Używając tej techniki, wychodzi się od pewnego, stosownie dobranego, przeliczalnego przechodniego modelu $(M, \in)$ dla teorii mnogości (otrzymanego na mocy dolnego twierdzenia Löwenheima-Skolema oraz lematu Mostowskiego o kontrakcji), który następnie rozszerza się, dodając doń dodatkowe zbiory, których własności kontroluje się przez narzucenie stosownych warunków. Dla osób, które nie specjalizują się w teorii mnogości cała procedura wyglądać może na dość skomplikowaną. Można ją jednak przybliżyć szerszemu audytorium (matematyków) poprzez *intuicyjne* odwołania do analogii z rozszerzaniem ciał o elementy przestępne. Model $(M, \in)$ przyrównany jest do ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, a jego rozszerzenie uzyskane metodą wymuszania przyrównywane jest do rozszerzenia ciała $\mathbb{Q}$ o element przestępny. Trafność tej analogii zasadza się w tym, że rozszerzony model teorii mnogości jest charakteryzowany przez warunki odpowiadające tym, które wyrażają fakt przestępności elementu dodawanego do ciała, czyli zbiorowi zdań stwierdzających łącznie, iż ów element przestępny nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach w wyjściowym ciele. Oczywiście to intuicyjne objaśnienie przemawia do tych czytelników, którzy mają już jakieś pojęcie o wykorzystywanych faktach algebraicznych.

3.4.2. Prawdziwość z prawdopodobieństwem 1

Czy sensowne jest mówienie, że jakieś twierdzenie jest prawdziwe z prawdopodobieństwem równym 1? Klasyczna logika przyzwyczaja nas do myślenia o prawdzie i fałszu w sposób dychotomiczny, o *stopniach* prawdziwości możemy mówić – w nieco sztuczny sposób – np. w logikach wielowartościowych.

Davis i Hersh podają dwa ciekawe przykłady sytuacji, w których próbuje się nadawać sens orzeczeniom o prawdziwości jakiegoś twierdzenia z prawdopodobieństwem 1 (Davis, Hersh, 1994). Jeden z nich dotyczy przypuszczenia, że istnieje nieskończenie wiele par bliźniaczych liczb pierwszych, drugi hipotezy Riemanna.

W każdym z tych przykładów przyjmuje się pewne *intuicyjne* założenia. W pierwszym przypadku (Davis, Hersh, 1994, s. 189–190) zakłada się, że pojawienie się pary bliźniaczych liczb pierwszych jest zdarzeniem *losowym*, nieprzewidywalnym. *Przypuszczamy*, że szansa iż $(x, x+2)$ jest parą bliźniaczych liczb pierwszych jest taka, jak szansa uzyskania orła przy dwóch rzutach monetą. Pamiętamy, że szansa sukcesu dla dwóch kolejnych zdarzeń *niezależnych* jest równa iloczynowi szans sukcesów w każdym z nich. Na mocy znanych ustaleń o rozkładzie liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych, szansa iż wybrana losowo liczba x z przedziału od 0 do n będzie liczbą pierwszą równa jest około $\frac{1}{\log n}$. W konsekwencji, szansa, że zarówno x, jak i $x+2$ będą pierwsze jest równa około $\frac{1}{(\log n)^2}$. Tak więc, będzie około $\frac{n}{(\log n)^2}$ par bliźniaczych liczb pierwszych między 0 a n. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(\log n)^2} = \infty$, więc daje to, jak piszą Davis i Hersh, „ilościową wersję przypuszczenia o parach liczb pierwszych". Wywód powyższy nie jest oczywiście *dowodem* rozważanej hipotezy: w istocie, jest pewnym wyrazem *wiary* w jej prawdziwość, odwołującej się do analogii probabilistycznych.

W drugim z omawianych przypadków (Davis, Hersh, 1994, s. 315–321) również czyni się *intuicyjne* założenie, że możemy traktować pewną funkcję jako zmienną losową. Omawialiśmy ten przykład w innym miejscu (Pogonowski, 2011), a więc – aby uniknąć zarzutów o autoplagiat – powiedzmy tutaj jedynie, że chodzi o traktowanie jako zmiennej losowej funkcji Möbiusa, związanej z liczbą czynników rozkładu liczb całkowitych na czynniki pierwsze. W pracy Good, Churchhouse (1968) podaje się argumentację, pozwalającą (przy powyższym intuicyjnym założeniu, sprowadzającym się do tego, że funkcja Möbiusa „wygląda" jak zmienna losowa, bo losowe jest to, czy w rozkładzie liczby całkowitej na czynniki pierwsze jest parzysta czy też nieparzysta liczba czynników) na sformułowanie probabilistycznego równoważnika hipotezy Riemanna, który od tego intuicyjnego założenia zależy. W konsekwencji, ponieważ dla tego równoważnika otrzymujemy prawdopodobieństwo równe 1, więc także hipoteza Riemanna jest „prawdziwa z prawdopodobieństwem równym 1".

