FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Izabela Jóźwik, Małgorzata Terepeta

Symbolika matematyczna związana z pojęciem funkcji*

Abstract. Mathematical texts are characterised by the occurrence of specific symbols. They may be letters (as applied, for example, by Euclid), number symbols or graphic signs with context-independent meaning. Mathematical symbols store knowledge of previous generations that provides frameworks with which to examine history of mathematical problems. In this paper, we deal with symbols related to the concept of function and related concepts like limit, and some other set theoretical or logical concepts. We focus on symbols that have survived unchanged into the present day and are commonly used. In part, we rely on the well-known book by Florian Cajori, "History of Mathematical Notations", first published in 1928-1929. Since mathematical notation is still growing, we also present symbols emerged after [Cajori 1928-1929].

Wstęp

Jedną z charakterystycznych cech matematyki jest stosowanie symboli. Część z nich jest oznaczeniem literowym (takim, jakie stosował na przykład Euklides w swoich *Elementach* (Fitzpatrick, 2008); (Błaszczyk, Mrówka, 2013) lub ma charakter numeryczny (np. wszelkie znaki służące do oznaczania liczb). W niniejszej pracy pod pojęciem symbolu matematycznego będziemy rozumieć powszechnie stosowany i utrwalony znak graficzny, który zawiera w sobie pewien zasób wiedzy utrwalonej przez kilka generacji, zaś jego znaczenie nie zależy od kontekstu, w którym symbol ten się znajduje.

W pracy chcemy przedstawić symbole i pojęcia dotyczące funkcji lub blisko z nią związane (granica, pewne terminy z zakresu teorii zbiorów czy logiki). Skoncentrujemy się na tych symbolach, które w niezmienionej formie przetrwały do dziś i są stosowane na całym świecie. Część przedstawionych informacji nie jest nowa. Można je znaleźć w wielu opracowaniach, np. w klasycznej pracy Floriana

*Mathematical notation related to the concept of function

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 01A05; Secondary: 01A60

Key words and phrases: mathematical symbol, function, limit, q.e.d.

Cajori (Cajori, 1993). Przytaczamy je, aby dokładniej opisać, jak tworzyła się współczesna symbolika matematyczna oraz podkreślić, że jest ona żywym, ciągle rozwijającym się językiem. Wyżej wspomniana książka Cajori została po raz pierwszy wydana w 1929 roku i od tej pory powstało wiele nowych oznaczeń. Niektóre z nich przedstawimy w niniejszej pracy.

1. Funkcja

Według Youschkevitch (1976) rozwój pojęcia funkcji można podzielić na trzy etapy:

- starożytność, nie było wówczas formuł algebraicznych, dokładnych algorytmów, wyrażeń analitycznych; rozważano poszczególne przypadki zależności pewnych dwóch wielkości bez wprowadzenia ogólnego pojęcia zmiennej i funkcji,
- średniowiecze, w którym ogólne pojęcia zostały wyrażone nie poprzez wzór, ale poprzez słowny opis, wykres lub tablice, najczęściej w praktycznych zastosowaniach, np. w zagadnieniach geometrycznych i mechanicznych,
- okres od końca XVI wieku, gdy zaczęły przeważać analityczne sposoby przedstawiania funkcji (za pomocą sum nieskończonych szeregów potęgowych).

W Kleiner (1989) przedstawiony jest pogląd, że głównym powodem braku jasno sformułowanego pojęcia funkcji w starożytności i średniowieczu był przede wszystkim brak wymagań wstępnych oraz symboliki. Drugą przyczyną stanowił niedostatek motywacji wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć. Dopiero w wiekach XV-XVII doszło do takiego rozwoju matematyki, który okazał się fundamentalny dla wprowadzenia koncepcji funkcji. Wprowadzono w tym czasie liczby rzeczywiste i zespolone, powstawała symboliczna algebra (np. Viete, Kartezjusz), rozważania dotyczące ruchu stały się podstawowym elementem nauki (np. Kepler, Galileusz), doszło do połączenia algebry i geometrii (np. Fermat, Kartezjusz). Jednym z fundamentalnych dzieł tego okresu był traktat matematyczny *Geometria* Kartezjusza. Początkowo był on częścią rozprawy*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode* [1] wydanej w 1637 roku w Lejdzie. Dzieło zredagowane w języku francuskim nie osiągnęło wielkiego sukcesu. Dopiero oddzielenie *Geometrii* i opublikowanie jej w języku łacińskim w 1649 roku spotkało się z szerokim odzewem. Nowością tego dzieła było powiązanie krzywej z równaniem wielomianowym. Kartezjusz definiował krzywe jako zbiór przecięć dwóch poruszających się krzywych, a każdy punkt przecięcia opisywał równaniem $\varphi(x, y)$, przy czym zakładał, że na otrzymanej w ten sposób krzywej nie ma punktów innych, niż opisane tym równaniem. Mimo, że Kartezjusz powiązał ruch z równaniem algebraicznym, to nie widział związku między definicją krzywej (np. poprzez przecięcia krzywych lub za pomocą mezolabium) i jej równaniem. Jednakże po raz

[1] *Rozprawa o Metodzie, w celu prawidłowego kierowania swym rozumem i poszukiwania prawdy w naukach oraz Dioptryka, Meteory i Geometria, które są esejami tej Metody* (wg Błaszczyk, Mrówka, 2015)

pierwszy krzywą rozumiał nie jako linię ciągłą (tak, jak to było u starożytnych Greków) a jako obiekt złożony z punktów opisanych parą liczb (x, y).

