FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka

Twórcza aktywność matematyczna uczniów związana z rozwiązywaniem pewnych zadań na zastosowanie wzorów Viète'a*

Abstract. In this article we propose ways of developing the active and creative attitude of students towards solving mathematical problems. The tasks were sourced from various mathematical competitions for secondary school students, such as the so-called Mathematical Olympiad, and require the use of Vieta's formulas for third-degree polynomials. These problems inspire students to conduct their own elementary research work and foster their creative attitude towards mathematics. This article is dedicated mainly to students who are pre-service mathematics teachers, but may also be of use to in-service teachers.

1. Wstęp

Niniejszy artykuł jest próbą pokazania na przykładach sposobów opracowywania z uczniami szkół średnich pewnych zagadnień matematycznych prowadzących do ważnych elementów rozwijania twórczego działania w zakresie matematyki. Naszym zdaniem proponowane w tej pracy metody wskazują na możliwość skutecznego nauczania matematyki, zamiast odtwarzania algorytmów na potrzeby zadań egzaminacyjnych. Z punktu widzenia przeciętnego ucznia ten egzaminacyjny trening jest zapewne pożądany, ale na ogół nie prowadzi do rozwijania matematycznego myślenia.

We wstępie do książki (Mikołajczyk, 2012, s. 5) czytamy:

> *Matematyczne zainteresowania i talenty uczniów rzadko są nauczycielom dane. W większości przypadków muszą oni solidnie na nie zapracować swoim entuzjazmem, zaangażowaniem, pomysłowością i profesjonalizmem.*

---

*Creative mathematical mental activity of students while solving problems requiring use of Vieta's formulas

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D40, Secondary: 97H30

Key words and phrases: Vieta's formulas, solving mathematical problems

Dlatego pracę tę adresujemy głównie do studentów matematyki, mających w przyszłości być nauczycielami, a także do nauczycieli matematyki. Pragniemy pokazać w niej, na stosunkowo niewielkim wycinku zagadnień matematycznych, jak można, pracując z uczniami, postępować tak, aby:

a) kształtować kluczowe dla matematyki umiejętności: logicznego myślenia, precyzyjnego argumentowania, posługiwania się technikami algebraicznymi i dostrzegania geometrycznych zależności;

b) zaszczepiać w uczniach matematyczne pasje i rozwijać zainteresowania;

c) kształcić uczniów myślących, twórczych i pomysłowych.

Umiejętności wymienione powyżej w punkcie a) mają związek z aktywnością, na którą zwraca uwagę Z. Krygowska (Krygowska, 1986). Aktywność ta, zdaniem autorki, wspomaga akt twórczy myśli matematycznej. W pracy Z. Krygowskiej znajdujemy następujące stwierdzenie:

> *Jak przyznają sami matematycy, akt iluminacji następuje zwykle po ogromnej pracy wstępnej oraz poprzedza następny etap pracy, organizowanej świadomie. Do pracy tej niezbędne są pewne narzędzia, do których w matematyce zalicza się stosowne zadania.*

W swojej książce (Krygowska, 1977c) Z. Krygowska wskazuje, że bardzo dobre w tym względzie dla uczniów są otwarte zadania problemowe i zadania metodologiczne. Dają one możliwość zapoznania uczniów ze specyfiką pracy matematyka, w której definiuje się pewne pojęcia, formułuje się hipotezy z nimi związane, dowodzi ich prawdziwości lub je odrzuca konstruując stosowne przykłady.

Mason, Burton, Stacey (2005, s. 8) sformułowali następujące postulaty dotyczące myślenia matematycznego:

1. *Jesteś w stanie myśleć matematycznie.*

2. *Matematyczne myślenie można usprawnić dzięki praktyce połączonej z refleksją.*

3. *Matematyczne myślenie prowokują sprzeczności, napięcia i niespodzianki.*

4. *Matematycznemu myśleniu sprzyja atmosfera swobodnego zadawania pytań, rzucania wyzwań i refleksji.*

5. *Matematyczne myślenie pomaga w zrozumieniu siebie i świata.*

Z powyższych refleksji wynika, że forma myślenia matematycznego może być dostępna każdemu, kto ma motywację do podejmowania wysiłku intelektualnego.

Uważamy, że tematyka tej naszej pracy egzemplifikuje pewne idee teoretyczne opisane w artykule A. Pardały (2009). Autor w tym artykule, nawiązując do doświadczeń francuskiego stowarzyszenia *Math Pour Tous*, które przedstawione są w pracy L. Beddou, C. Mauduit (2001), pisze:

> *Nauczanie matematyki opiera się w ich koncepcji na aktywności badawczej w matematyce i zaangażowaniu jak największej liczby uczniów i studentów. Próbuje się tu przestrzegać bądź kopiować pewne zachowania, wzorce i zasady specyficzne badaniom naukowym, takie jak: odkrywać pytając, uczyć się badając, ożywiać kreatywność i wyobraźnię, doceniać rolę błędu w uczeniu się, nauczyć słuchania, wymiany i komunikowania idei. Nauczyciel akademicki sprawuje tu patronat, przedkłada pewną liczbę zadań i problemów, takich by ich rozwiązanie nie angażowało „znanej wiedzy". Nauczyciel prowadzący taki seans zajęć obowiązany jest, by ta praca uczniów bądź grup uczniów (także bliźniaczych) posuwała się do przodu.*

Prezentowany artykuł ma następującą strukturę:

1) Podstawowymi elementami tej konstrukcji są zadania, a często również ich rozwiązania, zawarte głównie w literaturze matematycznej przeznaczonej dla uczniów przygotowujących się do konkursów i olimpiad matematycznych.

2) Wszystkie podstawowe zadania dotyczą zastosowania wzorów Viète'a dla wielomianów trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.

3) Na bazie tych podstawowych zadań formułowane i rozwiązywane są problemy i zagadnienia matematyczne związane w sposób naturalny z tymi zadaniami, a dotyczące:

   a) matematycznej sensowności rozważanych w zadaniach wyrażeń algebraicznych;
   b) istnienia i liczby obiektów matematycznych rozważanych w zadaniach;
   c) krotności pierwiastków wielomianów i interpretacji geometrycznej wykresów wielomianów mających pierwiastki wielokrotne;
   d) istnienia i postaci wielomianów rozważanych w danym zadaniu, które mają pierwiastki wielokrotne;
   e) roli i znaczenia współczynników wielomianów rozważanych w zadaniu;
   f) zastosowania matematycznych programów komputerowych do rozwiązywania równań trzeciego stopnia;
   g) wzorów Viète'a w zagadnieniach geometrycznych;
   h) sposobów rozwiązania zadania bez użycia wzorów Viète'a oraz z zastosowaniem wzorów Viète'a;
   i) badania istotności i niezależności założeń twierdzeń rozważanych w zadaniach;
   j) naturalnych uogólnień zagadnień (wzorów) występujących w zadaniach i ich zastosowań do konstrukcji nowych interesujących zadań.

