FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Joanna Major, Bożena Olik-Pawlik,
Tadeusz Ratusiński, Lidia Zaręba

Wybrane uwagi na temat roli zadań matematycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki*

Abstract. The paper presents the comments relating to the role of tasks in the process of teaching and learning of mathematics in the context of education of students studying to become teachers. In the considerations part, reference was made to the fragments of undergraduate and postgraduate works, made at seminars of didactics of mathematics.

1. Wprowadzenie

Od wielu lat prowadzone są badania dotyczące efektywnych sposobów nauczania i uczenia się matematyki. Równolegle trwa dyskusja nad właściwym przygotowaniem studentów do wykonywania zawodu nauczyciela. Jak piszą twórcy *Raportu o stanie edukacji*: *Są to jedne z problemów współczesnej dydaktyki, zwłaszcza w kontekście zachodzących przemian technologicznych, społecznych, kulturowych czy ekonomicznych* (2013, s. 16). Ważne jest, by student – przyszły nauczyciel – poznał istotę procesu nauczania-uczenia się matematyki, procesu złożonego i wymagającego interdyscyplinarnego spojrzenia badawczego (Czajkowska, 2015). W procesie tym można, oczywiście z pewnym uproszczeniem, wyróżnić komponenty, których świadomość istnienia powinien mieć każdy uczący tego przedmiotu. Chodzi mianowicie o kształtowanie pojęć matematycznych, rozwiązywanie zadań, prowadzenie rozumowań matematycznych oraz kształtowanie języka matematycznego (zob. Ratusiński, 2003a). Chociaż wszystkie z wymienionych tu składników rozważanego procesu są ważne na każdym poziomie edukacji, w artykule skoncentrowano się głównie na drugim z wymienionych komponentów.

*Selected comments on the role of mathematical tasks in the process of teaching-learning mathematics

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97B50, Secondary: 97C70, 97D50

Key words and phrases: teachers education, teaching-learning process, problem solving, mathematical tasks

Celem opracowania jest podkreślenie jak istotny w pracy nauczyciela matematyki jest świadomy dobór lub konstrukcja zadań wykorzystywanych w procesie nauczania-uczenia się. Autorzy odwołują się do zaczerpniętych z prac dysertacyjnych – prowadzonych pod kierunkiem pracowników Instytutu Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie – przykładów zadań i ich omówień, opatrując je dodatkowo komentarzami dydaktycznymi. Złożoność i mnogość zagadnień skłoniła autorów do dokonania subiektywnej selekcji poruszanych problemów. Przykłady dobrano tak, aby z jednej strony pokazywały rozmaite działania studentów ukierunkowane na wzbogacenie ich przyszłego warsztatu pracy, z drugiej zaś, by ilustrowały rolę zadań w rozwijaniu u uczniów między innymi: matematycznych intuicji, twórczego myślenia, umiejętności stawiania pytań oraz poszukiwania na nie odpowiedzi.

2. Zadania i ich rola w procesie nauczania-uczenia się matematyki

Podanie dokładnego określenia pojęcia *zadania*, czy też *problemu*, jest *de facto*, dość trudne między innymi ze względu na fakt, że w literaturze przedmiotu terminów: *zadanie*, *problem* czy *sytuacja problemowa* używa się często zamiennie (zob. Polya, 1975; Krygowska, 1977c), a z kolei określenie *zadanie matematyczne* stosuje się, odwołując do jego rozumienia intuicyjnego (zob. Rabijewska, 1994). W literaturze można odnaleźć kilka aspektów, na które zwraca się uwagę w kontekście tego pojęcia. G. Polya podkreśla rolę zadania jako narzędzia, dzięki któremu można osiągnąć określony, chwilowo niedostępny cel (zob. Polya, 1975). A. Schoenfeld uważa, że zadaniem jest każda taka sytuacja, dla rozwiązania której należy wykonać pewne czynności intelektualne i wykorzystać strategie heurystyczne (zob. Schoenfeld, 1985). A. Z. Krygowska rozumie zadanie matematyczne jako wypowiedź powstałą na tle sytuacji problemowej, sformułowaną w języku werbalnym lub werbalno-symbolicznym, z symboliką rysunkową włącznie, zawierającą typowe polecenia i typowe pytania, tylko polecenia lub tylko pytania (zob. Krygowska, 1977c). Autorzy niniejszego opracowania przyjmują, że *zadanie matematyczne* jest pewnego rodzaju konstruktem, zaś jego rozwiązanie wymaga wykonania szeregu intelektualnych czynności bazujących na – świadomym lub nie – wykorzystaniu strategii heurystycznych. Należy dodać, iż używane w dalszej części tekstu terminy: *zadanie-problem*, *zadanie problemowe* oraz *problem matematyczny* stosowane są przez autorów zamiennie.

W literaturze z zakresu dydaktyki matematyki funkcjonują różne typologie zadań matematycznych[1] (zob. np. Krygowska, 1977c; Polya, 1993; Rabijewska, 1994; Siwek, 2005) i już one mogą sugerować rolę poszczególnych typów zadań w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Wyodrębnianie różnych grup zadań matematycznych ukierunkowane jest na dostrzeganie specyficznych aktywności ucznia. Między innymi tym zagadnieniem zajmują się dydaktycy matematyki

[1] Ze względu na ograniczoną objętość opracowania autorzy artykułu nie przywołują w tym miejscu charakterystyk poszczególnych grup zadań, dopiero w dalszej części pracy odwołują się do konkretnych typologii, bezpośrednio związanych z omawianymi przykładami. Dalecy są jednak od wnikliwej analizy prezentowanych zadań przez pryzmat wspomnianych typologii.

w swoich badaniach. Nad analizą istniejących już typologii powinni pochylić się również przyszli nauczyciele tego przedmiotu. Ważna jest bowiem refleksja nad korzyściami płynącymi z rozwiązywania przez uczniów pewnych typów zadań. Praca nad zadaniami powinna być ukierunkowana nie tylko na szybkie opanowanie przez uczniów łatwo dających się określić sprawności, wiadomości czy schematów i ich zastosowanie w stereotypowych sytuacjach, ale także na kształtowanie właściwej postawy intelektualnej uczącego się. Praca nad odpowiednio dobranymi zadaniami powinna, między innymi, rozwijać intuicje matematyczne i twórcze myślenie, prowokować do stawiania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi, zachęcać do kreatywności, inspirować do podejmowania badań, poszukiwania, eksperymentowania, stawiania hipotez i ich weryfikowania. Nie jest również obojętna dla rozwoju młodego człowieka umiejętność właściwego doboru i wykorzystania w procesie pracy nad zadaniem nowoczesnych technologii obecnych w otaczającym nas świecie. Autorzy artykułu te właśnie kwestie mieli na uwadze, wybierając przykłady do prezentacji w tej publikacji.