Idee Kartezjusza były rozwijane przez wielu matematyków i stały się inspiracją do wprowadzenia pojęcia funkcji. Według Kleiner (1989) kluczowym momentem było wprowadzenie *zmiennej* i wyrażanie relacji pomiędzy zmiennymi za pomocą *równań*. Ponieważ nie było rozróżnienia pomiędzy *zmienną niezależną* a *zmienną zależną*, więc podawane równania nie były rozumiane jako funkcja, ale jako związek pomiędzy dwiema wielkościami tak, jak to przedstawiał Kartezjusz.

Wydaje się, że potrzeba zdefiniowania funkcji pojawiła się dopiero w XVII wieku. Wtedy dzięki dwóm matematykom: Gottfriedowi Wilhelmowi Leibnizowi (1646 - 1716) oraz Izaakowi Newtonowi (1642 - 1727) powstał dział matematyki, który dziś nazywamy *rachunkiem różniczkowym i całkowym* (polskie nazwy wprowadził Jan Śniadecki (1756 - 1830), na świecie w powszechnie używane są nazwy pochodzące od Leibniza: *calculi differentialis, calculi integralis*). Słowo *funkcja* pojawiło się po raz pierwszy w 1673 roku w pracy *Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus (Metoda stycznych odwrotna, czyli o funkcjach)* napisanej przez Leibniza (wg. Kline, 1972, s. 340). Leibniz stosował je mając na uwadze relacje między krzywymi oraz stycznymi. Uważał, że jest to wielkość, która spełnić szczególne zadanie. Kilka lat później, w 1694 roku w *Nova Calculi differentialis...* Leibniz (1694) Leibniz używał słowa funkcja definiując ją jako

> J'appelle fonction un segment de droite déterminable exclusivement à partir de droites menés entre un point fixe et un point donné de la courbe et de sa courbure[2].

W tym czasie znane już były pojęcia: stała, zmienna, współrzędna, parametr. Używano ich np. w de l'Hôpital (1696). W tym samym 1694 roku, Johann Bernoulli (1667 - 1748) w liście do Leibniza napisał, że funkcja to *ilość jakoś utworzona ze zmiennych i stałych*. Dopiero w 1698 roku, w innym liście do Leibniza, Johann Bernoulli pierwszy raz użył słowa funkcja w sensie analitycznym, tzn. opisał funkcję jako jedno wyrażenie złożone z liczb oraz działań arytmetycznych dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania, przy czym dopuszczone były szeregi nieskończone i granice. W 1718 roku Bernoulli próbował sprecyzować co należy rozumieć pod pojęciem funkcji. Uważał, że jest to związek pomiędzy dwiema wielkościami: zmienną i drugą, która wyraża jakąś zależność od tej pierwszej (Bernoulli, 1718, s. 108):

> On appele ici fonction d'une grandeur variable, une quantié composée de quelque maniére que ce soit de cette grandeur variable et de constantes[3].

Próby precyzyjnej definicji funkcji były podejmowane przez wielu matematyków i w 1779 roku, w angielskiej encyklopedii (*Chambers' Cyclopedia*) pojawiło się hasło:

---

[2]Funkcją nazywam część linii prostej, która jest odcinana prostymi liniami wyłącznie za pomocą ustalonego punktu oraz punktu krzywej, który jest dany wraz ze stopniem krzywizny. Wszystkie tłumaczenia, o ile nie jest inaczej zaznaczone, pochodzą od autorek artykułu.

[3]Funkcją wielkości zmiennej nazywa się wielkość liczbową zestawioną w dowolny sposób z owej wielkości zmiennej i stałych (tłum. Duda (2015)).

> The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities[4].

Leibniz i Bernoulli używali różnych oznaczeń na funkcję. Bernoulli oznaczał ją literą n, zaś zmienną literą z, potem funkcję literą X zaś zmienną ξ, zaś jej wartość dla tej zmiennej symbolem ξX. W 1697 roku napisał do Leibniza (wg. Cajori, 1993, vol. 2, s. 267):

> for denoting any function of a variable quantity x, I rather prefer to use the capital letter having the same name X or the Greek ξ, for it appears at once of what variable it is a function; this relieves the memory[5].

W odpowiedzi, Leibniz zauważył, że jeśli jest kilka funkcji zależnych od tego samego x, to można je dla ułatwienia ponumerować (wg. Cajori, 1993, vol. 2, s. 268). Od 1718 roku Bernoulli używał litery φ, aby oznaczyć funkcję, a jej wartość dla zmiennej z oznaczał φz. Aż do 1734 roku nie pisano argumentu funkcji w nawiasach, ani nie używano litery f jako nazwy funkcji. Dopiero w 1734 roku Leonhard Euler (1707–1783) wprowadził symbol $f(x)$, w swojej pracy (1740, s. 186, 187) napisał:

> Si $f(\frac{x}{a}+c)$ denotet functionem quamcunque ipsius $\frac{x}{a}+c$[6].

W tym samym czasie Alexis Claude de Clairault (lub Clairaut) (1713–1765) i Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) funkcje zmiennej x oznaczali przez Πx, Φx, φx lub Δx, bez nawiasów przy argumentach, zaś d'Alembert nawiasy zaczął stosować w swoich pracach dopiero w 1754 roku.

