FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Edyta Fidyk, Stanisław Siudut

Propozycja wyzwalania twórczości matematycznej studentów przy pomocy pewnej nierówności funkcyjnej*

Abstract. T. Szostok and Sz. Wąsowicz in (Szostok, Wąsowicz, 2011) studied the following functional inequality: $|F(y) - F(x) - (y-x) f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon$ stemming from the Lagrange mean value theorem. They proved that the functon f is affine, provided $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfy the above inequality for all $x, y \in \mathbb{R}$. The aim of our paper is to extend the results of (Szostok, Wąsowicz, 2011) to more general situations (for example, we change $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$).

Tomasz Szostok i Szymon Wąsowicz w pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) rozważali następującą nierówność funkcyjną, wywodzącą się z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$|F(y) - F(x) - (y-x) f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \tag{1}$$

dla funkcji $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i udowodnili następujące twierdzenie (Szostok, Wąsowicz, 2011, Th. 3.2):

Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = cx + b$ $(x \in \mathbb{R})$.

Następujący lemat jest kluczowy w dowodzie powyższego twierdzenia Lemma 2.1 (zob. Szostok, Wąsowicz, 2011):

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $h > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{R}$.

Te i inne wyniki z artykułu (Szostok, Wąsowicz, 2011) nadają się bardzo dobrze do stymulowania twórczości matematycznej studentów. Postawiłem Pani Edycie Fidyk następujące zadanie: uzupełnić i uogólnić wyniki z pracy (Szostok, Wąsowicz, 2011) na przypadek funkcji zespolonych. Realizując to zadanie E. Fidyk

*Proposition of triggering of mathematical creativity of students by a functional inequality

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 39B82; Secondary: 39B62

Key words and phrases: nierówność funkcyjna, równanie funkcyjne, $\mathbb{H}$, algebra unormowana

w swojej pracy magisterskiej (2014) zauważyła najpierw, że w przypadku rzeczywistym, jeśli $h < 0$, to $|\Delta_h^2 f(x)| = |\Delta_{|h|}^2 f(x - 2|h|)|$. Dlatego założenie $h > M$ w powyższym lemacie można zastąpić założeniem $|h| > M$, tak zmieniony lemat jest równoważny lematowi wypisanemu powyżej.

Ta obserwacja pozwala na uogólnienie lematu 2.1 i twierdzenia 3.2 zawartych w artykule Szostok, Wąsowicz (2011) na funkcje określone w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i przyjmujące wartości w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na przykład, jeżeli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, to lematowi można nadać postać:

Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \varepsilon > 0, M > 0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)| \leq \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{C}$ i h takich, że $|h| > M$ to $|\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x, h \in \mathbb{C}$.

Lemat ten udowodniła Fiduk (2014) (dowód wykorzystuje własności modułu i jest zbliżony do dowodu lematu 2.1 z artykułu Szostok, Wąsowicz (2011)) i korzystając z niego wykazano następujące:

Twierdzenie 1 (Fidyk, 2014, tw. 3.2')
Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b\ (x \in \mathbb{C})$.

W swojej pracy magisterskiej E. Fidyk wykazała dwa inne twierdzenia tego typu (2014, tw. 3.2" i tw. 3.2" '), które można wypowiedzieć następująco:

Twierdzenie 2
Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich x, $y \in \mathbb{C}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to f jest funkcją stałą.

Twierdzenie 3
Jeżeli funkcje $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c, b \in \mathbb{C}$ dla których $f(x) = cx + b\ (x \in \mathbb{R})$.

Korzystając z tak uogólnionych wyników E. Fidyk wyciągnęła wnioski dla równania funkcyjnego $F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Przypomnijmy, że J. Aczèl (1985) wykazał , że jeżeli $\mathbb{K}$ jest ciałem o charakterystyce różnej od 2, to ogólnymi rozwiązaniami równania $\frac{f(x)-g(y)}{x-y} = h(x+y) \quad (x \neq y,\ f, g, h : \mathbb{K} \to \mathbb{K})$ są funkcje $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c,\ h(x) = ax + b$, gdzie a, b, c są dowolnymi stałymi z ciała $\mathbb{K}$. Stąd wynika, że wszystkie rozwiązania $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania:

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

są postaci: $F(t) = at^2 + bt + c, f(t) = 2at + b$, gdzie a, b, c są stałymi rzeczywistymi.

