Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Antoni Chronowski

Przekształcenia wykresów funkcji

Abstract. This article is concerned with some topics of the transformations of the graphs of functions. It is designated to serve as a text for the students of mathematics (prospective teachers) and the teachers of mathematics.

In this paper we give the answer to the following problem:

Given the graph of the function $f\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}$. Construct the graph of the function $F\colon \mathcal{R} \supseteq D_F \longrightarrow \mathcal{R}$ defined by the rule $F(x) = cf(ax+b)+d$, where $a, c \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, $b, d \in \mathcal{R}$ are constant numbers and $D_F = \{x \in \mathcal{R}: \ ax+b \in D_f\}$.

Some connections between the oddness, the evenness, and the periodicity of the functions f and F are considered. The arrangement of the theoretical topics is a didactic suggestion for school teaching concerning the transformations of the graphs of functions.

1. Grupa przekształceń

Artykuł stanowi propozycję opracowania zagadnień teoretycznych związanych z przekształceniami wykresów funkcji. Skierowany jest przede wszystkim do studentów matematyki (przyszłych nauczycieli) i nauczycieli matematyki. Przekształcenia wykresów funkcji są rozważane w szkole średniej, a także na początku nauczania analizy matematycznej na studiach. Podstawy teoretyczne zagadnień z matematyki występujących w programie szkolnym są źródłem ciekawych problemów, które może zaproponować uczniom w trakcie nauczania matematyki.

Prezentowany artykuł nie jest konspektem do tematu dotyczącego przekształcania wykresów funkcji, ale elementarne opracowanie teorii tego zagadnienia i układ zawartych w nim treści wyraźnie sugerują rozwiązania dydaktyczne, które nauczyciel może wykorzystać na zajęciach z uczniami.

Definicja 1.1
Dana jest płaszczyzna E. Każdą funkcję $\varphi\colon E \longrightarrow E$ nazywamy *przekształceniem płaszczyzny E*.

DEFINICJA 1.2
Niech $\mathcal{G}$ będzie pewnym niepustym zbiorem przekształceń wzajemnie jednoznacznych płaszczyzny E na płaszczyznę E. Symbolem $\circ$ oznaczamy składanie (superpozycję) przekształceń. Parę $(\mathcal{G}, \circ)$ nazywamy *grupą przekształceń płaszczyzny* E, gdy spełnione są następujące warunki:

(a) jeżeli $\varphi \in \mathcal{G}$ i $\psi \in \mathcal{G}$, to $\varphi \circ \psi \in \mathcal{G}$;

(b) jeżeli $\varphi \in \mathcal{G}$, to przekształcenie odwrotne $\varphi^{-1} \in \mathcal{G}$.

Jeżeli składanie $\circ$ przekształceń w grupie $(\mathcal{G}, \circ)$ jest przemienne, to grupę $(\mathcal{G}, \circ)$ *nazywamy przemienną grupą przekształceń.*

W zapisie $(\mathcal{G}, \circ)$ grupy przekształceń będziemy na ogół pomijać symbol $\circ$ składania przekształceń. Niech I_E oznacza przekształcenie tożsamościowe płaszczyzny E, czyli $I_E(X) = X$ dla każdego punktu $X \in E$. Jeżeli $\mathcal{G}$ jest grupą przekształceń płaszczyzny E, to istnieje przekształcenie $\varphi \in \mathcal{G}$, a więc $\varphi^{-1} \in \mathcal{G}$ na mocy warunku (b) definicji 1.2. Z warunku (a) definicji 1.2 wynika, że $I_E = \varphi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}$.

Na płaszczyźnie E ustalamy prostokątny układ współrzędnych Oxy. Wówczas każdy punkt X płaszczyzny E jest jednoznacznie wyznaczony przez współrzędne (x, y) punktu X w prostokątnym układzie Oxy. Wobec tego w rozważaniach matematycznych często utożsamiamy punkt X i jego współrzędne (x, y), pisząc $X = (x, y)$.