Oczywiście te oznaczenia nie od razu się przyjęły. Matematycy często stosowali swoje własne, ale coraz częściej w literaturze można było spotkać małą literę oznaczającą funkcję i w nawiasach jej argument. Natomiast nie zajmowano się zupełnie dziedziną funkcji (jako zbiorem) i zbiorem wartości funkcji. W 1888 roku Richard Dedekind (1831 – 1916) sformułował definicję funkcji jako „przekształcenie zbioru S w inny zbiór”. W „Abbildung einer Menge” Dedekind (1887, s. 10–11) napisał:

> Unter einer Abbildung φ einer Menge S wird Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ ubergeht[7],

[4]Termin funkcja jest stosowany w algebrze na wyrażenie analityczne złożone ze zmiennych, liczb lub stałych wielkości.

[5]aby oznaczyć dowolną funkcję zmiennej x, wolałbym używać wielkiej litery mającej tę samą nazwę X lub greckiej ξ, ponieważ od razu widać, co jest zmienną, a co funkcją; łatwiej jest to zapamiętać.

[6]$f(\frac{x}{a}+c)$ oznacza funkcję zależną od $\frac{x}{a}+c$.

[7]Przekształceniem φ na zbiorze S nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi tego zbioru pewnego obiektu, który będziemy nazywać obrazem s i oznaczać $\varphi(s)$; będziemy również mówili, że $\varphi(s)$ odpowiada elementowi s, tzn. $\varphi(s)$ generowany jest z s przez przekształcenie φ.

powoływał się przy tym na pracę Petera Gustava Lejeune Dirichleta (1805–1859) z roku 1879, do której napisał wstęp. Warto tu wspomnieć o funkcji nieciągłej w każdym punkcie, którą zawdzięczamy Dirichletowi: przyjmuje ona wartość c na zbiorze liczb wymiernych i wartość d na zbiorz liczb niewymiernych (Dirichlet, 1829, s. 10). Dedekind nie używa jeszcze pojęć *dziedzina, przeciwdziedzina*, ale wprowadza nazwę *obraz* (Bild), jako zbiór wszystkich wartości $\varphi(s)$ dla $s \in S$ i oznacza go przez $\varphi(S)$. Ponadto, posługuje sie także nazwami: *funkcja identycznościowa* (identysche Abbildung), *iniekcja* (iniektive Abbildung), *bijekcja* (bijektive Abbildung). Dedekind zdefiniował także złożenie funkcji, które przy podanych niżej oznaczeniach zapisywał w postaci $\psi \cdot \varphi$ lub $\psi\varphi$:

> Ist φ eine Abbildung einer Menge S, und ψ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus eine aus φ und ϕ zusammengesetzte Abbildung Θ von S, welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild $\Theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s))$ entspricht, wo wieder $\varphi(s) = s'$ gesetzt ist[8].

Warto zauważyć, że Dedekind wiedział, iż kolejność złożenia jest istotna i złożenie funkcji w odwrotnej kolejności nie musi istnieć (Dedekind, 1887, s. 11).

W czasach Dedekinda nie używano jeszcze symbolu strzałki. Aby podkreślić fakt, że funkcja f działa ze zbioru X w zbiór Y najczęściej pisano wówczas $f(X) \subset Y$. Dopiero w 1939 roku członkowie grupy Nicolas Bourbaki[9] po raz pierwszy zastosowali oznaczenie: $x \to f(x)$ (1939, s. 4), zaś rok później, w 1940 roku Witold Hurewicz (1904–1956) wprowadził strzałkę $\to$ jako przyporządkowanie zbiorów X i Y za pomocą funkcji f i napisał $f\colon X \to Y$ (1940, s. 61). Można uznać, że od tego momentu zapis ten zaczął się upowszechniać, chociaż początkowo w książkach i artykułach dodawano wytłumaczenie, jak należy go rozumieć. Jeszcze w 1971 roku Saunders Mc Lane (1909–2005), w swojej książce *Categories for the working mathematician* (1971, s. 10), pisał:

> Each arrow $f\colon X \to Y$ represents a function; that is, a set X, a set Y and a rule $x \mapsto fx$ which assigns to each element $x \in X$ an element $fx \in Y$; whenewer possible we write fx and not $f(x)$ omitting unnecessary parentheses[10].

Na stronie 29 tej samej książki dodał:

> The fundamental idea of representing a function by an arrow first appeared in topology about 1940, probably in papers or lectures by W. Hurewicz [...]. His initiative immediately attracted the attention of R.

[8] Jeżeli φ odwzorowuje element s zbioru S, zaś ψ jest przekształceniem obrazu $S' = \varphi(S)$, to na zbiorze S tworzy się z funkcji φ i ψ złożenie Θ, które jest obrazem elementu s z S $\Theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s))$, gdzie $\varphi(s) = s'$.

[9] Stowarzyszenie Nicolas Bourbaki powstało w 1935 roku i należeli do niego m.in. Henri Cartan, René de Possel, Jean Dieudonné, André Weil, Claude Chevalley oraz Szolem Mandelbrojt. Zadaniem stowarzyszenia było przedstawianie stanu ówczesnej wiedzy matematycznej w sposób jak najbardziej usystematyzowany i precyzyjny.

[10] Każda strzałka $f\colon X \to Y$ oznacza funkcję; to znaczy zbiór X, zbiór Y oraz przekształcenie $x \mapsto fx$, które przyporządkowuje dowolnemu elementowi $x \in X$ pewien element $fx \in Y$; jeśli to możliwe, będziemy pomijać zbędne nawiasy i pisać f zamiast $f(x)$.

> H. Fox and N. E. Steenrod, whose paper used arrows [...]. The arrow $f : X \to Y$ rapidly displaced the occasional notation $f(X) \subset Y$ for a function[11].