4) Zadania i ich rozwiązania na ogół zaopatrzone są w odpowiednie komentarze dydaktyczne.

2. Wiadomości wstępne

Paragraf ten zawiera najważniejsze definicje i twierdzenia wykorzystywane w rozwiązaniach zadań. Część z nich na ogół nie znajduje się w klasycznych podręcznikach szkolnych, ale są stosowane w rozwiązaniach zadań konkursowych i olimpijskich. Twierdzenia dotyczące ciała liczb zespolonych, a w szczególności pierwiastków zespolonych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, nie są bezpośrednio stosowane w tekstach zadań i ich rozwiązaniach, ale zostały zamieszczone w tym paragrafie w celu pełniejszej informacji o pierwiastkach wielomianów.

Poniższe dwa twierdzenia są szczególnymi przypadkami ogólnego twierdzenia Viète'a (Pawłowski, 1994, s. 159).

Twierdzenie 1 (Wzory Viète'a dla trójmianu kwadratowego)
Niech $f(x) = a_2x^2+a_1x+a_0$, gdzie $a_2 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = -\tfrac{a_1}{a_2}, \\ &x_1x_2 = \tfrac{a_0}{a_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Twierdzenie 2 (Wzory Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia)
Niech $f(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, gdzie $a_3 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -\tfrac{a_2}{a_3}, \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \tfrac{a_1}{a_3}, \\ &x_1x_2x_3 = -\tfrac{a_0}{a_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Definicja 1 (Mostowski, Stark, 1970, s. 191)
Niech $f(x)$ będzie wielomianem jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych. Liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy *k-krotnym pierwiastkiem*, gdzie k jest niezerową liczbą naturalną, wielomianu $f(x)$, jeżeli wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i $f(x)$ nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

Pierwiastki 1-, 2-, 3-krotne nazywamy również pierwiastkami odpowiednio *pojedynczymi, podwójnymi, potrójnymi.*

Twierdzenie 3 (Mostowski, Stark, 1970, s. 191)
Liczba rzeczywista x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ i $g(x_0) \neq 0$.

Niech liczba rzeczywista x_0 będzie k-krotnym, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Z twierdzenia 3 wynika, że $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ i $g(x_0) \neq 0$. Stosując do wielomianu $f(x)$ twierdzenie o pochodnej iloczynu otrzymujemy:

$$f'(x) = (x - x_0)^{k-1}(kg(x) + (x - x_0)g'(x)).$$

Oznaczmy: $h(x) = kg(x)+(x-x_0)g'(x)$. Zauważmy, że $h(x_0) \neq 0$ oraz $f'(x) = (x-x_0)^{k-1}h(x)$. Zatem na mocy twierdzenia 3 udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 (Mostowski, Stark, 1970, s. 192)
Jeżeli liczba rzeczywista x_0 jest k-krotnym, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, to liczba x_0 jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem pochodnej $f'(x)$.

Poniższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem (ciało liczb rzeczywistych) twierdzenia zamieszczonego w książce: Gleichgewicht (2004, s. 309).

Twierdzenie 5
Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia n, gdzie $n \in \mathcal{N}$, ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych, jeśli liczymy każdy pierwiastek tyle razy, jaka jest jego krotność.

Poniższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 1 zamieszczonego w książce: Kostrikin (2004, s. 224).

Twierdzenie 6
Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia n, gdzie $n \geq 1$, ma w zbiorze liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków zespolonych, jeśli liczymy każdy pierwiastek tyle razy, jaka jest jego krotność.

Twierdzenie 7 (Gleichgewicht, 2004, s. 314)
Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Pierwiastki wielokrotne mają następującą interpretację geometryczną. Niech liczba rzeczywista x_0 będzie k-krotnym, gdzie $k \geq 2$, pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Przyjmujemy, że $y_0 = f(x_0)$. Prosta o równaniu

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

jest styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Ponieważ $y_0 = f(x_0) = f'(x_0) = 0$ na podstawie twierdzenia 4, więc prosta (3) ma równanie

$$y = 0.$$

Zatem wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x układu współrzędnych w punkcie x_0.

Ponieważ w dalszej części artykułu będziemy głównie zajmować się wielomianami trzeciego stopnia, więc najpierw załóżmy, że liczba rzeczywista x_0 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Zatem wielomian $f(x)$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a(x - x_0)^2(x - x_1),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera oraz $x_1 \neq x_0$. Wtedy $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy następujący wniosek.

Wniosek 1
Niech liczba rzeczywista x_0 będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Wtedy wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x w punkcie x_0 i w punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne.

Następnie załóżmy, że liczba rzeczywista x_0 jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Zatem wielomian $f(x)$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a(x - x_0)^3,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera. Zauważmy, że $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy następujący wniosek.

Wniosek 2
Niech liczba rzeczywista x_0 będzie potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Wtedy wykres wielomianu $f(x)$ jest styczny do osi x w punkcie x_0 i w punkcie x_0 wykres ma punkt przegięcia.

Przypomnijmy pewne potrzebne w tym artykule fakty dotyczące równań trzeciego stopnia (Mostowski, 1967).

Dane jest równanie trzeciego stopnia postaci:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4}$$

gdzie współczynniki a, b, c, d są rzeczywiste i $a \neq 0$.

Równanie (4) można sprowadzić do prostszej postaci:

$$x^3 + px + q = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \tag{6}$$

Wyróżnikiem równania (5) nazywamy

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}. \tag{7}$$

Twierdzenie 8 (Mostowski, 1967, s. 111 - 112)
Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie (5) *o współczynnikach rzeczywistych p i q miało wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste i różne, jest, aby wyróżnik*

$$\Delta < 0.$$

Twierdzenie 9 (Mostowski, 1967, s. 112)
Na to, by równanie (5), *o współczynnikach rzeczywistych p oraz q miało wszystkie pierwiastki rzeczywiste i któryś z nich był wielokrotny, potrzeba i wystarcza, aby wyróżnik*

$$\Delta = 0.$$

Twierdzenie 10 (Mostowski, 1967, s. 114)
Na to, by równanie (5) *o współczynnikach rzeczywistych p i q miało tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa zaś inne zespolone sprzężone, potrzeba i wystarcza, aby wyróżnik*

$$\Delta > 0.$$

3. Przykłady zadań inspirujących aktywność twórczą

W tym paragrafie podamy przykłady zadań, w których wykorzystane są wzory Viète'a. Analiza tematów tych zadań nasuwa wiele ciekawych i niebanalnych problemów. Rozważanie tych zagadnień daje uczniom okazję do stawiania sobie pytań dotyczących istnienia pewnych obiektów matematycznych lub sensowności rozważanych wyrażeń. Podejmowanie przez uczniów dyskutowania takich problemów jest wyrazem twórczej matematycznej aktywności uczniów.