3.4.3. Aksjomaty ekstremalne w teorii mnogości

Znakomita większość „normalnych" matematyków (przez co rozumiemy matematyków nie zajmujących się zawodowo modelami teorii mnogości) zdaje się wierzyć w uniwersum „prawdziwych" zbiorów. Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla w języku pierwszego rzędu, o ile jest niesprzeczna, posiadać może różne modele, czyli dopuszczać różne uniwersa wszystkich zbiorów. Kto skłania się do uznawania teorii mnogości za podstawę matematyki, powinien być skłonny do *wiary* w jej niesprzeczność. Wtedy jednak musi zadać sobie pytanie: *który* z modeli teorii mnogości jest jakoś *naturalny*, *standardowy*, itp? Mamy tu do czynienia z nieco inną sytuacją niż w przypadku arytmetyki, gdzie z jej modelem standardowym związane są intuicje matematyczne, potwierdzane wynikami otrzymywanymi właściwie od samych początków systematycznej refleksji teoretycznej. Aksjomatyczna teoria mnogości jest natomiast stosunkowo młodą teorią. Już Thoralf Skolem, który znacząco przyczynił się do jej rozwoju, wyrażał sceptycyzm co do jej roli jako podstawy całości matematyki. Andrzej Mostowski, znakomity polski matematyk pracujący w podstawach matematyki, nie wykluczał (biorąc pod uwagę wyniki Gödla oraz Cohena), że teoria mnogości może w przyszłości podzielić los topologii ogólnej, w tym sensie, że poszczególne modele teorii mnogości traktowane będą podobnie jak poszczególne przestrzenie topologiczne.

Wspomnieć należy o dwóch możliwościach *intuicyjnych wyobrażeń* na temat uniwersum teorii mnogości:

1. *Stanowisko minimalistyczne.* Uniwersum zbiorów miałoby być możliwie jak najbardziej oszczędne. W tym duchu wypowiadał się np. Abraham Fraenkel, formułując swój *aksjomat ograniczenia*, głoszący, iż istnieją tylko te zbiory, których istnienie udowodnić można z aksjomatów teorii. Aksjomatem ograniczenia jest również *aksjomat konstruowalności*, zaproponowany przez Kurta Gödla: w tym ujęciu rozważa się jedynie definiowalne podzbiory dowolnego zbioru X, a nie pełny jego zbiór potęgowy $\wp(X)$.

2. *Stanowisko maksymalistyczne.* Uniwersum zbiorów miałoby być możliwie jak najbardziej pojemne. Ku takiemu poglądowi skłaniał się Kurt Gödel w swoich późniejszych wypowiedziach: powoływał się przy tym na analogie z *aksjomatem zupełności* w systemie geometrii Davida Hilberta. Nieco wcześniej wersję poglądu maksymalistycznego wyraził Ernst Zermelo, postulując przyjęcie założenia o istnieniu pozaskończonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych. Obecnie odrzuca się stanowisko minimalistyczne, natomiast stanowisko maksymalistyczne jest rozwijane w postaci badania *aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych.*

Niezależnie od konsekwencji czysto matematycznych każdego z wymienionych stanowisk, rozważać można argumentację metodologiczną za przyjęciem bądź odrzuceniem każdego z nich. Argumentacje znane z literatury mają po części charakter pragmatyczny. Tak jest np. w monografii (Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973). Oprócz wspomnianego już argumentu opartego na analogii (z aksjomatem zupełności w geometrii), który ma potwierdzać naszą *wiarę*, iż uniwersum zbiorów powinno być możliwie najobszerniejsze, autorzy przywołują takie argumenty jak np. *elegancja matematyczna* oraz *postawa platońska.* Te argumenty skierowane są przeciw aksjomatom ograniczenia: aksjomaty tego typu nie służą do dowodu jakichś mocniejszych twierdzeń, ale raczej eliminują zbiory, które nie pasują do rozważanych wyników. Ponadto, jeśli ogół wszystkich zbiorów wyznaczonych przez przyjęcie aksjomatu ograniczenia miałby być bytem platońskim, to przecież postawa platońska nie wyklucza uznania go za zbiór w jakimś szerszym uniwersum. Zasady odbicia są formalnym wyrazem przekonania, że „tymczasowe” uniwersa są „aproksymacjami” ostatecznego, nieosiągalnego uniwersum zbiorów.