2. Granica

Pojęcie funkcji ewoluowało, pojawiały się nowe idee z nim związane, np. *funkcja ciągła*. Ciągłość funkcji obecnie ściśle wiąże się z pojęciem *granicy*. Intuicyjne rozumienie granicy i działań na zerze (włącznie z dzieleniem) było widoczne już w XII wieku w pracach Bhaskara (1114–1185), np. w napisanej w 1150 roku książce *Lilavati*. Ponieważ wiązało się to z wielkościami nieskończenie małymi lub nieskończenie dużymi i wieloma paradoksami z tym związanymi, długo nie było ani definicji granicy, ani definicji funkcji ciągłej.

Pierwsza definicja granicy pojawiła się w 1784 roku, gdy Akademia w Berlinie ogłosiła konkurs na *jasną i dokładną teorię nieskończoności w matematyce*, rozumiejąc przez to przede wszystkim wielkości nieskończenie małe. Nagrodę zdobył Simon l'Huillier (1750–1840), matematyk szwajcarski, który w swojej pracy (l'Huilier, 1786, s. 7) nawiązał do wcześniejszej koncepcji granicy według d'Alemberta i wprowadził następującą definicję:

> Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée, mis qui puisse différer de cette derniére moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette quantité constante est dite la limite en grandeur ou en petitesse de la quantité variable[12].

Granicę oznaczył symbolem $\lim.$ (od łacińskiego limes czyli granica), przy czym stosowany przez niego zapis $\lim.q : Q$ oznaczał we współczesnej symbolice $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = Q$.

Oznaczenie wprowadzone przez l'Huilliera było używane np. przez Augustina Louisa Cauchy'ego (1789–1857). W 1821 roku w następujący sposób opisał on wielkość nieskończenie małą oraz granicę funkcji (Cauchy, 1853, s. 4):

> Lorsque les valeurs numériques successives d'une méme variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite une variable de cette espèce a zéro pour limite[13].

---

[11] Fundamentalna idea, aby funkcję zapisywać za pomocą strzałki, po raz pierwszy pojawiła się około 1940 roku, prawdopodobnie w artykułach lub wykładach W. Hurewicza [...]. Jego pomysł natychmiast przyciągnął uwagę R. H. Foxa oraz N. E. Steenroda, w których pracach strzałka została użyta [...]. Strzałka $f : X \to Y$ szybko zastąpiła sporadycznie stosowaną notację $f(X) \subset Y$ używaną dla funkcji.

[12] Niech dana zmienna będzie zawsze mniejsza lub większa niż podana stała wielkość, przy czym ta zmienna może różnić się od tej ostatniej o jakąkolwiek ilość mniejszą niż zaproponowana, to wówczas tę stałą wielkość nazywamy granicą wielkości lub małości zmiennej.

[13] Kiedy wartość liczbowa zmiennej nieskończenie maleje, albo spada poniżej dowolnej liczby, to wielkość zmienna staje się nieskończenie mała i jej wartość maleje nieskończenie w taki sposób, że jest zbieżna do granicy 0.

> Lorsque les valeurs successivement attribuées à une méme variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de maniére à finir par en differer aussi peu que l'on voudra, cette derniére est appelée la limite de toutes les autres[14].

i dodał, że symbol $\lim .$ oznacza jej wartość. Cauchy (1821, s. 14) nie znał granic jednostronnych, ale zauważył, że gdy x dąży do zera, to $\lim .(\sin .x)$ ma wartość 0, $\lim .\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ przyjmuje 2 wartości, zaś $\lim .\left((\sin .\frac{1}{x})\right)$ ma nieskończenie wiele wartości (podwójnym nawiasem podkreślał fakt istnienia więcej niż jednej wartości danej granicy). Wykorzystując pojęcie granicy Cauchy przedstawił także np. definicję ciągłości funkcji (1853, s. 32)

> Une fonction u de la variable réelle x sera continue, entre deux données de x, si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermediaire de x une valeur unique at finie, un accroissement infiniment petit attribue a la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-meme[15].

Definicje używane przez Cauchy'ego są bliskie współczesnym ujęciom analizy, ale nie były jednak dostatecznie precyzyjne, bo prowadziły czasem do niejasności i błędów, np. Cauchy twierdził, że suma zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą i długo nie mógł zrozumieć, skąd bierze się jego błąd. Powszechnie uważa się, że Cauchy zmodyfikował swoje twierdzenie, pokazując, że jest ono prawdziwe przy założeniu dodatkowego warunku, który później został nazwany zbieżnością jednostajną i do dzisiaj odgrywa dużą rolę w analizie matematycznej. Jednakże praca Bascelli i jej współpracownicy (2016) wskazuje, że Cauchy nie rozróżniał ciągłości punktowej i jednostajnej, podobnie nie widział różnicy pomiędzy zbieżnością punktową i jednostajną.

Symbol lim bez kropki wprowadził w 1841 roku Karl Weierstrass (1815–1897) w pracy, która została opublikowana dopiero w roku (1894, s. 86). Prawdopodobnie dlatego symbol $\lim .$ był w ciągłym użyciu.

W XIX wieku zauważono potrzebę wprowadzenia oznaczenia granicy funkcji (ciągu), gdy jej argument dąży do liczby innej niż zero. Wprowadzono symbol $\lim\limits_{x=a}$ oznaczający granicę, *gdy x dąży do a*. W polskiej literaturze to oznaczenie można znaleźć jeszcze w wydanej w 1948 roku w książce Kazimierza Kuratowskiego (1896–1980) *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*.