E. Fidyk osiągnęła ten wynik inną metodą niż J. Aczèl - zauważyła, że twierdzenia 1, 2, 3 pozwalają w pełni opisać rozwiązania równania (2) dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ z wartościami w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Dla przykładu, rozważmy równanie (2) dla funkcji zespolonych F, f określonych na $\mathbb{C}$.

Jeśli funkcje $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ spełniają to równanie, to oczywiście $|F(y)-F(x)-(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)|\leq\varepsilon$ dla każdego $\varepsilon>0$. Stąd i z twierdzenia 1 $f(x)=cx+b$, dlatego (2) przyjmuje postać:

$$F(y)-F(x)=(y-x)\left(c\cdot\frac{x+y}{2}+b\right)$$

Po podstawieniu $x=0$ otrzymujemy $F(y)=\frac{1}{2}cy^2+by+F(0)$ i dla $\alpha=\frac{1}{2}c,\beta=b$, $\gamma=F(0)$ mamy $F(y)=\alpha y^2+\beta y+\gamma,\ f(y)=2\alpha y+\beta$.

Rozumując, podobnie z wykorzystaniem twierdzenia 2 dochodzimy do wniosku, że funkcje $f,F:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ spełniające (2) muszą być stałe.

Zaprezentowane wyżej wyniki Fidyk zachęciły do dalszego badania nierówności (1) i pewnych uogólnień tej nierówności. Najpierw zaobserwowałem, że kluczowy lemat jest prawdziwy dla funkcji F, $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza algebrę kwaternionów, a mianowicie:

Niech $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $\varepsilon>0$, $M>0$. Jeżeli nierówność $|\Delta_h^2 f(x)|\leq\varepsilon$ jst spełniona dla wszystkich $x\in\mathbb{H}$ i h takich, że $|h|>M$ to $|\Delta_h^2 f(x)|\leq 2\varepsilon$ dla wszystkich $x,h\in\mathbb{H}$.

Podobnie jak w pracy Szostoka i Wąsowicza oraz w pracy magisterskiej Fidyk (2014) można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4
Jeżeli funkcje $f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ spełniają nierówność (1) dla wszystkich $x,\ y\in\mathbb{H}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, to istnieją stałe $c,b\in\mathbb{H}$ dla których $f(x)=xc+b\ \ (x\in\mathbb{H})$.

Dowód. Istotnie, dochodząc w dowodzie do równości $y\cdot a(x)=x\cdot a(y)\ \ (x,y\in\mathbb{H})$, gdzie $a:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ jest funkcją addytywną i podstawiając $y=1$ mamy $a(x)=x\cdot c$, gdzie $c=a(1)$. Ponieważ $f(x)=a(x)+b$,to musi być $f(x)=x\cdot c+b$.

Podobne twierdzenia można otrzymać gdy: $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$, $f,F:\mathbb{C}\to\mathbb{H}$, $f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$, $f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$. Teraz wykażę, że twierdzenie 4 można wzmocnić następująco.

Twierdzenie 5
Załóżmy, że $\varepsilon>0,f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ i spełniona jest następująca nierówność

$$|F(y)-F(x)-(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)|\leq\varepsilon\quad(x,y\in\mathbb{H})\tag{3}$$

Wówczas istnieje $b\in\mathbb{H}$ takie, że $f(x)=b$.

Z twierdzenia 4 $f(u)=u\cdot c+b$. Po podstawieniu nx w miejsce x, ny w miejsce y w (3) otrzymujemy:

$$\left|F(ny)-F(nx)-(ny-nx)\left(\frac{nx+ny}{2}\cdot c+b\right)\right|\leq\varepsilon\,,$$

$$|\frac{F(ny)-F(nx)}{n^2}-\frac{1}{2}(y-x)(x+y)\cdot c+\frac{(y-x)\cdot b}{n}|\leq\frac{\varepsilon}{n^2}\,.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty}(\frac{F(ny)}{n^2}-\frac{F(nx)}{n^2})=\frac{1}{2}(y-x)(y+x)\cdot c$. Gdy $x=0$, to $\lim_{n\to\infty}\frac{F(ny)}{n^2}=\frac{1}{2}y^2c$, podobnie gdy $y=0$, to $\lim_{n\to\infty}\frac{F(nx)}{n^2}=\frac{1}{2}x^2c$.