Symbolem $\mathcal{R}$ będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych. Niech $X = (x, y)$ i $X' = (x', y')$ będą punktami płaszczyzny E. Zakładamy, że dane są funkcje $f_1 \colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ i $f_2 \colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Określamy przekształcenie $\varphi \colon E \longrightarrow E$ następująco:

$$\varphi(X) = X' \iff [x' = f_1(x, y) \wedge y' = f_2(x, y)].$$

W tym przypadku mówimy, że przekształcenie φ płaszczyzny E jest *określone za pomocą układu równań*:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y). \end{cases}$$

2. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny

DEFINICJA 2.1
Przekształceniem afinicznym płaszczyzny E nazywamy przekształcenie określone układem równań:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \tag{1}$$

dla $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$, przy czym $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Twierdzenie 2.2
Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny E, ze składaniem przekształceń, stanowi grupę przekształceń płaszczyzny E.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć np. w książce (**?**).

3. Translacja płaszczyzny

Definicja 3.1
Na płaszczyźnie E dany jest wektor swobodny $\overrightarrow{w}$. *Translacją* (lub *przesunięciem równoległym*) płaszczyzny E o wektor $\overrightarrow{w}$ nazywamy przekształcenie $T_{\vec{w}}\colon E \longrightarrow E$, w którym obrazem punktu X jest punkt X' taki, że $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{w}$, czyli

$$T_{\overrightarrow{w}}(X) = X' \iff \overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{w}.$$

Niech w prostokątnym układzie Oxy na płaszczyźnie E wektor $\overrightarrow{w}$ ma współrzędne a i b, punkt X płaszczyzny E – współrzędne x i y, a obraz X' w translacji o wektor $\overrightarrow{w}$ punktu X – współrzędne x' i y'. Wobec tego $\overrightarrow{w} = [a,b]$, $X = (x,y)$, $X' = (x',y')$, $\overrightarrow{XX'} = [x'-x, y'-y]$. Ponieważ $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{w}$, więc $x' - x = a$ i $y' - y = b$. Zatem

$$T_{\overrightarrow{w}}: \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \tag{2}$$

Wzory (2) określają *translację* $T_{\overrightarrow{w}}$ płaszczyzny E o wektor $\overrightarrow{w} = [a,b]$.
Jeżeli $\overrightarrow{w}$ jest wektorem zerowym, czyli $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} = [0,0]$, to $T_{\overrightarrow{0}} = I_E$.
Niech na płaszczyźnie E dane będą dwa wektory $\overrightarrow{w} = [a,b]$ i $\overrightarrow{u} = [c,d]$. Rozważmy translacje $T_{\overrightarrow{w}}$ i $T_{\overrightarrow{u}}$ określone wzorami:

$$T_{\overrightarrow{w}}: \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \qquad T_{\overrightarrow{u}}: \begin{cases} x'' = x' + c, \\ y'' = y' + d. \end{cases}$$

Złożenie $T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{w}}$ translacji $T_{\overrightarrow{w}}$ i $T_{\overrightarrow{u}}$ określone jest wzorami:

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{w}}: \begin{cases} x'' = x + (a + c), \\ y'' = y + (b + d). \end{cases}$$

Wobec tego

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}}.$$

Zauważmy, że składanie translacji jest przemienne, gdyż

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{w}} \circ T_{\overrightarrow{u}}.$$

Przekształceniem odwrotnym $T_{\overrightarrow{w}}^{-1}$ do translacji $T_{\overrightarrow{w}}$ danej wzorami (2) jest translacja określona wzorami:

$$T_{\vec{w}}^{-1}: \begin{cases} x = x' - a, \\ y = y' - b. \end{cases}$$

Wobec tego

$$T_{\overrightarrow{w}}^{-1} = T_{-\overrightarrow{w}}.$$

Symbolem $\mathcal{T}$ oznaczamy zbiór wszystkich translacji płaszczyzny E.