Należy zauważyć, że sam proces nauczania-uczenia się ma charakter dwutorowy, czyli podczas pracy nad zadaniami uczą się nie tylko uczniowie. Informacje zwrotne uzyskane od uczących się w ramach tego procesu, a dokładniej podczas interakcji nauczyciel – uczeń, pozwalają nauczycielowi doskonalić jego warsztat dydaktyczny i wzbogacać doświadczenia, w szczególności w zakresie doboru bardziej wartościowych dla uczniów zadań (zob. Turnau, 1990).

3. Przykłady zadań wraz z komentarzami dydaktycznymi

W tej części artykułu zaprezentowano, zapowiedziane wcześniej, przykłady zagadnień, w których kluczową rolę odgrywają odpowiednio dobrane, bądź skonstruowane zadania. Starano się pokazać, iż mogą one być narzędziem pomocnym w ujawnianiu sposobów myślenia uczących się, a także środkiem do wzbogacania ich wiedzy i umiejętności matematycznych.

Praca nad przedstawionymi tu zadaniami nie jest łatwa. Wymaga bowiem od uczących się matematyki, ale często także od nauczycieli, twórczego podejścia do analizowanych problemów, porzucenia pewnych utartych schematów rozumowania i postępowania, by móc przedstawić ich, czasami, niekonwencjonalne rozwiązania. To właśnie ten czynnik, w opinii autorów, powoduje, iż zaprezentowane dalej zadania są tak istotne i wartościowe w procesie nauczania-uczenia się matematyki. W kontekście takich zadań, S. Turnau uważa, że ich rozwiązywanie uczy krytycznego spojrzenia na dane zawarte w ich treści, wyrabia nawyk analizowania tych informacji przed przystąpieniem do poszukiwania odpowiedzi, przeciwdziała pospiesznemu, schematycznemu dobieraniu działań prowadzących do jednoznacznego rezultatu, nieraz nawet wbrew zdrowemu rozsądkowi, gdy zadanie jest nietypowe (Turnau, 1990).

Przykład I

W codziennym życiu nierzadko znajdujemy się w sytuacjach, w których mamy do czynienia z nadmiarem lub niedomiarem informacji. Szybki rozwój technologii przyczynił się do gwałtownego wzrostu ilości ogólnie dostępnych wiadomości. Obecnie główną trudnością nie jest samo pozyskiwanie informacji, lecz ich selekcja, a czasami uświadomienie sobie, w danej sytuacji, że występuje ich deficyt bądź nadmiar. Zgodne jest to z myślą A. Z. Krygowskiej, która uważa, że należy umieć patrzeć, aby widzieć to, co chcemy zobaczyć, podobnie, żeby usłyszeć to, co nas interesuje, trzeba umieć słuchać (Krygowska, 1977c). Rozważanie odpowiednich zadań jest więc istotne z punktu widzenia przygotowywania uczących się do życia w otaczającej nas rzeczywistości.

Zadania, w trakcie rozwiązywania których uczący się matematyki potrzebuje krytycznie przyjrzeć się danym, są niejednokrotnie zadaniami otwartymi. Często nie mają one określonego algorytmu prowadzącego do rozwiązania, mogą też nie mieć jednoznacznej odpowiedzi. Pracujący nad takim zadaniem musi podjąć decyzję, które informacje pozostawić, a które odrzucić (w przypadku, gdy ma do czynienia z nadmiarem niesprzecznych danych) lub stwierdzić brak możliwości rozwiązania zadania z powodu zbyt małej liczby danych czy też z uwagi na sprzeczność informacji występujących w jego treści. Zagadnienia te poruszane są między innymi w dysertacjach G. Zielińskiej (2011) i G. Jasińskiej (2014). Motywem przewodnim badań opisanych w obu pracach, a prowadzonych na różnych poziomach edukacji, jest poszukiwanie odpowiedzi na pytanie o wpływ nadmiaru bądź niedomiaru danych na proces rozwiązywania przez uczniów zadań tekstowych. W badaniach tych podjęto próbę określenia postawy[2] uczniów pracujących nad przywołanym dalej zadaniem. Metodę badawczą stanowiła analiza wytworów pracy uczniów[3]. Oto zapowiedziane zadanie:

Wyznacz obwód prostokąta wiedząc, że jego pole jest równe 18 cm^2*, a długości boków są liczbami naturalnymi. Zapisz obliczenia z komentarzem i udziel odpowiedzi* (Zielińska, 2011).

Analiza zebranego materiału badawczego pozwoliła dyplomantce wyróżnić kilka uczniowskich postaw. Należy zaznaczyć, że z opisem, klasyfikacją czy wnioskami (w kontekście wszystkich przytaczanych w opracowaniu przykładów) można niejednokrotnie polemizować, jednak oddają one różnorodność postaw i ich najbardziej charakterystyczne cechy. Oto wybrane, przedstawione przez studentkę postawy badanych:

P.1. Rozwiązanie zadania dla przykładowych długości boków (rozważenie jednego przypadku – obranie konkretnych, zgodnych z warunkami zadania, długości boków).
P.2. Porzucenie pracy nad zadaniem w momencie stwierdzenia wieloznaczności jego rozwiązania.
P.3. Rozważanie wszystkich możliwych przypadków dla różnych długości boków prostokąta bez udzielenia odpowiedzi końcowej do zadania.

[2]Przez termin *postawa* rozumiano stosunek człowieka do życia lub do pewnych zjawisk, wyrażający jego poglądy; też: sposób postępowania lub zachowania wobec określonych zjawisk, zdarzeń lub w stosunku do ludzi (*Słownik Języka Polskiego*, 2000).

[3]W badaniach brało udział 38 gimnazjalistów uczących się w III klasie, a przytoczone zadanie stanowiło część przygotowanej przez studentkę karty pracy.

P.4. Zauważenie wieloznaczności rozwiązania zadania i podanie jednego z takich rozwiązań.
P.5. Zauważenie wieloznaczności rozwiązania zadania i próba podania wszystkich takich rozwiązań.

Poniżej przytoczono wypowiedzi uczniów prezentujących, według autorki przywoływanej pracy, postawę P.2.

- *Są różne możliwości rozwiązania i ciężko określić, która z nich jest prawidłowa.*
- *Wychodziło mi kilka możliwości i nie wiem, co z tym zrobić.*
- *Na to pytanie nie ma jasnej odpowiedzi, gdyż istnieją dwie prawidłowe.*
- *Nie wiadomo, co zrobić, która z odpowiedzi jest dobra.*
- *Są dwa rozwiązania, tak być nie może.*
- *Są dwa rozwiązania i nie da się dać odpowiedzi, tu wszystkie pasują za każdym razem są liczby naturalne, a przecież zadania zawsze mają odpowiedzi* (Zielińska, 2011).