Mamy więc:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{F(ny)}{n^2}-\frac{F(nx)}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{F(ny)}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{F(nx)}{n^2}=\frac{1}{2}y^2c-\frac{1}{2}x^2c,$$

a wiemy już, że $\lim_{n\to\infty}(\frac{F(ny)}{n^2}-\frac{F(nx)}{n^2})=\frac{1}{2}(y-x)(y+x)\cdot c$ i dlatego $\frac{1}{2}(y-x)(y+x)\cdot c=\frac{1}{2}y^2c-\frac{1}{2}x^2c$, a stąd

$$y^2c+yx\cdot c-xy\cdot c-x^2c=y^2c-x^2c,$$

$$yx\cdot c-xy\cdot c=0,$$

$$yx\cdot c=xy\cdot c.$$

Gdyby było $c\neq 0$, to byłoby $yx=xy$ dla każdych $x,y\in\mathbb{H}$, co jest sprzeczne z nieprzemiennością mnożenia w $\mathbb{H}$.

Uwaga 1. Funkcja G określona wzorem $G(x)=x\cdot b$ spełnia równanie $G(y)-G(x)-(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$, oraz $|F(x)-F(0)-x\cdot b|\leq\varepsilon$ dla każdego $x\in\mathbb{H}$.

Wniosek 1. Jeżeli $f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ spełniają równanie

$$F(y)-F(x)=(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad(x,y\in\mathbb{H})\tag{4}$$

to istnieje stała $b\in\mathbb{H}$ taka, że $f(x)=b$, a ponadto $F(x)=xb+c$ dla pewnego $c\in\mathbb{H}$.

Uwaga 2. Funkcje $f,F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ postaci : $F(x)=xb+c$, $f(x)=b$ dla pewnych $b,c\in\mathbb{H}$, spełniają równanie

$$F(y)-F(x)=(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad(x,y\in\mathbb{H}).$$

Ważnym środkiem dowodowym wymienionym przez Szostok i Wąsowicz (2011) (powtórzonym później w innej sytuacji przez Fidyk (2014)) była możliwość wyeliminowania - po pewnych przekształceniach - funkcji F z nierówności (1), co pozwoliło wykorzystać kluczowy lemat w nowo otrzymanej nierówności. Warto zauważyć, że metodę eliminacji funkcji F użytą przez Szostoka i Wąsowicza (2011) można zastosować w wielu innych sytuacjach (zob. np. Tomasz Szostok, Functional equations stemming from numerical analysis, Dissertationes Math. 508 (2015)). Pokażę dalej, że można wyeliminować funkcje F, G w przypadku spexideryzowanej wersji nierówności (1).

Lemat 1

Jeżeli $f,F,G:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$, $\varepsilon>0$ oraz

$$|F(y)-G(x)-(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)|\leq\varepsilon\quad(x,y\in\mathbb{K})\tag{5}$$

to $|h\Delta_h^2 f(x)|\leq 2\varepsilon$ dla każdego $h\in\mathbb{K}$.

Dowód. Podstawiając w (5) $y = x + h$ otrzymuję:

$$\left|F(x+h) - G(x) - h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}h\right)\right| \leq \varepsilon, \tag{6}$$

teraz podstawiając w powyższej nierówności $x + h$ zamiast x otrzymuję:

$$\left|F(x+2h) - G(x+h) - h \cdot f\left(x + \frac{3}{2}h\right)\right| \leq \varepsilon, \tag{7}$$

z (6) i (7):

$$|F(x+2h) - G(x+h) + F(x+h) - G(x) - \\ h\left[f\left(x+\frac{3}{2}h\right) + f\left(x+\frac{1}{2}h\right)\right]| \leq 2\varepsilon. \tag{8}$$

Podstawiając w (5) $y = x + 2h$ otrzymuję:

$$|F(x+2h) - G(x) - 2h \cdot f(x+h)| \leq \varepsilon, \tag{9}$$

z (8) i (9) (mnożąc (9) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymuję:

$$\left|-G(x+h) + F(x+h) + h[2f(x+h) - f\left(x+\frac{3}{2}h\right) - f\left(x+\frac{1}{2}h\right)]\right| \leq 3\varepsilon, \tag{10}$$

ale z (5), po podstawieniu $x + h$ zamiast y, $x + h$ zamiast x mamy:

$$|F(x+h) - G(x+h)| \leq \varepsilon. \tag{11}$$

Z (10), (11) (mnożąc (11) pod modułem przez -1 i z nierówności trójkąta) otrzymuję:

$$\left|h[2f(x+h) - f\left(x+\frac{3}{2}h\right) - f\left(x+\frac{1}{2}h\right)]\right| \leq 4\varepsilon, \tag{12}$$

po podstawieniu $2h$ zamiast h otrzymuję:

$$|2h[2f(x+2h) - f(x+3h) - f(x+h)]| \leq 4\varepsilon. \tag{13}$$

Stąd dzieląc przez 2 i podstawiając x w miejsce $x + h$ otrzymuję:

$$|h[2f(x+h) - f(x+2h) - f(x)]| \leq 2\varepsilon, \tag{14}$$

mnożąc (14) pod modułem przez -1 otrzymuję:

$$|h[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]| \leq 2\varepsilon,$$

zatem: $|h\Delta_h^2 f(x)| \leq 2\varepsilon$.

Wniosek 2. Jeżeli $\varepsilon > 0$, $f, F, G : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *gdzie* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *spełniają nierówność*

$$|F(y) - G(x) - (y-x) f\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq \varepsilon \ \ (x, y \in \mathbb{K}) \tag{5}$$

to istnieją $c, b \in \mathbb{K}$ *takie, że* $f(x) = x \cdot c + b,\ x \in \mathbb{K}$. *Ponadto w przypadku* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *musi być* $c = 0$.

W dowodzie tego wniosku wykorzystamy wniosek 2.2' (Fidyk, 2014):

„*Wniosek 2.2'. Jeśli dla pewnego* $\varepsilon > 0$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *spełnia nierówność* $|h\Delta_h^2 f(x)| \le \varepsilon$ *dla wszystkich* $x, h \in \mathbb{C}$, *to istnieją funkcja addytywna* $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *i stała* $b \in \mathbb{C}$ *takie, że* $f(x) = a(x) + b$ $(x \in \mathbb{C})$".

Dowód wniosku 2. Z poprzedniego lematu $|h\Delta_h^2 f(x)| \le 2\varepsilon$ dla każdych $h, x \in \mathbb{K}$. Z wniosku 2,2' (Fidyk, 2014) (który pozostaje prawdziwy również w sytuacji $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), istnieje funkcja addytywna $a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ oraz $b \in \mathbb{K}$ takie, że

$$f(x) = a(x) + b, \quad x \in \mathbb{K}. \tag{15}$$

Z (5) podstawiając $y = 0$ mamy:

$$\left|F(0) - G(x) + xf\left(\frac{x}{2}\right)\right| \le \varepsilon. \tag{16}$$

Z (5) podstawiając $x = 0$ mamy:

$$\left|F(y) - G(0) - yf\left(\frac{y}{2}\right)\right| \le \varepsilon. \tag{17}$$

Z (5), (16), (17) otrzymujemy

$$\left|F(0) - G(0) + x\,f\left(\frac{x}{2}\right) - yf\left(\frac{y}{2}\right) + (y - x)\,f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \le 3\varepsilon,$$

stąd i z postaci f (patrz (15)):

$$\left|F(0) - G(0) + xa\left(\frac{x}{2}\right) + xb - ya\left(\frac{y}{2}\right) - yb + (y - x)\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right) + b\right)\right| \le 3\varepsilon,$$

$$|F(0) - G(0) + \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}y \cdot a(y) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) + \frac{1}{2}y \cdot a(y) - \frac{1}{2}x \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y)| \le 3\varepsilon.$$

Zatem:

$$|F(0) - G(0) + \frac{1}{2}y \cdot a(x) - \frac{1}{2}x \cdot a(y)| \le 3\varepsilon. \tag{18}$$

Podstawiając w (18) nx w miejsce x, ny w miejsce y otrzymuję:

$$|F(0) - G(0) + \frac{1}{2}n^2 y \cdot a(x) - \frac{1}{2}n^2 x \cdot a(y)| \le 3\varepsilon,$$

a stąd:

$$|2\frac{F(0) - G(0)}{n^2} + y \cdot a(x) - x \cdot a(y)| \le \frac{6\varepsilon}{n^2} \quad .$$

Po przejściu do granicy przy $n \to \infty$:

$$y \cdot a(x) = x \cdot a(y). \tag{19}$$

Zatem dla $y = 1$ otrzymujemy: $a(x) = x \cdot c$, gdzie $c = a(1)$. Pozostaje wykazać, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$. Gdyby było $c \neq 0$, to z (19) byłoby: $y \cdot x \cdot c = x \cdot y \cdot c \quad (x, y \in \mathrm{H})$, czyli $y \cdot x = x \cdot y$ dla każdych $x, y \in \mathrm{H}$ - sprzeczność. Z (15) mamy $f(x) = a(x) + b = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Zatem $f(x) = x \cdot c + b \,(x \in \mathbb{K})$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$. Przy czym dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$.