Na mocy powyższych rozważań otrzymujemy następujące

Twierdzenie 3.2
Zbiór $\mathcal{T}$ wszystkich translacji płaszczyzny E, ze składaniem przekształceń, jest przemienną grupą przekształceń płaszczyzny E.

Ponieważ każda translacja jest przekształceniem afinicznym płaszczyzny E, więc grupa $\mathcal{T}$ jest *podgrupą* grupy $\mathcal{A}$ wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny E.

4. Powinowactwo prostokątne

Definicja 4.1
Powinowactwem prostokątnym o osi a i stosunku $s \neq 0$ nazywamy przekształcenie $P_a^s\colon E \longrightarrow E$ płaszczyzny E w płaszczyznę E, w którym każdemu punktowi X przyporządkowany jest punkt X' taki, że

$$\overrightarrow{X^a X'} = s \cdot \overrightarrow{X^a X}, \tag{3}$$

gdzie X^a oznacza rzut prostokątny punktu X na prostą a. Prostą a nazywamy *osią powinowactwa* P_a^s.

1. **Powinowactwo prostokątne o osi $\boldsymbol{Ox}$.** Na płaszczyźnie E ustalamy prostokątny układ współrzędnych Oxy. Rozważmy powinowactwo prostokątne P_{Ox}^s o osi Ox i stosunku s. Niech $X = (x, y)$ i $X' = (x', y')$. Wówczas $X^{Ox} = (x, 0)$. Równość (3) można zapisać w postaci:

$$[x' - x, y'] = s \cdot [0, y].$$

Wobec tego wzory

$$P_{Ox}^s: \begin{cases} x' = x, \\ y' = sy \end{cases} \tag{4}$$

określają powinowactwo P_{Ox}^s o osi Ox i stosunku s. Łatwo zauważyć, że powinowactwo P_{Ox}^s jest *przekształceniem afinicznym* płaszczyzny E.

Jeżeli $s = 1$, to powinowactwo P_{Ox}^1 jest przekształceniem *tożsamościowym* płaszczyzny E. Jeżeli $s = -1$, to powinowactwo P_{Ox}^{-1} jest *symetrią osiową* o osi Ox na płaszczyźnie E. Jeżeli $s \neq 1$, to $P_{Ox}^s(X) = X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = 0$, czyli gdy punkt X należy do osi Ox. Zatem *oś Ox jest zbiorem punktów stałych każdego powinowactwa P_{Ox}^s o osi Ox i stosunku s.*

Przekształcenie odwrotne $(P^s_{Ox})^{-1}$ do powinowactwa (4) określają wzory:

$$(P^s_{Ox})^{-1}: \begin{cases} x = x', \\ y = \frac{1}{s}y'. \end{cases} \tag{5}$$

Wobec tego $(P^s_{Ox})^{-1} = P^{\frac{1}{s}}_{Ox}$, czyli przekształceniem odwrotnym do powinowactwa P^s_{Ox} o osi Ox i stosunku s jest powinowactwo $P^{\frac{1}{s}}_{Ox}$ o osi Ox i stosunku $\frac{1}{s}$.

Rozważmy powinowactwo prostokątne P^t_{Ox} o osi Ox i stosunku t określone za pomocą wzorów:

$$P^t_{Ox}: \begin{cases} x'' = x', \\ y'' = ty'. \end{cases} \tag{6}$$

Złożenie dwóch powinowactw prostokątnych P^s_{Ox} i P^t_{Ox} jest powinowactwem prostokątnym określonym za pomocą wzorów:

$$P^t_{Ox} \circ P^s_{Ox}: \begin{cases} x'' = x, \\ y'' = (st)y. \end{cases} \tag{7}$$

Wobec tego $P^t_{Ox} \circ P^s_{Ox} = P^{st}_{Ox}$. Łatwo zauważyć, że składanie powinowactw o osi Ox jest przemienne.