Jak zauważyła dyplomantka, autorzy cytowanych wypowiedzi, podczas pracy natrafiali na pewną bezradność w zakresie wyciągania wniosków z prowadzonych rozumowań. Ponadto odnotowała, że znalezienie jednego rozwiązania często skutkowało zakończeniem przez badanego pracy nad zadaniem. Większość tych uczniów, którzy znaleźli kilka rozwiązań, nie formułowała natomiast żadnej odpowiedzi. W swojej pracy studentka zwróciła uwagę na kwestię charakteru zadań zamieszczanych na kartach podręczników. Przyzwyczajanie uczniów do zadań o charakterze problemów konwergentnych może być ograniczeniem rodzącym sugestię, iż zawsze istnieje tylko jedno dobre rozwiązanie dla sytuacji problemowej. Wydaje się, że tego typu postawy są wynikiem fałszywych przeświadczeń badanych o cechach, jakimi charakteryzują się zadania matematyczne.

Analiza zgromadzonego materiału ujawnia różnego rodzaju rozumowania, przeszkody i trudności uczniów związane z pracą nad przedstawionym tu zadaniem, co wskazuje nauczycielowi kierunek pomocy, jakiej powinien udzielić uczniom w ich dalszej pracy.

Przykład II

W pracy K. Palimąki (2015) zaproponowano zestaw zadań, poprzedzony jednym wspólnym poleceniem, wymagającym od rozwiązującego wskazania, w kontekście każdego z zadań, jednej z poniższych odpowiedzi:

- wszystkie informacje podane w zadaniu są potrzebne do jego rozwiązania;
- podane informacje są niewystarczające do jego rozwiązania;
- jest za dużo informacji i zadanie można rozwiązać, pomijając niektóre z nich (dane nie są sprzeczne);
- informacje podane w zadaniu są sprzeczne.

Praca ucznia nad przygotowanymi zadaniami zmierza do odkrycia związków między danymi i szukanymi. Istotne jest to, że uczeń może dokonać tego na wiele różnych sposobów. Jednak, jak pisze autorka pracy: *Nie chodzi tu o to, aby uczniowie rozwiązywali każde zadanie w całości lub zapisywali wszystkie zależności* (*co wiąże się z wydłużonym czasem rozwiązania*). *Główna aktywność uczniów w trakcie rozwiązywania zadań polega na tym, aby „wyobrazić sobie" jak przebiegałby proces rozwiązania każdego zadania; chodzi więc o to, aby uczniowie opracowali zestaw kolejnych czynności* (*ułożyli plan rozwiązywania zadania*). *Sprzyja to nie tylko rozwijaniu wyobraźni arytmetycznej czy algebraicznej uczniów, lecz także rozbudza intelektualnie każdego z nich* (Palimąka, 2015).

Oto jedno z zadań ze wspomnianego zestawu, oczywiście – jak zapowiadano wcześniej – poprzedzone prośbą o wybór jednej z zaproponowanych, a przedstawionych na początku przykładu II, odpowiedzi.

Zbiór $B = [-7, 12]$ *jest przeciwdziedziną funkcji* $f(x) = 3x + 4$. *Wyznacz dziedzinę tej funkcji, wiedząc że zbiorem wartości jest zbiór* $C = (1, 10)$.

Dla zobrazowania charakteru pracy nad zadaniem, autorka proponuje wykorzystanie pewnych wskazówek heurystycznych. Stawianie pytań i udzielanie odpowiedzi na nie pozwala na analizę zależności pomiędzy obiektami matematycznymi, o których jest mowa w treści zadania. Możliwym staje się wówczas wskazanie cech zadania (za mało, wystarczająco lub za dużo danych). Poniżej zaprezentowano przykładową analizę wspomnianego zadania, nadającą określony kierunek pracy nad nim.

1. Co jest niewiadome? Dziedzina funkcji.
2. Co jest dane, jaki jest warunek? Dziedzina jest zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ze zbioru C, a przeciwdziedziną funkcji jest zbiór B. Zbiór wartości funkcji zawiera się w przeciwdziedzinie funkcji f.

Z warunków zadania mamy

$$\begin{cases} 1 < 3x + 4 \\ 10 > 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2. \end{cases}$$

Wynika stąd, że: $x \in (-1, 2)$.

3. Czy warunek wystarcza do jednoznacznego określenia niewiadomej? Tak.
4. Czy warunek jest niewystarczający lub zbyt obszerny? Warunek jest zbyt obszerny.

Zazwyczaj uczeń – mając zadanie – musi je rozwiązać. W omawianym przykładzie nie chodzi natomiast o samo rozwiązanie zadania (o czym czytamy w przywołanej wyżej wypowiedzi studentki), lecz o taką analizę jego treści, która pozwoli na wskazanie jednej z podanych na wstępie odpowiedzi ukazujących istotę tego zadania.

Warto tu zauważyć, iż styl pracy nad przytoczonym zestawem zadań koresponduje z badaniami dydaktycznymi prowadzonymi między innymi przez A. Żeromską (1998, 2004), a dotyczącymi postaw uczących się wobec zadań.

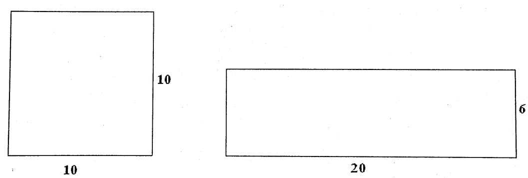
Nieco odmienny charakter mają kolejne przykłady.

Przykład III

W pracy A. Ogieli (2009) podjęto próbę skonstruowania zestawu zadań służących kształtowaniu pojęć geometrycznych, w szczególności intuicji związanych z pojęciem wielokątów równoważnych przez pocięcie. Zaproponowany przez studentkę zestaw zawiera zadania, które – używając terminologii A. Z. Krygowskiej – można, zdaniem autorów, zaliczyć do zadań-ćwiczeń i zadań problemowych[4].

Cykl tych zadań zawiera takie zadania, w których należy najpierw utworzyć tangramy (przez rozcinanie kwadratu według instrukcji), następnie ułożyć z kartonowych modeli figur (tanów) figury tangramowe, zbudować z wybranych (bądź wszystkich) tanów wielokąty wypukłe, aż w końcu rozstrzygnąć czy wielokąty są równoważne przez pocięcie[5]. Poniżej zaprezentowano jedno z takich zadań.

Czy poniższe figury są równoważne przez pocięcie (*Ryc. 1*)*?*



Ryc. 1

Zadanie to, zaproponowane przez A. Ogielę (2009), jest ćwiczeniem (w sensie typologii A. Z. Krygowskiej[6]), poprzez które można kształtować u uczniów zagadnienie równoważności przez pocięcie. W szczególności może ono prowokować rozwiązujących do wskazania argumentów uzasadniających, że przywołane figury nie są równoważne przez pocięcie.