W 1837 roku Dirichlet stosował już granice jednostronne, pisząc $\lim\limits_{x=a+0}$, aby podkreślić, że badamy granicę dla x dążących do a poprzez liczby większe od a oraz $\lim\limits_{x=a-0}$, gdy x dąży do a poprzez liczby mniejsze od a. We wspomnianej książce Kuratowskiego ten zapis także jest stosowany.

Strzałkę $\rightarrow$ w symbolu granicy wprowadzono dopiero w 1905 roku (Leathem, 1905, s. 11), żeby podkreślić ciągłą zmianę argumentu, i od tej pory coraz częściej

[14] Kiedy wartości sukcesywnie przypisywane jakiejś zmiennej zbliżają się nieskończenie do stałej wartości, różniąc się w końcu od niej tak mało, jak się chce, to nazywa się ona granicą ich wszystkich (tłum. (Duda, 2015)).

[15] Funkcja u pozostaje ciągła względem x między danymi granicami, jeśli między tymi granicami nieskończenie mały przyrost zmiennej x zawsze powoduje nieskończenie mały przyrost samej funkcji (tłum. (Duda, 2015)).

można spotkać $\lim\limits_{x\to a}$ zamiast $\lim\limits_{x=a}$. Warto zauważyć, że Leathem rozważał nie tylko granice w punkcie, ale także granice jednostronne (nie stosował jednak w tym przypadku dodatkowej symboliki (Leathem, 1905, s. 42) oraz granice w ∞ (Leathem, 1905, s. 37).

W 1887 roku pojawiły się granice górna i dolna funkcji oznaczane symbolami $\limsup\limits_{v=\infty}$ oraz $\liminf\limits_{v=\infty}$, później Alfred Pringsheim (1850–1941) wprowadził $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}}\, a_v = A$ oraz $\underline{\lim\limits_{v\to\infty}}\, a_v = a$, a także $\overline{\underline{\lim\limits_{v\to\infty}}}$, aby czytelnik mógł rozważać albo górną albo dolną granicę (1916, s. 294, 338).

3. Logika i teoria zbiorów a rozwój pojęcia funkcji

Rozwój teorii związanej z funkcjami wymagał nowej wiedzy oraz symboliki. Funkcje przestawały być tylko geometrycznym opisem lub analitycznym wyrażeniem. Pojawiły się tzw. *monster functions* (funkcje nieciągłe w każdym punkcie, nigdzie nieróżniczkowalne itp.), które były sprzeczne z matematyczną intuicją. Funkcje stawały się obiektami abstrakcyjnymi, wymagającymi narzędzi, które w prosty i precyzyjny sposób pozwoliłyby je opisać i interpretować tak, aby nie prowadziło to do nieporozumień i sprzeczności. Potrzebny był język matematyczny, który pozwoliłby na przejście od rzeczywistości praktycznej do teoretycznej, zajmującej się modelami matematycznymi znajdującymi się w dowolnym uniwersum. Rozwój logiki matematycznej i teorii zbiorów przyczynił się do szybszego rozwoju pojęcia funkcji i rozszerzenia go do dowolnego przekształcenia pomiędzy zbiorami.

Logika, jako nauka o sposobach jasnego i ścisłego formułowania myśli i o regułach poprawnego rozumowania, pojawiła się w filozofii ponad 2000 lat temu. Logika matematyczna (często nazywana logiką symboliczną lub metamatematyką), jako dział matematyki, wyodrębniła się dopiero na przełomie XIX i XX wieku, ale wiele pojęć i symboli pojawiło się znacznie wcześniej. Już Arystoteles (384–322 p.n.e) podał pierwsze reguły wnioskowania, sformułował zasady poprawnego formułowania i dowodzenia twierdzeń, wprowadził pierwsze symbole logiczne. Nazwa logika matematyczna została użyta po raz pierwszy przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano (1858–1932). Za pioniera logiki symbolicznej uważa się Leibniza, chociaż pewne skróty, symbole były stosowane wcześniej: Pierre Hérigone (1580–1643) pisał np. *hyp.* zamiast *to wynika z hipotezy*, *constr.* zamiast *z konstrukcji otrzymujemy*, zaś *20.1* oznaczało *z twierdzenia 20 z pierwszej książki mamy.* W 1659 roku Johann Rahn (1622–1676) wprowadził symbole $\therefore$ oraz $\because$ oba oznaczające *zatem*, ale większość matematyków stosowała pierwszy w podanym znaczeniu, drugi zostawiając dla słowa *ponieważ* (Cajori, 1993, vol. 2, s. 282). Obecnie nie stosuje się jednak żadnego z tych symboli i najczęściej piszemy słowami.