3.4.4. Granice intuicji

To, co nazywamy tutaj wewnętrznymi objaśnieniami intuicyjnymi dobrze sprawdza się w przypadku prostych rozumowań przez analogię, w rodzaju np. *to nowe działanie zachowuje się podobnie jak znane już działanie.* Mamy jednak do czynienia także z sytuacjami, gdy tego typu objaśnień stosować nie można.

Standardowym przykładem jest przejście od skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych do przestrzeni o nieskończonej liczbie wymiarów.

Całkiem nowa matematyka zmusza do porzucania pewnych dotychczasowych intuicji bądź do ich wysubtelnienia, co było wielokrotnie poświadczane w dziejach matematyki. Przykładem może być choćby propozycja Dedekinda definicji zbioru nieskończonego jako równolicznego ze swoim podzbiorem właściwym. Własność uznawana dotąd za paradoksalną uczyniona została podstawą definicji.

Nie można chyba określić na bieżąco, jakie w danym momencie rozwoju matematyki są granice intuicji. Staje się to widoczne dopiero ze znacznej perspektywy czasowej.

4. Odniesienie do ustaleń współczesnych

Nawiązujemy przede wszystkim do propozycji Anny Sierpińskiej (w szczególności do jej monografii *Understanding in Mathematics*, Sierpińska, 1994), ale uwzględniamy też poglądy innych badaczy rozważanej problematyki (Fischbein, 1987; Polya, 2009, 2014; Schoenfeld, 1985; Tall, 2013). Pisząc o rozumieniu w matematyce, Sierpińska powołuje się na propozycje Kazimierza Ajdukiewicza (Ajdukiewicz, 1975), rozszerzając jednak jego koncepcję rozumienia wyrażeń na rozumienie pojęć, idei, dowodów, konstrukcji matematycznych. Autorka posługuje się również terminami *obiekt rozumienia* oraz *podstawa rozumienia*, które łącznie chyba są bliskie temu, co proponowaliśmy wyżej nazywać *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie* (oczywiście jej propozycje są wcześniejsze). Sierpińska często wykorzystuje też zjawisko znane pod nazwą *epistemological obstacle*, opisywane w literaturze filozoficznej już od kilkudziesięciu lat. Rozpoznanie i przezwyciężenie takich *uprzedzeń poznawczych* jest jednym z podstawowych zadań dydaktyki matematyki. Uczniowie mogą mieć np. trudności z rozumieniem, dlaczego potęga (liczby dodatniej) o wykładniku zerowym równa jest jeden, przywołując swoje dotychczasowe rozumienie potęgowania jako powtarzanego mnożenia. Sierpińska zwraca uwagę na rolę wyjaśniania w matematyce m.in. następującymi słowami (Sierpińska, 1994, s. 76):

> The quest for an explanation in mathematics cannot be a quest for proof, but it may be an attempt to find a rationale of a choice of axioms, definitions, methods of construction of a theory. A rationale does not reduce to logical premisses. An explanation in mathematics can reach for historical, philosophical, pragmatic arguments. In explaining something in mathematics, we speak *about* mathematics: our discourse becomes more metamathematical than mathematical.

Atrakcyjne wydają nam się również niektóre propozycje Davida Talla, które autor podsumował w swojej monografii (Tall, 2013). Wprowadził on odróżnienie *trzech światów matematyki*. Z jednej strony Tall wyróżnia następujące poziomy matematyki:

1. *Practical Mathematics.* Dotyczy doświadczeń związanych z kształtem i przestrzenią oraz elementarnej arytmetyki.

2. *Theoretical Mathematics.* Opiera się na znanych już obiektach i wykonywanych na nich operacjach.

3. *Formal Mathematics.* Bazuje na formalnych definicjach obiektów matematycznych.

Te trzy poziomy autor krzyżuje z następującymi typami aktywności:

1. *Conceptual embodiment.* Wykorzystuje połączenie percepcji oraz działania.