Zadanie 1 (Pawłowski, 1994, s. 172, zad. 14)
Dany jest wielomian

$$f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b \tag{8}$$

o współczynnikach rzeczywistych a i b różnych od zera. Jeżeli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$, to

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = -1.$$

R.: Ze wzorów Viète'a wynika, że:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-a}{a} & = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 & = \frac{b}{a}, \\ x_1x_2x_3 & = -\frac{b}{a}. \end{array}$$

Wobec tego

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = (x_1 + x_2 + x_3)\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} = -1.$$

Zgodnie z typologią zadań matematycznych zaproponowaną przez Z. Krygowską (1977c, s. 20–38), zadanie powyższe, to zwykłe zastosowanie teorii. Nie wymaga skomplikowanych rachunków, ale jest okazją do interesujących dyskusji.

Po pierwsze, analizując treść zadania 1 należy postawić pytanie o sens wyrażenia

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \tag{9}$$

gdzie x_i dla $i = 1, 2, 3$ są pierwiastkami rozważanego wielomianu (8).

Wyrażenie (9) ma sens, gdyż liczba 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu (8).

Ze względu na treść zadania 1 interesujące jest pytanie o istnienie wielomianu postaci (8), który ma trzy pierwiastki rzeczywiste (zob. twierdzenia 5 i 7).

Odpowiedź jest pozytywna. Wielomian $f(x) = 6x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{12}, \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{33}}{12}. \end{cases}$$

Aby znaleźć przykład wielomianu postaci (8) o trzech pierwiastkach rzeczywistych uczniowie mogą zastosować metodę „prób i błędów”:

a) wybrać liczbę rzeczywistą x_1, np. $x_1 = \frac{1}{2}$, i założyć, że liczba x_1 jest pierwiastkiem wielomianu (8);

b) z założenia, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu (8), wywnioskować jaka jest zależność między współczynnikami a i b wielomianu (8);

c) dobrać wartości liczbowe współczynników a i b w ten sposób, aby trójmian kwadratowy otrzymany w wyniku podzielenia wielomianu $f(x)$ przez dwumian $x - x_1$ miał dwa pierwiastki rzeczywiste.

W przypadku, gdy powyższa próba doboru liczb nie prowadzi do oczekiwanego rezultatu, uczniowie powinni analizować przyczyny niepowodzenia i wyciągać stosowne wnioski dotyczące dalszych prób. Łatwo zauważyć, że warto zaproponować uczniom pracę w grupach nad rozwiązaniem powyższego zagadnienia.

W różnych sytuacjach dydaktycznych przykłady odgrywają ważną rolę. M. Ciosek (1995) pisze:

> *W badaniu matematycznym, z jakim niewątpliwie mamy do czynienia w trakcie rozwiązywania zadania-problemu czy inaczej zadania otwartego (Krygowska, 1977b; Ciosek, 1988), przykład bywa wykorzystywany w różnych fazach procesu rozwiązywania zadania, i to do różnych celów. Wśród tych ostatnich można wymienić:*
>
> *(1) zrozumienie problemu,*
>
> *(2) odkrycie ogólnego rozwiązania problemu,*
>
> *(3) weryfikację hipotezy odnoszącej się do rozwiązania ogólnego,*
>
> *(4) sprawdzenie poprawności rachunku algebraicznego.*
>
> *[...] Wykorzystanie przykładu do wspomnianego powyżej celu* (2) *wiąże się ze strategią rozwiązywania zadań jaką jest „rozważanie przypadków szczególnych” (examining special cases), którą krótko możemy nazwać strategią S. A. Schoenfeld ujmuje tę strategię w formę polyowskiej dyrektywy heurystycznej: „Dla lepszego zrozumienia nieznanego ci problemu, spróbuj go zegzemplifikować przez rozważenie różnych przypadków szczególnych. Może ci to zasugerować kierunek poszukiwania lub wskazać prawdopodobne rozwiązanie” (Schoenfeld, 1985, s. 76).*

Zauważmy, że mnożąc wielomian $f(x) = 6x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ przez dowolną liczbę rzeczywistą różną od zera, otrzymujemy nieskończenie wiele wielomianów postaci (8), ale wszystkie otrzymane wielomiany mają te same trzy pierwiastki rzeczywiste.

Aby zagadnienie rozważane w zadaniu 1 miało istotne znaczenie warto odpowiedzieć na następujące pytanie:

Czy istnieje nieskończony zbiór wielomianów postaci (8), które mają trzy pierwiastki rzeczywiste, a dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków?

Odpowiedź na to pytanie zawiera się w poniższych zadaniach: 1.1–1.4.

Zadanie 1.1

Dany jest wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczba $c \in \mathcal{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2 - c^3}. \tag{10}$$

R.: (i) Zakładamy, że liczba $c \in \mathcal{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ (zob. twierdzenie 7). Zauważmy, że $c \in \mathcal{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ponadto $ac^3 - ac^2 + bc + b = 0$, czyli $a(c^3 - c^2) + b(c + 1) = 0$, a więc

$$\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2 - c^3}.$$

Otrzymaliśmy równość (10).

(ii) Zakładamy, że spełniona jest równość (10). Stąd wynika, że $c \in \mathcal{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Łatwo sprawdzić, że na podstawie równości (10) otrzymujemy równość:

$$ac^3 - ac^2 + bc + b = 0.$$

Zatem liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$.

Zadanie 1.2

Dany jest wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że jeżeli liczba $c \in \mathcal{R}$ spełnia warunki:

(a) $0 < c < 1$,

(b) $\frac{a}{b} = \frac{c+1}{c^2-c^3}$,

to:

(i) Liczba c jest pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $f(x)$.

(ii) Wielomian $f(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

R.: ad (i). Z zadania 1.1 bezpośrednio wynika, że liczba c jest pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $f(x)$.

ad (ii). Zakładamy, że x_1 i x_2 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$ (zob. twierdzenie 5). Przyjmijmy oznaczenie: $x_3 = c$. Stosując wzory Viète'a mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + c = 1, \\ x_1 x_2 c = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - c, \\ x_1 x_2 = -\frac{c-c^2}{c+1}, \end{cases}$$

$$x_2 = 1 - c - x_1,$$

$$x_1(1 - c - x_1) + \tfrac{c-c^2}{c+1} = 0,$$

$$(1 - c)x_1 - x_1^2 + \tfrac{c-c^2}{c+1} = 0,$$

$$x_1^2 + (c - 1)x_1 + \tfrac{c^2-c}{c+1} = 0.$$

A więc x_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego:

$$x^2 + (c - 1)x + \tfrac{c^2-c}{c+1} = 0.$$

Zauważmy, że:

$$\Delta = (c - 1)^2 - \tfrac{4(c^2-c)}{c+1} = (c - 1)^2 + \tfrac{4(c-c^2)}{c+1}.$$

Ponieważ $0 < c < 1$, więc $\frac{4(c-c^2)}{c+1} > 0$, czyli $\Delta > 0$. Zatem $x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$ lub $x_1 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$. Wiemy, że $x_2 = 1 - c - x_1$. Zatem, jeżeli $x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$, to $x_2 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$, a jeżeli $x_1 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$, to $x_2 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$. Wobec tego możemy przyjąć, że: $x_1 = \frac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \frac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2}$ i $x_3 = c$.