Gwałtowny rozwój symboli używanych obecnie w logice i teorii zbiorów miał miejsce w latach 1880-1920, głównie za sprawą Ernsta Schrödera (1841–1902), Giuseppe Peano, Alfreda North Whiteheada (1861–1947) oraz Bertranda Russella (1872–1970). Twierdzenia związane z funkcjami (np. działania na obrazach i przeciwobrazach funkcji) wymagały stosowania m.in. znaków sumy mnogościowej, iloczynu mnogościowego, zawierania zbiorów. Matematycy używali najczęściej + oraz · zarówno w działaniach mnogościowych, jak arytmetycznych, często opuszczając kropkę przy iloczynie, tak jak robił Leibniz. Natomiast Dedekind w pracy (1887, s. 1) używał oznaczeń: $\mathfrak{M}, \mathfrak{G}, 3$ w znaczeniu suma, iloczyn, zawieranie. Według Cajori (1993, vol. 2, s. 294), już rok później, w pracy Peano (1888) można znaleźć symbole, które są obecnie w powszechnym użyciu: $\cup$ i $\cap$. Ponieważ było kilka wydań tej pracy, będziemy dalej powoływać się na dostępne wydanie z roku 1901, Peano wprowadził także symbole $\bigcup$ oraz $\bigcap$ na działania większej ilości elementów (1908), ale wówczas ich kształt był bardziej zbliżony do półksiężyca. Jednakże jeszcze bardzo długo funkcjonowały także znaki $\sum$ (wprowadzony przez Eulera w 1755 roku) oraz $\prod$ (który od 1812 roku zawdzięczamy Carlowi Friedrichowi Gaussowi (1777–1855)), które możemy znaleźć chociażby w książce *Funkcje analityczne* z 1948 roku autorstwa Stanisława Saksa (1897–1942) i Antoniego Zygmunda (1900–1992). W 1897 roku w *Formulaire de mathématiques* Peano jako pierwszy zastosował ε jako symbol przynależności do zbioru (Peano, 1901, s. 1). Zauważmy, że jest to odwrócony znak stosowany przez Dedekinda. Obecnie stosowany symbol $\in$ przypisuje się Russelowi. Symbole zawierania $\subset$ oraz $\supset$ zostały wprowadzone przez Ernsta Schrödera (1890, s. 72). Wcześniej, np. Leibniz proponował symbol ∞ na zawieranie zbioru, pisząc: jeśli cały A jest w B, to $AB \infty A$, jeśli część A nie jest w B, to AB nie ∞A (Cajori, 1993, vol. 2, s. 285). Używane były także symbole $<, >$ oraz c, $\supset$ (np. przez Peano).

Pisząc o teorii zbiorów, nie sposób pominąć Georga Cantora (1845–1918). Niewątpliwie, wniósł on ogromny wkład w rozwój tej tematyki, symboliki i nazewnictwa w niej stosowanej. W pracy (1877, s. 242-258) Cantor użył po raz pierwszy nawiasów klamrowych na oznaczenie zbioru $\{a, b\}$, ale zapis ten nie oznaczał zbioru dwuelementowego. Podobnie $M = \{m\}$ nie był zbiorem jednoelementowym, ale zbiorem, którego elementy Cantor oznaczał literą m. Oznaczenie $\{a\}$ na zbiór jednoelementowy i $\{a, b\}$ na zbiór dwuelementowy, w znaczeniu współczesnym, wprowadził Ernst Zermelo (1871–1953) w 1908 roku (1908, s. 263).

Jedna z podstawowych liczb kardynalnych $\aleph_0$, związana z licznością zbiorów przeliczalnych, swoją nazwę i symbol zawdzięcza także Cantorowi. Oznaczenie $\aleph_0$ zostało wprowadzone około 1893 roku, ale stało się znane i powszechnie używane po 1895 roku, po opublikowaniu przez Cantora (1895, s. 488). Georg Cantor wprowadził także do teorii zbiorów pojęcia: *punkt skupienia, zbiór domknięty, zbiór doskonały, zbiór gęsty*. Ponadto, w 1883 roku precyzyjnie opisał zbiór, zwany obecnie *zbiorem Cantora*, którego nieco inną wersję skonstruował w 1875 roku Henry Smith (1826–1883).

Niedługo po wprowadzeniu symboli związanych z rachunkiem zbiorów pojawiły się kwantyfikatory w takiej postaci, jakiej używamy obecnie. Brak kwantyfikatorów i zauważenie, że ich kolejność ma istotne znaczenie, były przyczyną wspomnianego wcześniej błędu Cauchy'ego dotyczącego zbieżności szeregów funkcji ciągłych. Kwantyfikator szczegółowy $\exists$ można znaleźć już w 1897 roku w pracy Peano (1901), aczkolwiek podobno stosował go wcześniej także Russell. Na kwantyfikator ogólny $\forall$ trzeba było poczekać aż do 1935 roku (Gentzen, 1935, s. 178). Gerard Gentzen (1909–1945) wykorzystał odwróconą literę A występującą w wyrażeniu *All-Zeichen* wzorując się na odwróconym E ze słowa *Exists*. Twierdził, że symbol $\exists$, którego także używał, użyczył sobie od Russella. Wcześniej stosowano kwantyfikatory w postaci: $\bigvee$, $\bigwedge$ (w dalszym ciągu używane w polskich szkołach średnich) lub $\sum$, $\prod$ (możemy je spotkać w pierwszych wydaniach książek Kuratowskiego, Sikorskiego).

Początkowo symbol negacji miał postać ~ i był stosowany od 1897 roku przez Peano. Obecnie częściej spotkać można symbol ¬ wprowadzony w 1930 roku przez Arenda Heytinga (1898–1980), zawarł to swojej w pracy (1930, s. 43).

XX wiek nie zakończył ery symbolizmu w matematyce. Matematyka jako żywy język rozwijała się dalej i coraz częściej symbole, które wówczas wprowadzono, przyjęły się na stałe we współczesnej matematyce. Najwięcej reguł i symboli logicznych wprowadzonych zostało przez Bertranda Russela w pracach: *The Theory of Implication* (1906), *Mathematical logic as based on the theory of types* (1908) oraz wspólnej pracy z Alfredem North Whiteheadem *Principia Mathematica* (1910).Pojawiły się tam: znany już wcześniej symbol negacji $\sim p$, symbol logiczny ∨ oznaczający, że przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe, symbol $p.q$ oznaczający, że oba zdania p i q są prawdziwe, symbol implikacji $p)q$ rozumiany obecnie jako $\sim p \vee q$ oraz symbol równoważności ≡. Współczesny symbol koniunkcji ∧ pojawił się pierwszy raz w 1930 roku we wspomnianej wyżej pracy Arenda Heytinga.