W pracy sformułowano również inny, zaprezentowany poniżej, problem.

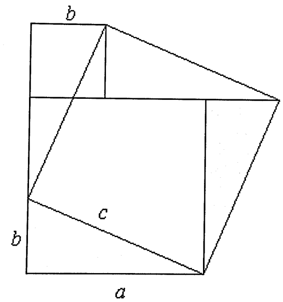
Rozetnij dwa kwadraty tak, aby z otrzymanych części otrzymać jeden kwadrat.

[4]Wśród zadań matematycznych A. Z. Krygowska wyróżnia pewien ich typ, które nazywa *problemami.* Zwraca uwagę na fakt, że jeśli zadanie nie jest standardowe, jest dla ucznia nowe lub dotyczy stosunków dla niego abstrakcyjnych, to nie przesądza to o tym, by zadanie zaliczyć na danym poziomie nauczania do zadań-problemów. Decyduje o tym nie sama trudność, ale rodzaj trudności (Krygowska, 1977c). Autorka zwraca też uwagę na fakt, że zadania-problemy są *zadaniami otwartymi.* W tej samej pracy autorka pisze, że: *dydaktycy matematyki najczęściej nie definiują pojęcia „problemu matematycznego", w odróżnieniu od innych zadań matematycznych, ilustrują te różnice przykładami i kontrprzykładami.* Z kolei S. Jones podaje następujące określenie: *problem matematyczny to pytanie dotyczące matematyki, na które odpowiedź nie jest natychmiastowa i nie może być uzyskana przez bezpośrednie zastosowanie znanych schematów* (w: Jones, 1966; za: Krygowska, 1977c, s. 25).

[5]Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie (na wielokąty), jeżeli jeden z nich można pociąć na skończoną liczbę wielokątów, z których da się złożyć drugi wielokąt. Naturalnym jest założenie, że przy układaniu wielokątów poszczególne części nie mogą na siebie nachodzić, mogą jedynie mieć wspólny brzeg lub jego część.

[6]Rozwiązywanie tego typu zadania-ćwiczenia wymaga aktywności odtwórczych. Praca nad zadaniem ma na celu zmechanizowanie pewnych czynności, operacji występujących często w toku rozwiązywania innych zadań (Krygowska, 1977c).

Na rysunku 2 przedstawiono, zaproponowany przez dyplomantkę, szkic rozwiązania zadania.



Ryc. 2

Rozwiązanie to jest interesujące z punktu widzenia matematyki, gdyż z jednej strony stanowi kluczowy element w dowodzie twierdzenia Bolyai-Gerwiena (omówionego w dalszej części artykułu), z drugiej zaś przeanalizowanie zadania i tego właśnie rozwiązania w innym kontekście ukazuje geometryczny dowód twierdzenia Pitagorasa. Mamy tu do czynienia z naturalnym przenikaniem się różnych zagadnień matematycznych, którego uświadomienie jest istotne zarówno dla nauczyciela ukazującego pewną strukturę wiedzy matematycznej, jak i dla ucznia, który tę wiedzę strukturalizuje. Należy zauważyć, że studentka – proponując powyższe zadania – potencjalnie stwarza sytuację dydaktyczną, która prowokować może uczniów do poczynienia refleksji po rozwiązaniu zadań. Zwraca się tu uwagę na równość pól figur tangramowych, a więc na niezmienniczość pola w przekształceniach izometrycznych.

Zaprezentowane w pracy A. Ogieli (2009) zadania mogą stać się zalążkiem do budowania przez studenta – przyszłego nauczyciela – propozycji dydaktycznych zmierzających do kształtowania nowych dla uczniów pojęć, do odkrywania twierdzeń, a przez to do poznawania nowych zagadnień matematycznych na drodze własnych doświadczeń uczących się.

Podczas rozwiązywania odpowiednio skonstruowanego cyklu zadań uczeń może, krok po kroku, odkryć istotę nowego dla niego pojęcia matematycznego. W rzeczywistości ma do czynienia ze złożonym problemem „rozbitym" na szereg prostszych zadań.

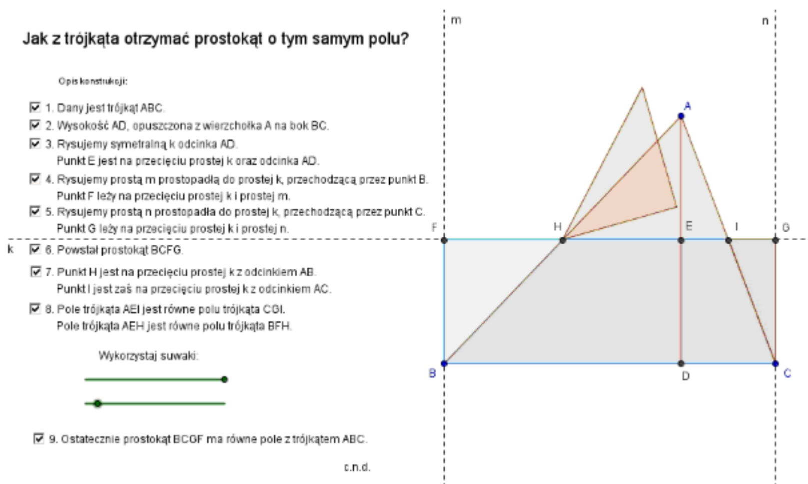
Przykład IV

W pracy A. Suder (2009) wypracowano podwaliny koncepcji dydaktycznej służącej opracowaniu zagadnień równoważności przez pocięcie, bazującej na szeregu zadań-problemów wspartych specjalnie przygotowanymi plikami komputerowymi.

Obserwacje poczynione podczas pracy ucznia umożliwiają odkrycie dowodu twierdzenia Bolyai-Gerwiena, które mówi, iż *dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają to samo pole.* Dowód „w jedną stronę" jest oczywisty i wynika bezpośrednio z elementarnych własności planimetrii. Uzasadnienie, iż wielokąty o jednakowym polu są równoważne przez pocięcie jest już mniej oczywiste i przebiega w kilku etapach, ukazujących kolejno możliwości:

- pocięcia wielokąta na trójkąty;
- pocięcia trójkąta na części, z których możliwe jest „złożenie” prostokąta;
- pocięcia prostokąta na części, z których „złożyć” można kwadrat;
- pocięcia dwóch kwadratów na części, z których da się zbudować jeden kwadrat.