Wniosek 3. Przy założeniach poprzedniego wniosku, jeżeli funkcje f, F, G spełniają nierówność (5), *to*:

$f(x) = x \cdot c + b$ dla pewnych $c, b \in \mathbb{K}$, z tym, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ musi być $c = 0$,

$$|F(x) - G(0) - \frac{1}{2}x^2 c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}),$$

$$|G(x) - F(0) - \frac{1}{2}x^2 c - xb| \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{K}).$$

Z powyższych nierówności $|F(0) - G(0)| \leq \varepsilon$ oraz $|F(x) - G(x) + (F(0) - G(0)| \leq 2\varepsilon$.

Niech $\mathbf{F}$ będzie ciałem o charakterystyce różnej od 2 lub algebrą unormowaną z jedynką. Jung i Sahoo (2000) zajmowali się stabilnością równania funkcyjnego

$$f(x) - g(y) = (x - y) \cdot h(x + y),$$

gdzie $f, g, h : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$. W dowodzie twierdzenia 2 jest usterka – autorzy skorzystali z przemienności mnożenia w $\mathbf{F}$, a algebra unormowana nie musi być przemienna (zob. Jung, Sahoo, 2000, s. 795, $w_{15} - w_6$) – usterka jest jednak łatwa do skorygowania, wystarczy pisać w iloczynach współczynniki na drugim miejscu (np. xa, $x^2 a$, xb zamiast ax, ax^2, bx).

Wniosek 3 wynikający z pracy Junga i Sahoo (2000) jest zatem – w takiej postaci w jakiej wspomniani autorzy go wpisali – słuszny dla przemiennych algebr unormowanych z jedynką, a po wyżej opisanej zmianie kolejności czynników jest słuszny dla wszystkich algebr unormowanych z jedynką. Wniosek ten dla algebr unormowanych z jedynką można znacznie wzmocnić, stosując opisaną wcześniej w dowodzie lematu 1 metodę eliminacji dwóch funkcji (bez pośrednictwa twierdzenia 2 (Jung, Sahoo, 2000)). Wzmocniona wersja ma następującą postać:

Jeżeli $\mathbf{F}$ jest algebrą unormowaną z jedynką oraz funkcje $f, g, h : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ spełniają nierówność

$$||f(x) - g(y) - (x - y) \cdot h(x + y)|| \leq \varepsilon \ (x, y \in \mathbf{F}),$$

to istnieją stałe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ z $||c - d|| \leq \varepsilon$ takie, że:

$$\left\|f(x) - x^2 a - xb - c\right\| \leq \varepsilon,$$

$$\left\|g(x) - x^2 a - xb - d\right\| \leq \varepsilon,$$

$$h(x) = xa + b$$

dla wszystkich $x \in \mathbf{F}$.

Obserwacja ta sugeruje możliwość przeniesienia wyników opisanych wcześniej na funkcje określone na algebrze unormowanej z jedynką i przyjmujące wartości w tej algebrze. Wypisanie stosownych uogólnień i sprawdzenie wszystkich szczegółów dowodowych jest dobrą zachętą do twórczości matematycznej studentów wyższych roczników studiów matematyki.

Literatura

Aczèl, J.: 1985, A mean value property of the derivative of quadratic polynomials - without mean values and derivatives, *Math. Mag.* **58**(1), 42–45.

Fidyk, E.: 2014, *O stabilności pewnego równania funkcyjnego związanego z twierdzeniem lagrange'a*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków.

Jung, S., Sahoo, P.: 2000, On the stability of a mean value type functional equation, *Demonstr. Math.* **XXXIII**(4), 793–796.

Szostok, T., Wąsowicz, S.: 2011, On the stability of the equation stemming from Lagrange MVT, *Appl. Math. Lett.* **24**, 541–544.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail edyta.fidyk@onet.com.pl,
e-mail siudut@up.krakow.pl