Wiele współczesnych symboli zawdzięczamy grupie Nicolas Bourbaki. W 1939 roku grupa rozpoczęła wydawanie serii książek pod wspólnym tytułem *Éléments de mathématique*. W tomie *Theorie de ensembles* możemy znaleźć symbol nienależenia do zbioru ∉, symbol zbioru pustego ∅ (wcześniej najczęściej używano zera lub $\{\}$), a także współcześnie używane oznaczenie implikacji ⇒ oraz równoważności ⇔. Wcześniej implikacje opisywano słowami (np. Dedekind), potem używano pojedynczych strzałek: symbol implikacji → wprowadził w 1922 roku David Hilbert (1862–1943), zaś równoważność ↔ pierwszy raz pojawiła się w 1933 roku w pracy Albrechta Beckera.

Obecnie, gdy opisujemy funkcję, jej dziedzinę, zbiór wartości, jej własności, wszystkie powyższe symbole są powszechnie używane i uważane za oczywiste.

4. Zakończenie twierdzeń

Szybki rozwój matematyki w XX wieku, rozwój symboliki, tej związanej z pojęciem funkcji, jak też występującej w innych działach matematyki, pociągnął za sobą również potrzebę używania wygodnych, krótkich, jednoznacznych znaków kończących daną myśl lub dowód twierdzenia. Nie była to nowa idea. Już Euklides i Archimedes kończyli swoje dowody zwrotem ὅπερ ἔδει δεῖξαι (hoper edei deixai), którego łaciński odpowiednik Q.E.D (*quod erat demonstrandum*, czyli *co było do pokazania*) stosowany jest do dziś. W *Elementach* Euklidesa (Fitzpatrick, 2008) możemy znaleźć także zwrot ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (hoper edei poiesai). Euklides stosował go na zakończenie zadań konstrukcyjnych. Jego łaciński odpowiednik Q.E.F. (quod erat faciendum oznaczający *co należało zrobić*) obecnie nie jest już używany. Współczesny symbol kończący twierdzenia został wprowadzony dopiero w 1950 roku. Paul Halmos (1916 - 2006) w książce *Measure Theory* (1974, s. vi) napisał:

> The symbol ∎ is used through the entire book in place of such phrase as „Q.E.D." or „This completes the proof of the theorem" to signal the end of a proof[16].

Znak ten został nazwany *halmos* na cześć jego twórcy. Halmos przyznał, że pomysł ten zaczerpnął z popularnych tygodników, gdzie stosowano różnego rodzaju oznaczenie (kwadrat, prostokąt, trójkąt) na zakończenie felietonu, artykułu czy wywiadu. Obecnie najczęściej możemy spotkać zakończenie dowodu za pomocą pełnego lub pustego kwadratu: $\blacksquare$ lub $\square$. Halmos był także pierwszym matematykiem, który zastosował skrót *iff* zamiast zwrotu *if and only if.* W języku polskim próbowano wprowadzić analogiczny skrót *gddy* zamiast *wtedy i tylko wtedy, gdy*, ale nie zdobył on takiej popularności, jak angielskie *iff.* Najprawdopodobniej przyczyną tego jest publikowanie matematycznych prac naukowych przeważnie w języku angielskim. Na ostatniej stronie autobiografii, Paul R. Halmos (1985) pisze, że nie on jest pomysłodawcą tego skrótu oraz przedstawia inspirację do wprowadzenia *halmosa*:

> My most nearly immortal contributions are an abbreviation and a typographical symbol. I invented "iff", for "if and only if" - but I could never believe that I was really its first inventor.[. . .] The symbol is definitely not my invention - it appeared in popular magazines (not mathematical ones) before I adopted it but, once again, I seem to have introduced it into mathematics. It is the symbol that sometimes looks like ∎, and is used to indicate an end, usually the end of a proof. It is most frequently called the "tombstone", but at least one generous author referred to it as the "halmos"[17].

Pomimo tego, że Halmos uważał, że nie on jest twórcą skrótu *iff*, jemu przypisuje się pojawienie tego zwrotu. Taką sugestię możemy znaleźć np. w książce Johna L. Kelleya (1916–1999) *General topology* (Kelley, 1955, s. vi):

> I employ two special conventions. In some cases where mathematical content requires „if and only if" and euphony demands something less I use Halmos' „iff". The end of each proof is signalized by ∎. This notation is also due to Halmos[18].

[16] Aby zasygnalizować koniec twierdzenia, zamiast wyrażeń takich jak „Q.E.D." lub „Co kończy dowód twierdzenia", w książce stosowany jest symbol ∎.

[17] Moją prawie nieśmiertelną zasługą jest skrót i znak typograficzny. Wymyśliłem "iff" w miejsce "if and only if" - ale nigdy nie uwierzę, że byłem rzeczywiście pierwszym jego twórcą. [...] Symbol z pewnością nie jest moim wynalazkiem - zanim go zastosowałem, pojawił się w popularnych czasopismach (nie matematycznych), ale, jeszcze raz, wydaje się, że byłem pierwszą osobą, która wprowadziła go do matematyki. Ten symbol wygląda czasami jak ∎ i jest stosowany, żeby zasygnalizować koniec, zazwyczaj koniec twierdzenia. Najczęściej określany jest słowem „nagrobek", ale przynajmniej jeden wspaniałomyślny autor nazwał go „halmos".