Omawiana praca zawiera więc w istocie rozważania, które rodzą się na bazie problemów poruszanych w dysertacji A. Ogieli (2009). Możemy tu jednak dostrzec nowy aspekt omawianego zagadnienia. Chodzi o kluczową rolę zadań problemowych skonstruowanych przez studentkę, które mogą być rozwiązywane ze wsparciem komputera. Pliki utworzone przez autorkę korespondują z poszczególnymi częściami dowodu twierdzenia Bolyai-Gerwiena. Ich celem była nie tylko wizualizacja rozważanego zagadnienia, lecz również uświadomienie uczniowi struktury i hierarchii czynności podczas postępowania dowodowego. Studentka między innymi stworzyła plik (zob. rysunek 3), dzięki któremu uczeń może śledzić krok po kroku ideę pomysłu „pocięcia – przełożenia” trójkąta na takie części, z których można „złożyć” prostokąt.



Ryc. 3

Autorka tak skonstruowała pliki, by stanowiły one w pełni interaktywną pomoc i by uczeń miał kontrolę nie tylko nad pojawiającymi się etapami, lecz również miał możliwość zmiany własności obserwowanych danych wejściowych – w tym przypadku kształtu trójkąta. Z dydaktycznego punktu widzenia to bardzo istotny aspekt, gdyż w nauczaniu tradycyjnym rzadko można „obserwować”, np. ten sam etap dowodu, jednocześnie dla różnych rodzajów trójkątów. Tym samym dyplomantka stworzyła uczniowi możliwość analizy szerokiego spektrum przypadków i całościowego spojrzenia na sytuację.

Rozważania prowadzone w przywołanych pracach A. Ogieli (2009) i A. Suder (2009) ukazują jak można, poprzez dobór odpowiednich zadań, stworzyć sytuację problemową, dzięki której uczeń będzie prowokowany do odkrywania twierdzenia matematycznego, w tym wypadku – twierdzenia wykraczającego poza podstawę programową IV etapu edukacyjnego.

Przykład V

W pracy nad zadaniem, o czym była już mowa wcześniej, istotną rolę może odgrywać odpowiednie użycie nowoczesnych mediów – co w konsekwencji wpłynie nie tylko na przebieg pracy nad zadaniem, ale również na uzyskane efekty. Dysertacje E. Gwiżdż (2008) i R. Jeczko (2008), stanowiące podstawę tego przykładu, wpisują się w nurt badań związanych z pracą nad zadaniem matematycznym. Zadania problemowe stanowią tu narzędzie do ujawniania wiedzy i umiejętności matematycznych uczących się, pozwalają poznać (zgłębić) sposób myślenia ucznia postawionego w nowej dla niego sytuacji

Jak pisze R. Howe: *sukces tradycyjnego nauczania przyczynił się do powstania opartej na matematyce technologii, która z kolei stworzyła sytuację, w jakiej tradycyjne nauczanie już nie jest odpowiednie* (Howe, 1999, s. 102). Dostrzegając możliwości pozytywnego wpływu nowoczesnych technologii na sposób podejścia do nauczania matematyki, w tym także na rozwiązywanie zadań, warto przekonywać studentów – przyszłych nauczycieli matematyki, aby częściej – w procesie nauczania-uczenia się – aktywizowali uczniów, wykorzystując między innymi kalkulator graficzny czy komputer. Wydaje się, że zarówno nauczyciel z długim stażem zawodowym, jak i mniej doświadczony, ale odpowiednio ukierunkowany abiturient studiów matematycznych, potrafi wykorzystać dobrodziejstwa nowoczesnej technologii, adaptując do jej potrzeb starsze, sprawdzone kanony dydaktyki matematyki. Postawę taką prezentują autorki prac (Gwiżdż, 2008; Jeczko, 2008). Dyplomantki za narzędzie badawcze przyjęły następujące zadanie:

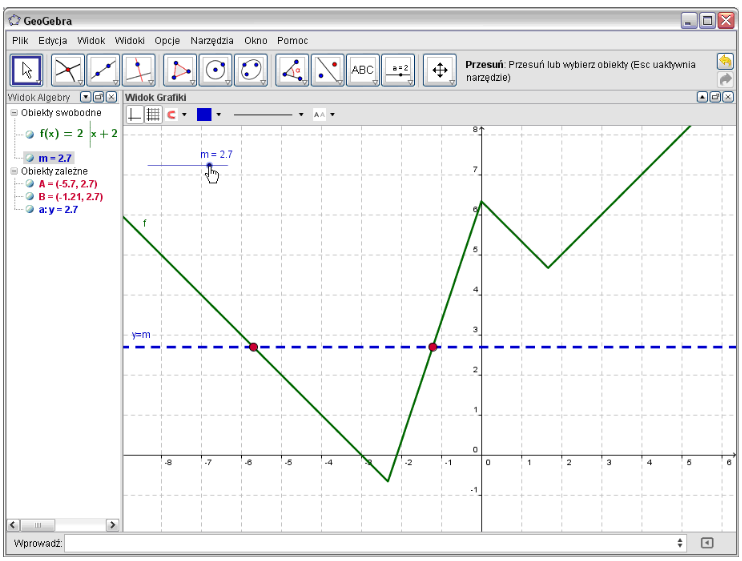
Sporządź wykres funkcji $y = f(m)$, gdzie $f(m)$ jest równe liczbie pierwiastków równania:

$$2\left|x + 2\frac{1}{3}\right| - 2\left|x\right| + \left|x - 1\frac{2}{3}\right| = m$$

w zależności od parametru $m \in R$.

Zadanie to można rozwiązać tradycyjnie, tzn. na kartce papieru, kilkoma różnymi sposobami. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż jest ono sformułowane w sposób przejrzysty, jego treść nie jest skomplikowana ani nadmiernie rozbudowana. Mimo swej prostoty nie jest to jednak ani trywialne, ani szablonowe zadanie i nie można go rozwiązać poprzez zastosowanie tylko znanego schematu postępowania. Wymaga ono od ucznia pewnego aktu twórczego. Na poruszane w zadaniu zagadnienie nie ma natychmiastowej odpowiedzi i nie można jej uzyskać przez bezpośrednie zastosowanie znanych algorytmów. Interesujące jest jednak to, że odpowiedni program komputerowy może nadać rozwiązaniu nowy sens, nowe spojrzenie na problem, o czym przekonały się studentki. Może on mieć szczególne znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy uczeń nie potrafi rozwiązać zadania w tradycyjny sposób, jego rozwiązanie nie jest pełne lub gdy rozwiązujący nie jest przekonany co do poprawności rozwiązania.

Przedmiotem zainteresowania dyplomantek było śledzenie samego procesu rozwiązywania zadania. W przywołanych pracach opisano badania indywidualne (wspomagane użyciem komputera) przeprowadzone wśród uczniów liceum ogólnokształcącego. W każdej z opisywanych prac badania przebiegały w dwóch etapach. W pierwszym śledzono próbę rozwiązania problemu bez pomocy komputera. Uczeń, mając do dyspozycji jedynie swoją wiedzę, tablice matematyczne i przybory do pisania, próbował rozwiązać zadanie. Na zakończenie tego etapu studentki przeprowadziły z każdym uczniem rozmowę, której celem było wyjaśnienie przyczyn ewentualnego niepowodzenia ucznia i ujawnienie trudności jakie mu towarzyszyły podczas rozwiązywania zadania. W kolejnym etapie udostępniono uczniom komputery z odpowiednim programem (np. GeoGebra lub Wykresy funkcji). W tej nowej sytuacji uczniowie podejmowali ponowną próbę rozwiązania problemu.