Udowodnimy, że liczby rzeczywiste x_1 i x_2 są istotnie pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Oczywiście wiemy, że liczba rzeczywista $x_3 = c$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. W tym celu na podstawie twierdzenia 2 wystarczy wykazać, że liczby x_1, x_2 i x_3 spełniają wzory Viète'a dla wielomianu $f(x)$. Istotnie, mamy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \tfrac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} + \tfrac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2} + c = (1 - c) + c = 1;$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_1x_2 + (x_1 + x_2)c =$$

$$\tfrac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} \cdot \tfrac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2} + (\tfrac{(1-c)-\sqrt{\Delta}}{2} + \tfrac{(1-c)+\sqrt{\Delta}}{2})c = \tfrac{(1-c)^2-\Delta}{4} + (1 - c)c =$$

$$\frac{(1-c)^2-(c-1)^2-\frac{4(c-c^2)}{c+1}}{4} + (1 - c)c = \tfrac{c^2-c}{c+1} + (1 - c)c = \tfrac{c^2-c^3}{c+1} = \tfrac{b}{a};$$

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_2)c = \tfrac{c^2-c}{c+1} \cdot c = \tfrac{c^3-c^2}{c+1} = -\tfrac{b}{a}.$$

Wobec tego $x_1, x_2, x_3 = c$ są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$.

Warto aby uczniowie zbadali, czy istnieje liczba rzeczywista $c \notin (0, 1)$ taka, że przy założeniu (b) spełnione są tezy (i) oraz (ii) w zadaniu 1.2. A może istnieje nieskończony zbiór takich liczb c?

Zadanie 1.3

Korzystając z zadania 1.2 skonstruować wielomian postaci $f(x) = ax^3-ax^2+bx+b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, mający trzy pierwiastki rzeczywiste.

R.: Niech $c = \frac{1}{3}$. Wtedy

$$\frac{c + 1}{c^2 - c^3} = 18.$$

Stąd $\frac{a}{b} = 18$. Można przyjąć $a = 18$ i $b = 1$. Wówczas

$$f(x) = 18x^3 - 18x^2 + x + 1.$$

Oczywiście $f(\frac{1}{3}) = 0$ na mocy własności własności (i) w zadaniu 1.2. Następnie mamy:

$$(18x^3 - 18x^2 + x + 1) : (x - \frac{1}{3}) = 18x^2 - 12x - 3.$$

Rozwiązując równanie

$$18x^2 - 12x - 3 = 0,$$

otrzymujemy pierwiastki: $x = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$ lub $x = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$.

Zatem wielomian $f(x)$ ma następujące pierwiastki:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ x_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{6}, \\ x_3 = \frac{2-\sqrt{10}}{6}. \end{cases}$$

Zadanie 1.4

Wykazać, że istnieje nieskończony zbiór wielomianów postaci $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, które mają trzy pierwiastki rzeczywiste, a dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków.

R.: Rozważmy ciąg $c_n = \frac{1}{n}$ dla $n > 1$. Oczywiście $0 < c_n < 1$ dla $n > 1$. Przyjmijmy, że $a_n = c_n + 1$ i $b_n = c_n^2 - c_n^3$. Niech

$$f_n(x) = a_n x^3 - a_n x^2 + b_n x + b_n,$$

gdzie $n > 1$. Ponieważ

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n + 1}{c_n^2 - c_n^3},$$

więc na mocy zadania 1.2 liczba c_n jest pierwiastkiem wielomianu $f_n(x)$ oraz wielomian $f_n(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste dla $n > 1$. Niech $n > 1$, $m > 1$ i $n \neq m$. Wówczas oczywiście $a_n \neq a_m$. Wobec tego $f_n(x) \neq f_m(x)$. Zatem zbiór $A = \{f_n(x) : n > 1\}$ jest nieskończony oraz oczywiście dowolne dwa różne wielomiany z tego zbioru mają różne zbiory pierwiastków.

Często stawiane jest również pytanie o krotność pierwiastków wielomianów (zob. wnioski 1 i 2). Analiza tego zagadnienia dla wielomianu (8) znajduje się w rozwiązaniach następnych dwóch zadań: 1.5 i 1.6.

Korzystając z wyników dyskusji przeprowadzonej po rozwiązaniu zadania 1.2 można zachęcić uczniów, aby wskazali inny nieskończony zbiór wielomianów postaci $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, spełniających warunki podane w zadaniu 1.4.

Zadanie 1.5

Zbadać, czy wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma rzeczywisty pierwiastek potrójny?

R.: Przypuśćmy, że $x_0 \in \mathcal{R}$ jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. Na podstawie wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{cases} 3x_0 = 1, \\ 3x_0^2 = \frac{b}{a}, \\ x_0^3 = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}, \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{3}, \\ \frac{b}{a} = -\frac{1}{27}. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem wielomian $f(x)$ nie ma rzeczywistego pierwiastka potrójnego.

Zadanie 1.6
Wykazać, że wielomian $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma rzeczywisty pierwiastek podwójny wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$

lub

(b) $f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$.

R.: I sposób.

Zakładamy, że $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ są rzeczywistymi pierwiastkami wielomianu $f(x)$, przy czym x_1 jest pierwiastkiem podwójnym. Wielomian $f(x)$ zapiszemy w postaci:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b}{a}).$$

Przyjmijmy, że

$$g(x) = x^3 - x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b}{a}.$$

Zatem

$$g(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) = x^3 - (2x_1 + x_2)x^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2)x - x_1^2x_2.$$

Stąd

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -x_1^2x_2, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_1, \\ x_1 + 2x_2 = -x_1x_2, \end{cases}$$

bo $x_1 \neq 0$. Wobec tego

$$x_1 + 2(1 - 2x_1) = -x_1(1 - 2x_1),$$

a więc

$$x_1^2 + x_1 - 1 = 0.$$

Stąd wynika, że x_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x^2+x-1=0$, czyli

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ lub } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

A zatem

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = 2+\sqrt{5} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = 2-\sqrt{5}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$g(x) = (x+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2(x-(2+\sqrt{5})) = x^3 - x^2 - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

lub

$$g(x) = (x-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2})^2(x-(2-\sqrt{5})) = x^3 - x^2 + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

lub

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

Wykazaliśmy, że spełnione są warunki (a), (b).