2. *Operational symbolism.* Wykorzystuje procedury symboliczne.

3. *Axiomatic formalism.* Wykorzystuje pojęcia teorii mnogości i dowody matematyczne.

To jedynie pobieżne, hasłowe, przywołanie koncepcji dydaktycznych Talla. Szczególną uwagę autor poświęca wprowadzonemu przez siebie pojęciu *procept*, które staramy się rozumieć jako połączenie pojęcia z towarzyszącą mu procedurą (operacją symboliczną). Za cenne uważamy podkreślenie przez Talla roli tzw. *met-befores*, czyli tego bagażu intelektualnego, który już posiada podmiot uczący się nowego dla siebie fragmentu matematyki. Tall następująco streszcza cele swojego projektu (Tall, 2013, s. 419):

> The framework of three worlds of mathematics offers a broad picture of development of mathematical thinking from the newborn child to the frontiers of research through perception, operation and increasingly sophisticated forms of reason, taking account of supportive met-befores, that encourage generalization, and problematic met-befores, that impede progress. The theory formulates a framework for the long-term development of mathematical thinking that operates not only in the individual but also in the evolution of mathematics over the centuries. It also offers the possibility of blending with a range of other theoretical frameworks that encourage emerging insights that allow us to evolve more sophisticated insights.
>
> It reveals how the sensori-motor and linguistic capabilities of a biological brain evolve into the creative thinking processes of a mathematical mind.

Wreszcie, operując w naszej praktyce dydaktycznej *pojęciami wprowadzonymi przez objaśnienie*, staramy się uwzględniać zalecenia klasyków piszących o rozwiązywaniu problemów matematycznych. Wykorzystujemy strategie, które opisywał Polya (Polya, 2009, 2014), pamiętamy o zaleceniach Schoenfelda dotyczących stosowania takich strategii, a więc m.in. konieczności *nadawania sensu* każdemu z kroków postępowania w rozwiązywaniu problemu oraz *utrzymywania kontroli* nad tym postępowaniem (Schoenfeld, 1985).

5. Uwagi końcowe

Można oczywiście zastanawiać się, czy wprowadzenie pojęcia *kontekst przekazu* nie jest niepotrzebnym mnożeniem bytów. Naszym zdaniem warto je wprowadzić, choćby dla uwypuklenia obecności matematyki w kulturze. Testem jego ewentualnej przydatności okaże się to, czy matematycy, dydaktycy, filozofowie zechcą się do niego odwoływać oraz rozwijać refleksje na jego temat.

Korzystanie z objaśnień intuicyjnych w dydaktyce matematyki adresowanej do studentów (kierunków pozamatematycznych) jest o tyle ułatwione, że od słuchaczy można wymagać *świadomości*, że owe objaśnienia są jedynie heurystyczną pomocą w docieraniu do rozumienia pojęć matematycznych zakładanego jako trafne i kanoniczne. Od dzieci nauczanych matematyki takiej świadomości wymagać nie można.

Należy jednak zdawać sobie sprawę z niebezpieczeństwa zbytnich uproszczeń oraz błędnego rozumienia, które mogą być powodowane przez (niewłaściwie stosowane) objaśnienia intuicyjne serwowane jako wspomagające przyswajanie sobie wiedzy matematycznej oraz umiejętności matematycznych. W tym względzie polegać należy przede wszystkim na doświadczeniu nauczycieli matematyki, którzy wykorzystują objaśnienia intuicyjne w swojej praktyce zawodowej.

Czy skuteczność objaśnień intuicyjnych mających wspomagać rozumienie w matematyce może zostać oceniona eksperymentalnie? Zdajemy sobie sprawę, że proponowanie *eksperymentów dydaktycznych* jest rzeczą ryzykowną w sytuacji, gdy zatwierdzone urzędowo programy nauczania przewidują ścisłe stosowanie się do zalecanych w nich zasad. Być może więc takie oceny sprowadzić należy do opinii doświadczonych dydaktyków matematyki, którzy wypróbowali w swojej pracy zawodowej różne metody nauczania i są kompetentni, aby porównać ich efekty.