Ryc. 4

Praca w drugim etapie rejestrowana była przy pomocy specjalnego programu komputerowego. Z otrzymanego zapisu stworzony został film, który posłużył potem jako materiał do analizy pracy uczniów. Przykładowy zrzut ekranu ukazujący pracę ucznia nad zadaniem ilustruje rysunek 4.

Obserwacje pracy uczniów nad zadaniem-problemem i poczynione przez dyplomantki uwagi zdają się być zgodne z teorią „rusztowań” (Kutzler, 1998), która mówi, że użycie komputera pomaga uczniom w uzupełnieniu ewentualnych luk w wiedzy czy umiejętnościach, wynikiem których może okazać się bezradność w podejściu do problemu. Nie każdy poddany badaniom uczeń był w stanie rozwiązać postawiony mu problem już na pierwszym etapie. Jednak możliwość skorzystania w trakcie pracy z odpowiedniego programu komputerowego zachęciła uczniów, szczególnie tych o niskich umiejętnościach matematycznych, do zajęcia się zadaniem i pozwoliła na podjęcie kolejnej próby jego rozwiązania. Badani mogli nadal pracować nad zadaniem, a w konsekwencji nabywać nowe doświadczenia.

Zastosowanie nowoczesnych technologii nie stoi bynajmniej w sprzeczności z ugruntowanymi przesłankami dydaktycznymi. Omówione przykłady potwierdzają stwierdzenie: *jeżeli równocześnie z ujawnieniem się potrzeby, rodzi się w mym mózgu sposób na jego zaspokojenie, to wówczas nie ma zadania. Jeśli zaś nie znajduje się takiego sposobu, to dopiero wtedy mamy przed sobą zadanie. Tak więc zadanie pojawia się wówczas, gdy zachodzi potrzeba świadomego poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny, lecz chwilowo niedostępny cel. Rozwiązać zadanie – to tyle, co znaleźć ten środek* (Polya, 1975, s. 145). Jak pokazały badania, takim środkiem może być komputer, a ściślej mówiąc, stosownie dobrany program komputerowy.

Dyplomantki dostrzegły istotne aspekty dotyczące wspierania procesu dydaktycznego nowoczesnym medium. Dzięki wykorzystaniu komputera nauczyciel może stworzyć taką sytuację dydaktyczną, która pozwoli uczniom z innej perspektywy spojrzeć na problem, z którym do tej pory miał trudność. Taki zabieg może sprawić, że uczniowie lepiej zrozumieją problem i w konsekwencji udzielą odpowiedzi na postawione w zadaniu pytania. Umiejętne wykorzystanie komputera może zatem ponownie zaktywizować i zachęcić uczniów do dalszej pracy nad porzuconym problemem. Przyszły nauczyciel, opracowując i korzystając z tego typu pomocy dydaktycznych, powinien mieć ten fakt na uwadze.

Powinien być jednak świadomy także trudności i zagrożeń wynikających z zastosowania nowoczesnych technologii do wsparcia procesu dydaktycznego (De Corte, 1995), które mogą wynikać na przykład z bezgranicznego zaufania do tego narzędzia (Ratusiński, 2001; Pawlak, 2001; Kąkol, Ratusiński, 2004, 2007). Często można spotkać się z opinią, iż w tradycyjnym rozwiązywaniu zadań większy nacisk kładzie się na uzyskanie prawidłowej odpowiedzi, niż na znajdywanie sposobów rozwiązania zadania. Komputer, pozwalając uczniom znaleźć poprawną odpowiedź, jest dla nich na tyle przekonywujący, że zupełnie nie czują potrzeby dowodzenia czy uzasadniania zaobserwowanych spostrzeżeń. Komputer w tej sytuacji jawi się jako pewnego rodzaju *przeszkoda epistemologiczna* (Pawlak, 2001; Sierpińska, 1987). Uczniowie, którzy w badaniach E. Gwiżdż (2008) i R. Jeczko (2008) uzyskali z pomocą komputera satysfakcjonujące ich odpowiedzi, zaprzestali dalszej pracy w celu uzasadnienia poprawności sformułowanych hipotez. Wykorzystanie komputera osłabiło ich dalszą motywację do działania. Co więcej, prowokowani do udowodnienia swoich hipotez, najczęściej jeszcze raz odtwarzali przebieg swojej pracy na komputerze, nie uzasadniając matematycznie poprawności swoich spostrzeżeń. Wielu dydaktyków w swych pracach przywoływało to zjawisko, obserwując podobne osłabienie zainteresowania odkryciem pełnego rozwiązania po uzyskaniu odpowiedzi w szczególnym przypadku. W kontekście dysertacji obserwacje takie widoczne są np. w pracy G. Zielińskiej (2011).

4. Zakończenie

Należy zaznaczyć, że poruszane w artykule zagadnienia nie są nowe. Są one jednak nadal aktualne i wydają się być kluczowe dla rozwijającej się dziedziny naukowej, jaką jest dydaktyka matematyki. Nadal bowiem w kształceniu matematycznym ważna jest myśl A. Z. Krygowskiej: *dydaktyka matematyki eksponuje aktywność twórczą, czynny i świadomy udział uczącego się w odkrywaniu pojęć, wzorów, twierdzeń, dowodów, w schematyzowaniu sytuacji, w ich matematyzowaniu, ogólnie w rozwiązywaniu problemów bardzo zróżnicowanych, obejmujących całość materiału nauczania* (Krygowska, 1981a, s. 13). Rozwiązywanie odpowiednio dobranych zadań, to bez wątpienia jedna z ważniejszych aktywności, na którą należy kłaść nacisk w kształceniu matematycznym. Stwierdzenie to nie jest bezpodstawne, w opinii autorów artykułu warto, by stanowiło (pewnego rodzaju) apel do wszystkich, którzy mają wpływ na organizację i przebieg procesu nauczania-uczenia się matematyki, gdyż – zgodnie z tym, co stwierdziła A. Z. Krygowska – *uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań* (Krygowska, 1977c, s. 3).