Odwrotnie, na podstawie powyższych rozważań łatwo sprawdzić, że wielomian: $f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma pierwiastek podwójny $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, natomiast wielomian

$f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$

ma pierwiastek podwójny $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

II sposób.

W tym sposobie rozwiązania zadania wykorzystamy teorię rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $f(x)$ wystarczy rozwiązać równanie

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0.$$

Sprowadzimy powyższe równanie do postaci (zob. (5)):

$$x^3 + px + q = 0.$$

Stosując wzory (zob. (6)) na współczynniki p i q otrzymujemy:

$$p = \frac{3b-a}{3a}, \quad q = \frac{36b-2a}{27a}.$$

Wtedy wyróżnik Δ (zob. (7)) jest równy:

$$\Delta = \frac{b(b^2+11ab-a^2)}{27a^3}.$$

Wobec tego stosując twierdzenie 9 otrzymujemy:

$$\Delta = 0 \iff b^2 + 11ab - a^2 = 0 \iff (b = \tfrac{-11-5\sqrt{5}}{2}a \vee b = \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}a.$$

Zatem wielomian $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

lub

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

Stosując podobne rozumowanie jak w sposobie I można wykazać, że wielomian:

$$f(x) = a(x^3 - x^2 - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \tfrac{11+5\sqrt{5}}{2})$$

dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, ma pierwiastek podwójny $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, natomiast wielomian

$$f(x) = a(x^3 - x^2 + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \tfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}) \text{ dla } a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

ma pierwiastek podwójny $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Z wniosku 1 wynika, że:

(a) wykres wielomianu $f(x) = a(x^3 - x^2 - \frac{11+5\sqrt{5}}{2}x - \frac{11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ jest styczny do osi x w punkcie $x_0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i w tym punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne;

(b) wykres wielomianu $f(x) = a(x^3 - x^2 + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}x + \frac{-11+5\sqrt{5}}{2})$ dla $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ jest styczny do osi x w punkcie $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ i w tym punkcie x_0 wielomian $f(x)$ ma ekstremum lokalne.

W II sposobie rozwiązania zadania 1.6 zastosowaliśmy elementy ogólnej teorii rozwiązywania równań trzeciego stopnia, uzyskując stosunkowo łatwo pożądane rezultaty. Okazuje się, że zastosowanie tej ogólnej teorii w pozostałych zadaniach zamieszczonych w tym artykule jest metodą złożoną i skomplikowaną, a więc nieprzydatną dla uczniów, tym bardziej, że w programie szkolnym nie ma ogólnej teorii rozwiązywania równań trzeciego stopnia.

Ważną umiejętnością dydaktyczną jest takie sformułowanie tekstu zadania i dobranie współczynników, przy których można, bez niepotrzebnej komplikacji rachunków, uzyskać pożądany rezultat. Ilustruje to następujące zadanie.

Zadanie 2 (Płonka, 2000, zad. 15, s. 248)
Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, c, jeśli wiadomo, że są to pierwiastki wielomianu:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c. \tag{11}$$

R.: Ze wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -(-a), \\ ab + bc + ca &= b, \\ abc &= -c. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} b+c &= 0, \\ a(b+c)+bc &= b, \\ bc &= b. \end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki:

1) $b = 0$,
2) $b \neq 0$.

ad 1. Jeżeli $b = 0$, to $c = 0$. Wielomian podany w zadaniu ma postać:

$$f(x) = x^3 - ax^2.$$

Ponieważ a jest pierwiastkiem tego wielomianu, czyli $a^3 - a^3 = 0$, więc w tym przypadku mamy: $b = c = 0$, natomiast a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą.

ad 2. Jeżeli $b \neq 0$, to $c = 1$. Ponieważ $b = -c$, więc $b = -1$. Wobec tego $a \cdot (-1) \cdot 1 = -1$, czyli $a = 1$. Zatem $a = 1, b = -1, c = 1$. Wielomian podany w zadaniu ma postać:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Zadanie to również można zaliczyć do zadań typu: zwykłe zastosowanie teorii (Krygowska, 1977c, s. 20–38). Wymaga ono jedynie zastosowania wzorów Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia i przeprowadzenia dyskusji rozwiązań otrzymanego układu równań. Ciekawym wydaje się pytanie, dlaczego współczynnik przy x^2 ma postać $-a$, gdzie $a \in \mathcal{R}$. Poszukując odpowiedzi na to pytanie, rozważmy wielomian:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Odpowiedź na to pytanie otrzymamy w rozwiązaniach zadań: 2.1–2.5.

Zadanie 2.1

Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, c, jeśli wiadomo, że są to pierwiastki wielomianu:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \tag{12}$$

przy czym $abc = 0$.

R.: Wzory Viète'a dla wielomianu $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a+b+c = -a, \\ ab+bc+ca = b, \\ abc = -c. \end{cases} \tag{13}$$

Stosując założenie, że $abc = 0$ i rozwiązując układ równań (13) otrzymujemy rozwiązania:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku wielomian (12) ma postać $f(x) = x^3$, a w drugim wielomian (12) ma postać $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Łatwo stwierdzić, że $a = b = c = 0$ jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $f(x) = x^3$, natomiast $a = 1$, $b = -2$ i $c = 0$ są pierwiastkami wielomianu $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Z założeń w zadaniu 2.1 wynika, że co najmniej jeden ze współczynników a, b, c jest równy 0. W następnym zadaniu rozważamy przypadek, gdy wszystkie współczynniki a, b, c są niezerowe.

Zadanie 2.2
Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $a = 1$ lub $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$,

(b) $b = -\frac{1}{a}$,

(c) $c = \frac{1-2a^2}{a}$.

R.: (i) Zakładamy, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Wtedy

$$\begin{cases} 2a^3 + ab + c = 0, \\ a + b + c = -a, \\ abc = -c. \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2a^3 + ab + c = 0, \\ a + b + c = -a, \\ ab = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 - 2a^3, \\ c = \frac{1-2a^2}{a}, \\ b = -\frac{1}{a}. \end{cases}$$

Wobec tego

$$1 - 2a^3 = \frac{1-2a^2}{a},$$

a więc

$$2a^4 - 2a^2 - a + 1 = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2a^2(a^2 - 1) - (a - 1) &= 0, \\ 2a^2(a + 1)(a - 1) - (a - 1) &= 0, \\ (a - 1)(2a^3 + 2a^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem $a = 1$ lub $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$.
Wobec tego spełnione są warunki (a), (b), (c).