Na koniec tych dość wstrzemięźliwie formułowanych refleksji przypomnimy raz jeszcze, że wypowiadaliśmy się jedynie na temat nauczania matematyki dla studentów kierunków pozamatematycznych. Do tego typu nauczania sprowadza się bowiem aktywność dydaktyczna piszącego te słowa. Nie jest ona zróżnicowana tematycznie, choć jest już dość długa i właśnie dobiega końca. Składało się na nią kilka dekad nauczania logiki matematycznej studentów różnych kierunków filologicznych oraz studentów filozofii. W ostatnim czasie dydaktyka ta objęła również nauczanie matematyki dla studentów kognitywistyki oraz prowadzone dla nich od kilku lat wykłady fakultatywne dotyczące matematycznych metod rozwiązywania problemów. Sądząc po reakcjach słuchaczy (w tym: ciekawych esejach zaliczeniowych) to ostatnie przedsięwzięcie nie było kompletnym fiaskiem. Pozwalamy sobie sądzić, że to właśnie wykorzystanie objaśnień intuicyjnych w trakcie wspomnianych wykładów było pomocne w uzyskaniu tego efektu.

Autor starał się skrupulatnie uwzględnić wszystkie uwagi krytyczne recenzentów, zwłaszcza te, które odnosiły się do wskazanych niejasnych sformułowań w pierwotnej wersji tekstu. W recenzjach zawarte zostały także uwagi, postulujące rozwinięcia omawianych w tekście tematów – np. rozważenia illokucyjnych aspektów objaśnień intuicyjnych w kontekście przekazu. Zostaną one uwzględnione w kontynuacji niniejszej pracy, przygotowywanej z myślą o przedstawieniu jej podczas konferencji *Mathematical Transgressions III*, Kraków 2017.

Literatura

Ajdukiewicz, K.: 1975, *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa.

Ben-Zeev, T., Star, J.: 2001, Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications, in: B. Torff, R. J. Sternberg (ed.), *Understanding and Teaching the Intuitive Mind: Student and Teacher Learning*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey, London, 29–56.

Davis, P. J., Hersh, R.: 1994, *Świat Matematyki*, PWN, Warszawa.

Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*, Kluwer Academic Publishers, New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow.

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., Levy, A.: 1973, *Foundations of set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London.

Galperin, G.: 2003, Playing Pool with π (The Number π from a Billiard Point of View), *Regular and Chaotic Dynamics* **8**(4), 375–394.

Ghrist, R.: 2014, *Elementary Applied Topology*, Createspace.

Good, I. J., Churchhouse, R. F.: 1968, The Riemann hypothesis and pseudorandom features of the Möbius sequence, *Mathematics of Computation* **22**, 857–861.

Havil, J.: 2007, *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Havil, J.: 2008, *Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Heath, T. L.: 2002, *The Works of Archimedes*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Klymchuk, M., Staples, S.: 2013, *Paradoxes and Sophisms in Calculus*, Mathematical Association of America, Washington, DC.

Lakoff, G., Johnson, M.: 1980, *Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G., Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Lange, M.: 2014, Depth and Explanation in Mathematics, *Philosophia Mathematica* **23**(2), 196–214.

Laraudogoitia, J. P.: 1996, A Beautiful Supertask, *Mind* **105**, 81–83.

Lénárt, I.: 1996, *Non - Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*, Key Curriculum Press, USA.

Levi, M.: 2009, *The Mathematical Mechanic. Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Mancosu, P.: 2015, Explanation in mathematics, in: E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Summer 2015 edn, Metaphysics Research Lab, Stanford University.
`https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/mathematics-explanation/`.

Needham, T.: 1997, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford.

Pogonowski, J.: 2011, Geneza matematyki wedle kognitywistów, *Investigationes Linguisticae* **XXXIII**, 106–147.

Pogonowski, J.: 2012, Matematyczne metafory kognitywistów, Tekst odczytu wygłoszonego podczas LVIII Konferencji Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 23–24 października 2012.
`http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf`.

Pogonowski, J.: 2013, Matematyczne fantazje kognitywistów, w: J. Juchnowski, R. Wiszniowski (red.), *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*, Vol. 2, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń, 117–127.

Polya, G.: 2009, *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, Ishi Press International, New York, Tokyo.

Polya, G.: 2014, *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics, Vol. II: Patterns of Plausible Inference*, Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.

Romero, G. E.: 2014, The collapse of supertasks, *Foundation of science* **19**(2), 209–216.

Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc., Orlando.

Sierpińska, A.: 1994, *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, London.

Steiner, M.: 1978, Mathematical Explanation, *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition* **34**(2), 135–151.

Tall, D.: 2013, *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail pogon@amu.edu.pl