Uwagi poczynione w artykule nie wyczerpują tematyki związanej z rolą zadań w kształceniu matematycznym. Od wielu lat jest ona bowiem przedmiotem zainteresowania zarówno dydaktyków matematyki, jak i nauczycieli praktyków, a badania procesu nauczania-uczenia się matematyki odbywają się wielotorowo, z uwzględnieniem różnych jego aspektów. Przykładem mogą być tu te badania, w których przedmiotem jest proces pracy nad zadaniem matematycznym (Ciosek, 1976; Ciosek, Pawlik, 1998; Czajkowska, 2005, 2007, 2009; Czaplińska, 2003a, 2003b; Schoenfeld, 1985; Polya, 1993, 1975; Hejný, 2003; Major, 2006; Major, Powązka, 2012; Zaręba, 2003, 2012, 2015) lub takie, w których zadania stanowią narzędzie diagnostyczne umożliwiające poznanie zjawisk towarzyszących procesowi nauczania-uczenia się (Legutko, 1987; Nowecki, 1974, 1975, 1977; Pardała, Uteeva, Ashirbayev, 2015; Treliński, 2006; Żeromska, 1998, 2004). Odrębny nurt stanowią badania dotyczące roli nowoczesnych technologii w procesie rozwiązywania zadań matematycznych (Kąkol, Ratusiński, 2004, 2007; Ratusiński, 2001, 2003a, 2003b; Parcia, 2004; Wojtuś, 2007).

Każde z rozważanych w artykule zagadnień oświetla z innej perspektywy kwestie dotyczące wykorzystywania zadań w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Każde z nich pozwala także spojrzeć na wskazane wcześniej elementy procesu kształcenia przez pryzmat zadań odgrywających w nim kluczową rolę. Chodzi, między innymi o to, że zaprezentowane w opracowaniu przykłady zadań ilustrują nie tylko aspekt związany z ich rozwiązywaniem, ale ukazują również ich możliwy wpływ na inne komponenty procesu kształcenia – kształtowanie pojęć matematycznych czy prowadzenie rozumowań. W artykule starano się przede wszystkim podkreślić wagę przemyślanego doboru zadań, w szczególności takich, dzięki którym możliwe jest tworzenie spójnych koncepcji dydaktycznych. Omówiono przykład ilustrujący wpływ nadmiaru, bądź niedomiaru danych na proces rozwiązywania zadań. Ukazano też problematykę dotyczącą projektowania cyklu zadań o schemacie rozwiązania mogącym nawiązywać do etapów rozwiązywania zadania (Polya, 1993). Kluczową rolę w przedstawionym w artykule przykładzie odgrywa etap dotyczący układania planu rozwiązania zadania. Zwrócono na to uwagę, ponieważ planowanie pracy nad zadaniem, czy uczenie rozwiązywania zadań, to jedne z istotniejszych kwestii w nauczaniu. W niniejszej pracy zobrazowano również, w jaki sposób można – za pomocą odpowiednio skonstruowanego cyklu zadań – kształtować pojęcie matematyczne. Wykorzystanie nowoczesnych technologii pozwoliło ukazać to samo zadanie w innym świetle – jako zadanie prowokujące uczniów do specyficznych aktywności matematycznych związanych z odkrywaniem, formułowaniem i dowodzeniem twierdzeń. Przytoczono ponadto przykład zadania problemowego stanowiącego narzędzie nie tylko do ujawniania wiedzy i umiejętności matematycznych uczących się, ale równocześnie (dzięki wsparciu komputerowemu) będącego pomocą dla nauczyciela w ukierunkowaniu ucznia do dalszej pracy nad wcześniej „porzuconym" przez niego zadaniem. Wszystkie, poruszone w przykładach, zagadnienia są ważne zarówno z punktu widzenia nauczyciela praktyka, studenta przygotowującego się do zawodu nauczyciela, jak i dydaktyka matematyki.

Wiedza i umiejętności matematyczne pełnią w naszym codziennym życiu istotną rolę, a współczesny świat podlega bardzo szybkim i głębokim przemianom, co wpływa także na system kształcenia i stanowi wyzwanie dla całej edukacji. Jednocześnie na każdym poziomie nauczania główną oś edukacji matematycznej stanowi rozwiązywanie zadań. Przygotowując ucznia (w ramach szkolnego nauczania) do życia w otaczającej go rzeczywistości, powinno się więc zwracać uwagę na rozwiązywanie takich zadań, które pozwalają kształtować szeroko pojęte kompetencje matematyczne, a także uczą myślenia i wpływają na rozwój kultury matematycznej młodych ludzi. Nie tylko wiedza jest bowiem istotna. Oprócz wiedzy potrzebna jest równocześnie, między innymi umiejętność jej wykorzystywania, matematyzowania sytuacji codziennych, prowadzenia rozumowań, argumentowania, stawiania hipotez i ich weryfikacji, zadawania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi – to ważne elementy rozwoju każdego człowieka. Warto jest zatem kształcić tak, by zdobyta wiedza i zgromadzone doświadczenia pozwalały na skuteczne rozwiązywanie napotykanych problemów w nieustająco zmieniającym się świecie. Nauczyciele, jako przewodnicy w procesie edukacji, powinni być wyczuleni na te kwestie.

Zarówno uczenie się, jak i nauczanie matematyki odbywa się w dużej mierze poprzez rozwiązywanie zadań matematycznych. Służą one oczywiście realizowaniu różnorodnych celów nauczania matematyki na wszystkich poziomach edukacji.

Jednak rozwiązując zadania, uczeń powinien nie tylko nabywać nową wiedzę i doskonalić różne umiejętności, ale również mieć sposobność do rozwijania aktywności specyficznych dla działalności matematycznej oraz kształtowania postaw i umiejętności potrzebnych współczesnemu człowiekowi niezależnie od dziedziny jego działalności (Turnau, 1990). Świadomość tego faktu i właściwe jego wykorzystanie w procesie nauczania-uczenia się matematyki powinno być zasadniczym aspektem kształcenia przyszłych nauczycieli.

Literatura

Ciosek, M.: 1976, *Dydaktyczne problemy związane z strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych.* Nieopublikowana rozprawa doktorska, WSP Kraków.

Ciosek, M., Pawlik, B.: 1998, O trudnościach studentów I roku matematykiw uczeniu się matematyki w świetle analizy ich rozwiązań zadań z geometrii, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 5–48.

Czajkowska, M.: 2005, *Wartości motywacyjne zadań matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

Czajkowska, M.: 2007, The goal of a mathematical problem for the author and the recipient, in: J. Guncaga, Z. Takac (ed.), *Mathematics at school today and tomorrow*, Katolicka Univerzita w Ružomberoku, Ružomberok, 31–35.

Czajkowska, M.: 2009, IT as a means of reducing mathematical helplessness, *IMEM 2009 Interdisciplinary Relationships in the Theory and Practice oh Informatics, Management, Economics and Mathematics*, Proceedings of International Congress, Catholic University in Ružomberok, 518–529.

Czajkowska, M.: 2015, Postawy nauczycieli matematyki wobec zmian w edukacji, *Społeczeństwo i Edukacja. Międzynarodowe Studia Humanistyczne* **18**(3), 81–94.