(ii) Odwrotnie, zakładamy, że spełnione są warunki (a), (b), (c). Jeżeli $a = 1$, to $b = -1$ i $c = -1$. Stąd $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Zauważmy, że $f(a) = f(1) = 0$

oraz $f(b) = f(-1) = 0$ i $f(c) = f(-1) = 0$. Niech $a \neq 1$ i $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$. Stąd $(a-1)(2a^3 + 2a^2 - 1) = 0$, czyli

$$2a^4 - 2a^2 - a + 1 = 0, \tag{14}$$

a więc $1 - 2a^3 = \frac{1-2a^2}{a}$. Z warunku (c) wynika, że $c = 1 - 2a^3$. Wobec tego $f(a) = a^3 + a^3 + (-\frac{1}{a})a + 1 - 2a^3 = 2a^3 - 1 + 1 - 2a^3 = 0$. Następnie mamy: $f(b) = f(-\frac{1}{a}) = (-\frac{1}{a})^3 + a(-\frac{1}{a})^2 + (-\frac{1}{a})(-\frac{1}{a}) + \frac{1-2a^2}{a} = -\frac{1}{a^3} + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{2a^2}{a} = \frac{-1+a^2+a+a^2-2a^4}{a^3} = \frac{2a^4-2a^2-a+1}{-a^3} = 0$ na mocy (14), czyli $f(b) = 0$;
$f(c) = f(\frac{1-2a^2}{a}) = (\frac{1-2a^2}{a})^3 + a(\frac{1-2a^2}{a})^2 + (-\frac{1}{a})\frac{1-2a^2}{a} + \frac{1-2a^2}{a} = \frac{1-2a^2}{a}[(\frac{1-2a^2}{a})^2 + a\frac{1-2a^2}{a} - \frac{1}{a} + 1] = \frac{1-2a^2}{a}[\frac{1-4a^2+4a^4}{a^2} + \frac{a-2a^3}{a} - \frac{1}{a} + 1] = \frac{1-2a^2}{a} \cdot \frac{2a^4-2a^2-a+1}{a^2} = 0$ na mocy (14), czyli $f(c) = 0$.

Wobec tego liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$.

Zadanie 2.3
Wykazać, że liczba rzeczywista a spełnia warunek

$$2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie tego zadania najłatwiej otrzymać stosując odpowiedni matematyczny program komputerowy (np. *Derive, Mathematica*), w którym można rozwiązywać równania, w szczególności równania trzeciego stopnia. Pewne teoretyczne aspekty tego zagadnienia można znaleźć w pracach: Gunčaga, Fulier, Eisenmann (2009) oraz Gunčaga, Majherová (2012).

Zadanie 2.4
Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $a = 1$ lub $a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3}$,

(b) $b = -\frac{1}{a}$,

(c) $c = \frac{1-2a^2}{a}$.

R.: Rozwiązanie tego zadania wynika bezpośrednio z wyników uzyskanych w zadaniach 2.2 i 2.3.

Oczywistym wnioskiem z zadania 2.4 jest następujące zadanie.

Zadanie 2.5
Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(x) = x^3 + ax^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-2a^2}{a},$$

gdzie $a = 1$ lub $a = \sqrt[3]{\frac{23}{108} + \frac{\sqrt{57}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{23}{108} - \frac{\sqrt{57}}{36}} - \frac{1}{3}$.

Na koniec warto zauważyć, jak zaskakujące rezultaty daje zamiana współczynnika $-a$ na współczynnik a przy x^2 w wielomianie (11).

Kolejny przykład jest w typologii Z. Krygowskiej zadaniem metodologicznym (1977c, s. 18–20). Wymaga ono dowodu twierdzenia dotyczącego porównywania własności dwóch prostopadłościanów.

Treść zadania 3 i jego rozwiązanie (pierwszym sposobem) oraz treść zadania 4 pochodzą z tekstu Jędrzeja Garnka pt. *Wzory Viete'a*, który był zamieszczony w Internecie.

Zadanie 3

Udowodnić, że jeżeli dwa prostopadłościany mają równe sumy długości krawędzi, pola powierzchni oraz objętości, to są one przystające.

R.: Oznaczmy długości krawędzi jednego prostopadłościanu przez a, b, c, drugiego zaś przez k, l, m. Zgodnie z treścią zadania mamy:

$$\begin{cases} a+b+c = k+l+m, \\ ab+bc+ca = kl+lm+mk, \\ abc = klm. \end{cases} \tag{15}$$

Oznaczmy: $\alpha = a+b+c$, $\beta = ab+bc+ca$, $\gamma = abc$. Rozważmy wielomiany:

$$w_1(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

$$w_2(x) = (x-k)(x-l)(x-m)$$

o pierwiastkach odpowiednio a, b, c oraz k, l, m. Korzystając ze wzorów Viète'a stwierdzamy, że $w_1(x) = w_2(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, czyli wielomiany $w_1(x)$ i $w_2(x)$ są równe, a więc mają równe zbiory pierwiastków, tzn. $\{a, b, c\} = \{k, l, m\}$. Wobec tego rozważane prostopadłościany są przystające. Zauważmy, że liczby a, b, c (analogicznie k, l, m) nie muszą być różne, ale taki sposób zapisu zbiorów również jest stosowany w matematyce (zob. Ross, Wright, 1996, s. 16).

S. Turnau (1990, s. 48–49) zauważył, że:

> *Każde twierdzenie matematyczne jest odpowiedzią na różne pytania i rozwiązaniem różnych zadań. [...] Dowód twierdzenia jest odpowiedzią na pytanie Dlaczego?, lub Skąd wiadomo, że tak jest?, lub jeszcze Jak można to wyprowadzić z dotychczasowych wiadomości?*

Przy analizie powyższego zadania i jego rozwiązania warto postawić następujące pytania:

1) Czy w zamieszczonym rozwiązaniu zadania niezbędne jest zastosowanie wzorów Viète'a?

2) Jak zmodyfikować rozwiązanie tego zadania, aby w sposób istotny wykorzystać wzory Viète'a?

ad 1. Zastosowanie wzorów Viète'a w tym rozwiązaniu nie jest konieczne. Wystarczy wielomiany $w_1(x)$ i $w_2(x)$ zapisać w klasycznej postaci algebraicznej i wykorzystać równości (15). Natomiast wzory Viète'a w tym sposobie rozwiązania zadania mogą być wskazówką, że warto rozważyć wielomiany postaci $w_1(x)$ i $w_2(x)$.

ad 2. Rozwiążemy zadanie z zastosowaniem wzorów Viète'a.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{cases} a+b+c=-a_1, \\ ab+bc+ca=b_1, \\ abc=-c_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+l+m=-a_2, \\ kl+lm+mk=b_2, \\ klm=-c_2. \end{cases}$$

Z twierdzenia 2 wynika, że liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu

$$w_1(x)=x^3+a_1x^2+b_1x+c_1,$$

a liczby k, l, m są pierwiastkami wielomianu

$$w_2(x)=x^3+a_2x^2+b_2x+c_2.$$

Ze wzorów (15) wynika, że $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, czyli $w_1(x)=w_2(x)$. Wobec tego $\{a,b,c\}=\{k,l,m\}$. Zatem rozważane prostopadłościany są przystające.