[18] Będę stosować dwie szczególne konwencje. W pewnych przypadkach, gdy w treści matematycznej jest „if and only if", zaś eufonia wymaga czegoś mniejszego, będę używał „iff" Halmosa. Zakończenie każdego dowodu będzie sygnalizowane przez ∎. Ten zapis także zawdzięczamy Halmosowi.

Literatura

Bascelli, T., Błaszczyk, P., Borovik, A., Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M. G., Kutateladze, S. S., McGaffey, T., Schaps, D. M., Sherry, D.: 2016, Cauchy's infinitesimals, his sum theorem and fundational paradigms, *HOPOS* **6**(1), 117–147.

Becker, A.: 1933, *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse Eine Logisch-Philologische Untersuchung der Kapitel 13-22 von Aristoteles' Analytica Priora I*, Junker Und Dünnhaupt, Berlin.

Bernoulli, J.: 1718, *Remarques Sur ce qu'on a donné jusqu'icide de solutions des Problémes sur les Isoperimétres; avec une nouvelle methode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi á d'autres Problémes qui ont raport á ceux-lá*, Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Paris.

Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2013, *Euklides Elementy. Księgi* V-VI *teoria proporcji i podobieństwa*, Copernicus Center Press, Kraków.

Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2015, *Kartezjusz, Geometria*, Wydawnictwo Universitas, Kraków.

Bourbaki, N.: 1939, Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire), *Archives Bourbaki,* **Ch. I et II (état 2)**.

Cajori, F.: 1993, *A History of Mathematical Notations. Two Volumes Bound as One. Volume I: Notations in Elementary Mathematics. Volume II: Notations Mainly in Higher Mathematics*, Dover, New York, Reprint of works originally published in 1928 and 1929 by The Open Court Publishing Company, Chicago.

Cantor, G.: 1877, Ein Beitrag zur Mannifaltigkeitslehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84**, 242–258.

Cantor, G.: 1895, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Contributions to the Foundation of Transfinite Set Theory), *Mathematische Annalen* **46**.

Cauchy, A. L.: 1821, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, De L'imprimerie Royale, Paris.

Cauchy, A. L.: 1853, *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réele ou imaginaire, entre des limites données, Oeuvres complètes*, Vol. 12, Series 1, Gauthier-Villars, Paris.

de l'Hôpital, G.: 1696, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris.

Dedekind, R.: 1887, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Dirichlet, P. G. L.: 1829, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **4**, 157–169.

Duda, R.: 2015, Matematyka a dzieje myśli. `http://jaszczur.czn.uj.edu.pl/course/view.php?id=150`.

Euler, L.: 1740, Infinitis curvis eiusdem generis, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae ad annos 1734-1735* **VII**, 184–200.

Fitzpatrick, R.: 2008, Euclid's elements of geometry. `http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf`.

Gentzen, G.: 1935, Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210.

Halmos, P. R.: 1974, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York.

Halmos, P. R.: 1985, *I Want to be a Mathematician: An Automathography*, Springer-Verlag, New York.

Heyting, A.: 1930, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse,* 42–65.

Hurewicz, W.: 1940, On duality theorems, *Bulletin of the American Mathematical Society* **47**, 562–563.

Kelley, J. L.: 1991, *General topology, Graduate Texts in Mathematics 27*, reprint of the 1955 ed. published by Van Nostrand, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, New York.

Kleiner, I.: 1989, Evolution of the function concept: A brief survey, *The College Mathematics Journal* **20**(4), 282–300.

Kline, M.: 1972, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times*, 3 Volumes in a Single Book, Oxford University Press, New York.

Leathem, J. G.: 1905, *Volume and Surface Integrals Used in Physics*, University Press, Cambridge.

Leibniz, G.: 1694, Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione, *Acta Eruditorum* **13**, 311–316.

l'Huilier, S. A. J.: 1786, *Exposition élḿentaire des principes des calculs supŕieurs*, Decker, Berlin.

Mc Lane, S.: 1971, *Categories for the working mathematician*, Springer, New York.

Peano, G.: 1888, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Fratelli Bocca Editori, Torino.

Peano, G.: 1901, *Formulaire de mathématiques*, Vol. 6, Révue des Mathématique, Torino.

Pringsheim, A.: 1916, *Vorlesungen über Zahlen - und Funktionenlehre*, Teubner, Leipzig.

Russell, B.: 1906, The theory of implication, *American Journal of Mathematics* **28**(2), 159–202.

Russell, B.: 1908, Mathematical logic as based on the theory of types, *American Journal of Mathematics* **30**(3), 222–262.

Schröder, E.: 1890, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Vol. 1, Teubner, Leipzig.

Weierstrass, K.: 1894, *Matchematiche Werke, Band I*, Mayer & Müller, Berlin.

Whitehead, A. N., Russell, B.: 1910, *Principia Mathematica, vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge.

Youschkevitch, A. P.: 1976, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences 27.IX* **16**(1), 37–85.

Zermelo, E.: 1908, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **65**, 261–281.

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki
Politechnika Łódzka
al. Politechniki 11
PL-90-924 Łódź
e-mail ijozwik@p.lodz.pl
e-mail terepeta@p.lodz.pl