Czaplińska, J.: 2003a, Przyczynek do badań nad strategiami rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 5–68.

Czaplińska, J.: 2003b, Trudności w stosowaniu pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego, *Disputationes Scientificae Univ. Catholicae in Ružomberok* **3**(3), 3–10.

De Corte, E.: 1995, Psychologiczne aspekty zmian w edukacji związanych z zastosowaniem komputerów, *Komputer w Szkole* **3**, 44–55.

Dobrzycki, A.: 1994, Przykłady rozwiązywania zadań w procesie nauczania matematyki, w: B. Rabijewska (red.), *Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki – przewodnik po literaturze*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 263–295.

Gucewicz-Sawicka, I.: 1982, Proces uogólniania w nauczaniu matematyki, w: Z. Krygowska (red.), *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 107–118.

Gwiżdż, E.: 2008, *Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań funkcyjnych z parametrem na przykładzie badan przeprowadzonych wśród uczniów III klasy liceum ogólnokształcącego.* IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.

Hejný, M.: 2003, Anatómia slovnej úlohy o veku, *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, Vol. III(3), Ružomberok, Katolicka Univerzita, 21–32.

Howe, R.: 1999, Znajomość i nauczanie matematyki elementarnej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **21**, 97–109.

Jasińska, G.: 2014, *Nadmiar danych w zadaniach tekstowych.* IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.

Jeczko, R.: 2008, *Rola komputera w rozwiązywaniu zadań matematycznych na przykładzie badań dotyczących zadania funkcyjnego z parametrem przeprowadzonych wśród uczniów szkoły średniej.* IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.

Kalinowska, A.: 2010, *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych - między wiedzą a jej formalizacją*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

Kąkol, H., Powązka, Z.: 1998, *Pojęcie funkcji, część 2*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała.

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119–142.

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2007, The role of computer in the process of solving of mathematical problems (results of research), *Teaching Mathematics* & *Computer Science* **5**, 67–80.

Kompetencje kluczowe w uczeniu się przez całe życie europejskie ramy odniesienia.: 2007, Urząd Oficjalnych Publikacji Wspólnot Europejskich, Luksemburg.

Kopański, S.: 2003, *W poszukiwaniu matematycznych talentów*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała.

Kozielecki, J.: 1966, *Zagadnienia psychologii myślenia*, PWN, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1959a, Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole, *Matematyka* **5**, 257–264.

Krygowska, Z.: 1959b, Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole, *Matematyka* **6**, 344–351.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1981a, Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 7–60.

Krygowska, Z.: 1981b, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Kucharczyk, S.: 1998, Wokół zadania matematycznego, w: B. Rabijewska (red.), *Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 25–54.

Kutzler, B.: 1998, *Solving Linear Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method*, BK Teachware, Austria.

Legutko, M.: 1987, Przykłady behawioralno-poznawcze postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 51–102.

Major, J.: 2006, *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.* Nieopublikowana rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków.

Major, J., Powązka, Z.: 2012, Przyczynek do badań nad twórczą postawą studentów podczas rozwiązywania zadań matematycznych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 101–111.

Nowecki, B.: 1974, Przyczynek do badań nad rozumieniem przez uczniów tekstu matematycznego, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie* **54**, 65–111. (także w: Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 289–342).

Nowecki, B.: 1975, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów, *Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych PAN* **20**, 29–64. (także w: Żabowski J. (red.): 2001, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 227–271).

Nowecki, B.: 1977, Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich pojęć twierdzenia i dowodu, *Szkoła Dydaktyki Matematyki,* 53–67.

Ogiela, A.: 2009, *Kształtowanie i kontrola rozumienia pojęć geometrycznych.* IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.

Palimąka, K.: 2015, *Zadania niestandardowe w kształtowaniu pojęcia funkcji.* IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.

Parcia, K.: 2004, Prowadzenie rozumowań matematycznych a komputer – analiza pracy uczniów nad rozwiązywaniem pewnego zadania (fragment badań wstępnych), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 143–164.

Pardała, A., Uteeva, R. A., Ashirbayev, N. K.: 2015, Mathematical education in terms of innovative development, *The Mathematics Teaching Research Journal Online, Summer 2015,* **7**(4), 1–20. `http:\www.hostos.cuny.edu/mtrj`.

Pawlak, R.: 2001, Czy kalkulatory i komputery prowadzą do powstawania przeszkód epistemologicznych?, *Nauczyciele i matematyka* **40**, 26–28.

Polya, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, Wydaw. Naukowo - Techniczne, Warszawa.

Polya, G.: 1993, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Rabijewska, B.: 1994, Rozwiązywanie zadań w procesie nauczania, w: B. Rabijewska (red.), *Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 237–259.

Raport o stanie edukacji.: 2013, Instytut Badań Edukacyjnych.

Ratusiński, T.: 2001, The role of the computer in discovering mathematical theorems, *Acta Univ. Purkynianae Studia Mathematica* **72**, 67–80.

Ratusiński, T.: 2003a, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych. Nieopublikowana rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków.

Ratusiński, T.: 2003b, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 262–269.

Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., Orlando.

Sierpińska, A.: 1987, Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 103–153.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Słownik Języka Polskiego.: 2000, PWN, Warszawa.

Suder, A.: 2009, *Propozycja dydaktyczna wprowadzenia zagadnień związanych z Twierdzeniem Bolyaia-Gerwiena w szkole średniej.* IM UP, Kraków, praca magisterska pod kierunkiem T. Ratusińskiego.

Treliński, G.: 1998, *Aspekty dydaktyczne zadań matematycznych*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Jana Kochanowskiego, Kielce.

Treliński, G.: 2006, Trzy przykłady, czyli o stymulowaniu i pielęgnowaniu bezradności matematycznej, w: G. Treliński, M. Czajkowska (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Wojtuś, R.: 2007, Komputer w pozalekcyjnej pracy ucznia - fragment badań, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Didactica Mathematicae* **30**, 77–107.

Zaręba, L.: 2003, Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10–14 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 151–182.

Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków.

Zaręba, L.: 2015, Students' mathematical thinking specificity in the light of a study, *Mathematical Transgressions and Education*, Wydawnictwo Omega, 159–169.

Zielińska, G.: 2011, *Problem deficytu i nadmiaru zadań w zadaniach tekstowych.* IM UP, Kraków, praca dyplomowa pod kierunkiem J. Major.

Żeromska, A.: 1998, Postawy uczniów klas ósmych szkoły podstawowej wobec wybranych zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 89–112.

Żeromska, A.: 2004, O kategorii pojęciowej postawa na przykładzie postawy wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 197–253.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: jmajor@up.krakow.pl
e-mail: bpawlik@up.krakow.pl
e-mail: ratusita@up.krakow.pl
e-mail: lzareba@up.krakow.pl