Wnikliwa dyskusja nad różnymi sposobami rozwiązania tego zadania wpłynie na głębsze zrozumienie przez uczniów twierdzenia o wzorach Viète'a. Z równości sum długości krawędzi, pól powierzchni całkowitych i objętości wynika przystawanie prostopadłościanów. Łatwo zauważyć, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia w zadaniu 3 jest również prawdziwe. Zatem te trzy równości można uznać za cechę przystawania tych brył. Natomiast żadna z pojedynczych równości, ani żadne dwie równości na ogół nie implikują przystawania prostopadłościanów. Dla przykładu, jeżeli $a=2$, $b=4$, $c=6$ oraz $k=8$, $l=2$, $m=3$, to objętości obu prostopadłościanów są równe, a sumy długości krawędzi i pola powierzchni całkowitych nie są równe, a więc bryły nie są przystające.

Następnie podamy przykład dwóch prostopadłościanów, które mają równe sumy długości krawędzi oraz równe objętości, natomiast pola powierzchni całkowitych mają różne. Rozważmy prostopadłościan o następujących długościach krawędzi: $a=1, b=5, c=8$. Wobec tego

$$\begin{cases} a+b+c=14, \\ 2(ab+bc+ca)=106, \\ abc=40. \end{cases}$$

Niech k, l, m oznaczają długości krawędzi drugiego prostopadłościanu. Przyjmijmy, że $m=2$. Zatem

$$\begin{cases} k+l=12, \\ kl=20. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} k = 2, \\ l = 10 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k = 10, \\ l = 2. \end{cases}$$

Zatem przyjmijmy, że: $k = 2, l = 10, m = 2$. Mamy:

$$\begin{cases} k + l + m = 14, \\ klm = 40. \end{cases}$$

Natomiast $2(kl + lm + mk) = 88$, czyli rozważane prostopadłościany mają różne całkowite pola powierzchni. Można uczniom zaproponować podanie przykładów dla pozostałych przypadków dotyczących rozważanych wyżej zależności między dwoma prostopadłościanami.

Jednym z elementów matematycznej aktywności jest dostrzeganie i wykorzystywanie analogii (Krygowska, 1986). Okazją do wykazania się tą umiejętnością może być następujące zadanie.

Zadanie 4
Udowodnić, że jeżeli dwa prostokąty mają równe obwody i pola, to są one przystające.

Innym elementem matematycznej aktywności jest uogólnianie. W literaturze matematycznej można znaleźć następujące określenie tego pojęcia.

> *Przez uogólnianie wyniku lub metody rozumie się sytuację, w której z zadania danego tworzymy nowe ogólniejsze zadanie, tzn. takie, którego rozwiązanie sprowadza się do skorzystania z wyniku bądź metody zadania wyjściowego, dzięki zauważeniu w zadaniu nowym (lub jego fragmencie) zadania wyjściowego* (Zaręba, 2012, s. 31).

Wynika stąd, że jeżeli opracuje się z uczniami najpierw zadanie 4, to wtedy zadanie 3 jest jego uogólnieniem.

Rezultaty zawarte w zadaniach 5, 6 i 6.1 zostaną wykorzystane w zadaniu 7, w którego rozwiązaniu korzysta się w sposób istotny ze wzorów Viète'a.

Zadanie 5
Niech $a, b \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Wykazać, że:
(i) Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ lub $a < 0$ i $b < 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Ponadto,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \iff a = b.$$

(ii) Jeżeli $a > 0$ i $b < 0$ lub $a < 0$ i $b > 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

R.: ad (i). Zakładamy, że $a > 0$ i $b > 0$ lub $a < 0$ i $b < 0$. Mamy: $(a-b)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Longrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Jeżeli $a = b$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 2$. Odwrotnie, jeżeli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, to $\frac{a^2+b^2}{ab} = 2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Longrightarrow (a-b)^2 = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow a = b$.

ad (ii). Zakładamy, że $a > 0$ i $b < 0$ lub $a < 0$ i $b > 0$. Mamy: $(a+b)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab \Longrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \leq -2 \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Zadanie 6 (Gdowski, Pluciński, 1999, zad. 217, s. 27)
Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, x_3 spełniona jest następująca nierówność:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) \geq 9. \tag{16}$$

R.: Korzystając z nierówności $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b (zob. zadanie 5(i)) otrzymujemy: $(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}) = \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2}+\frac{x_1+x_2+x_3}{x_3} = \frac{x_2+x_3}{x_1}+1+\frac{x_1+x_3}{x_2}+1+\frac{x_1+x_2}{x_3}+1 = \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3}+3 = (\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1})+(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1})+(\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2})+3 \geq 9$.

Jest to kolejny przykład zadania metodologicznego (Krygowska, 1977c, s. 18–20). Warto zachęcać uczniów do analizy istotności założeń twierdzenia, gdyż takie postępowanie jest elementarną aktywnością stosowaną podczas prowadzenia badań naukowych w matematyce. W przypadku powyższego zadania powstaje naturalne pytanie: Czy nierówność (16) jest prawdziwa dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3?

Rozwiązanie zagadnienia prawdziwości nierówności (16) dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3 zostanie przedstawione w poniższych zadaniach 6.1 i 6.2.

W rozwiązaniu następnego zadania wykorzystuje się wyniki uzyskane w zadaniu 5.

Zadanie 6.1
Wykazać, że jeżeli x_1, x_2, x_3 są trzema dodatnimi lub trzema ujemnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) \geq 9. \tag{17}$$

Ponadto,

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = 9 \iff x_1 = x_2 = x_3. \tag{18}$$

R.: Stosując wyniki uzyskane w zadaniu 5(i), dowód nierówności (17) jest analogiczny do dowodu nierówności (16) w zadaniu 6.

Uzasadnimy warunek (18). Przyjmijmy, że $x_1 = x_2 = x_3 = x_0$. Wtedy $(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = 3x_0 \cdot \frac{3}{x_0} = 9$.

Odwrotnie, niech $(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = 9$. Korzystając ze sposobu rozwiązania zadania 6 otrzymujemy: $(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}) + (\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}) + (\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}) = 6$.

Z rezultatów uzyskanych w zadaniu 5(i) wynika, że

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2,\ \ \frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}=2,\ \ \frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}=2,$$

a stąd $x_1=x_2=x_3$.

W zadaniach 6.2 i 7.1 ponownie wskazujemy uczniom na ważne zagadnienie badania istotności założeń twierdzenia.

Zadanie 6.2
Wykazać na przykładach, że istnieją liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 o różnych znakach takie, że nierówność (17) jest spełniona oraz istnieją liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 o różnych znakach takie, że nierówność (17) nie jest spełniona.

R.: Przykłady:

1) $x_1=20$, $x_2=1$, $x_3=-10$,
$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=11\cdot(\frac{1}{20}+1-\frac{1}{10})=\frac{209}{20}=10,45>9;$

2) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$,
$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=1\cdot 1=1<9;$

3) $x_1=-20$, $x_2=-1$, $x_3=10$,
$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=(-11)\cdot(-\frac{1}{20}-1+\frac{1}{10})=\frac{209}{20}=10,45>9;$

4) $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$,
$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=(-1)\cdot(-1)=1<9.$

Zadanie 7
Niech $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, gdzie $a_3\neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że:
(i) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste, to

$$a_1a_2\leq 9a_0a_3. \tag{19}$$

(ii) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste, to

$$a_1a_2\geq 9a_0a_3. \tag{20}$$

(iii) Jeżeli wielomian $f(x)$ ma trzy dodatnie lub trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3, to

$$a_1a_2=9a_0a_3 \iff x_1=x_2=x_3. \tag{21}$$

R.: ad (i). Niech x_1, x_2, x_3 będą dodatnimi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $f(x)$. Z rezultatów otrzymanych w zadaniu 6.1 wynika, że

$$(x_1+x_2+x_3)\cdot(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})\geq 9.$$

Stąd

$$(x_1+x_2+x_3)\cdot\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}\geq 9.$$

Korzystając ze wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases} \tag{22}$$

Zauważmy ponadto, że $a_0 \neq 0$. Wobec tego

$$(-\frac{a_2}{a_3}) \cdot \frac{\frac{a_1}{a_3}}{-\frac{a_0}{a_3}} \geq 9,$$

$$\frac{a_1a_2}{a_0a_3} \geq 9,$$

$$a_1a_2 \leq 9a_0a_3,$$

gdyż z trzeciej równości układu (22) wynika, że $\frac{a_0}{a_3} < 0$, czyli $a_0a_3 < 0$.

ad (ii). Rozwiązanie analogiczne do przypadku (i).

ad (iii). W rozwiązaniu wystarczy wykorzystać warunek (18).

Zadanie 7.1

Niech

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{23}$$

gdzie $a_3 \neq 0$, będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że istnieją wielomiany postaci (23) mające trzy pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach, dla których nierówność (19) (nierówność (20)) jest spełniona oraz istnieją wielomiany postaci (23) mające trzy pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach, dla których nierówność (19) (nierówność (20)) nie jest spełniona.

R.: Przykłady:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$,
$f(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$,
$a_3 = 1$, $a_2 = -1$, $a_1 = -1$, $a_0 = 1$,
$a_1a_2 = 1$, $9a_0a_3 = 9$,
$a_1a_2 < 9a_0a_3$;

2) $x_1 = 20$, $x_2 = 1$, $x_3 = -10$,
$f(x) = (x-20)(x-1)(x+10) = x^3 - 11x^2 - 190x + 200$,
$a_3 = 1$, $a_2 = -11$, $a_1 = -190$, $a_0 = 200$,
$a_1a_2 = (-190)(-11) = 2090$, $9a_0a_3 = 9 \cdot 200 = 1800$,
$a_1a_2 > 9a_0a_3$;

3) $x_1 = -20$, $x_2 = -1$, $x_3 = 10$,
$f(x) = (x+20)(x+1)(x-10) = x^3 + 11x^2 - 190x - 200$,
$a_3 = 1$, $a_2 = 11$, $a_1 = -190$, $a_0 = -200$,
$a_1a_2 = (-190) \cdot 11 = -2090$, $9a_0a_3 = 9 \cdot (-200) = -1800$,
$a_1a_2 < 9a_0a_3$;

4) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$,
$f(x) = (x+1)^2(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$,
$a_3 = 1$, $a_2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_0 = -1$,

$a_1a_2 = -1$, $9a_0a_3 = -9$,
$a_1a_2 > 9a_0a_3$.

W trzeciej części tej pracy podaliśmy siedem zadań olimpijskich lub konkursowych i sformułowaliśmy dla każdego z nich pewną liczbę pytań, problemów lub zadań otwartych. Uważamy, że nauczyciel prowadzący zajęcia z tego zakresu może zorganizować taką sytuację dydaktyczną, aby uczniowie (studenci) samodzielnie podejmowali próby formułowania i rozwiązywania problemów i zadań otwartych na bazie tych podstawowych zadań przedstawionych w artykule. Warto tutaj zacytować słowa A. Pardały (2009): *Uczeń, otrzymując zadanie otwarte, ma wrażenie robienia rzeczy nowych oraz bardzo emocjonalnie podchodzi do osiągniętych tu wyników stwierdzając jedynie: „rozwiązałem", „znalazłem"*. Jeżeli rzeczywiście uczeń w ten sposób potrafi przeżywać satysfakcję z osiąganych wyników, oznacza to dobrą prognozę dotyczącą podejmowania przez niego dalszej działalności twórczej w matematyce.

Literatura

Beddou, L., Mauduit, C.: 2001, Research as a method of the teaching mathematics (Descriptions of the program “Math en Jeans”), *Proceedings of the conference: Science and mathematics teaching for the information society, Toruń, Poland, 19-22 July 2000*, 11–25.

Ciosek, M.: 1988, Poszukiwanie rozwiązania zadania na różnych poziomach matematycznego doświadczenia, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **9**, 125–172.

Ciosek, M.: 1995, O roli przykładów w badaniu matematycznym, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **17**, 5–85.

Gdowski, B., Pluciński, E.: 1999, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Gleichgewicht, B.: 2004, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.

Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2009, Modernisation and Innovation of the Calculus Teaching, in: M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč (ed.), *Teaching Mathematics: innovation, new trends, research*, Katolícka univerzita, Ružomberok, 89–103.

Gunčaga, J., Majherová, J.: 2012, GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia, *North American GeoGebra Journal* **1**(1), 45–48.

Kostrikin, A. I.: 2004, *Wstęp do algebry. Podstawy algebry*, PWN, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25–41.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K.: 2005, *Matematyczne myślenie*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna, Warszawa.

Mikołajczyk, M.: 2012, *Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki (praca zbiorowa)*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

Mostowski, A., Stark, M.: 1970, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa.

Mostowski, A. W.: 1967, *Rozwiązywanie równań algebraicznych*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Pardała, A.: 2009, Praktyka kształtowania matematycznej twórczości uczniów, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **II**, 159–181.

Pawłowski, H.: 1994, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, TURPRESS, Toruń.

Płonka, E.: 2000, *Wykłady z algebry wyższej I*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

Ross, K. A., Wright, C. R. B.: 1996, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa.

Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc., Orlando.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Zaręba, L.: 2012, *Matematyczne uogólniania. Możliwości uczniów i praktyka nauczania*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail antoni.chronowski@interia.pl
e-mail zpowazka@gmail.com