Niech $\mathcal{P}_{Ox}$ oznacza zbiór wszystkich powinowactw o osi Ox na płaszczyźnie E.

Na mocy powyższych rezultatów otrzymaliśmy następujące

Twierdzenie 4.2
Zbiór $\mathcal{P}_{Ox}$ wszystkich powinowactw o osi Ox na płaszczyźnie E, ze składaniem przekształceń, jest przemienną grupą przekształceń płaszczyzny E.

Ponieważ każde powinowactwo o osi Ox na płaszczyźnie E jest przekształceniem afinicznym płaszczyzny E, więc grupa $\mathcal{P}_{Ox}$ jest *podgrupą* grupy $\mathcal{A}$ wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny E.

2. **Powinowactwo prostokątne o osi $\boldsymbol{Oy}$.** Na płaszczyźnie E ustalamy prostokątny układ współrzędnych Oxy. Rozważmy powinowactwo prostokątne P^s_{Oy} o osi Oy i stosunku s. Niech $X = (x, y)$ i $X' = (x', y')$. Wówczas $X^{Oy} = (0, y)$. Równość (3) można zapisać w postaci:

$$[x', y' - y] = s \cdot [x, 0].$$

Wobec tego wzory

$$P^s_{Oy}: \begin{cases} x' = sx, \\ y' = y \end{cases} \tag{8}$$

określają powinowactwo P^s_{Oy} o osi Oy i stosunku s. Łatwo zauważyć, że powinowactwo P^s_{Oy} jest *przekształceniem afinicznym* płaszczyzny E.

Niech $\mathcal{P}_{Oy}$ oznacza zbiór wszystkich powinowactw o osi Oy na płaszczyźnie E.

Własności powinowactw prostokątnych o osi Oy są analogiczne do własności powinowactw prostokątnych o osi Ox.

Wynika z nich następujące

Twierdzenie 4.3
Zbiór $\mathcal{P}_{Oy}$ wszystkich powinowactw o osi Oy na płaszczyźnie E, ze składaniem przekształceń, jest przemienną grupą przekształceń płaszczyzny E.

Ponieważ każde powinowactwo o osi Oy na płaszczyźnie E jest przekształceniem afinicznym płaszczyzny E, więc grupa $\mathcal{P}_{Oy}$ jest *podgrupą* grupy $\mathcal{A}$ wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny E.

5. Wykresy funkcji

Jeżeli f jest funkcją o dziedzinie $D_f \subseteq \mathcal{R}$ i wartościach będących liczbami rzeczywistymi, to będziemy symbolicznie zapisywać:

$$f\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Jeżeli $D_f = \mathcal{R}$, to zapisujemy $f\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Będziemy rozważać jedynie funkcje o niepustej dziedzinie.

Definicja 5.1
Dana jest funkcja $f\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}$. *Wykresem funkcji f*, na płaszczyźnie E z prostokątnym układem współrzędnych Oxy, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny E postaci $X = (x, f(x))$ dla każdej liczby $x \in D_f$.

Przyjmujemy umowę, że argumenty funkcji $f\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}$ są na osi odciętych Ox, a wartości funkcji f są na osi rzędnych Oy.

W matematyce szkolnej i wyższej spotykamy się z następującym zagadnieniem: *Stosując odpowiednie przekształcenia geometryczne płaszczyzny skonstruować wykres funkcji F, mając dany wykres funkcji f.*

Na przykład, mając wykres funkcji $f(x) = \sin x$ naszkicować wykres funkcji $F(x) = 2\sin(3x + \frac{\pi}{2}) + 1$ dla $x \in \mathcal{R}$.

Można sformułować tezę, że we współczesnym nauczaniu zagadnienia konstruowania wykresów funkcji straciły na znaczeniu, gdyż istnieje wiele programów komputerowych pozwalających sporządzać wykresy nie tylko elementarnych funkcji, ale również funkcji określonych skomplikowanymi wzorami. Programy komputerowe i kalkulatory graficzne są ważnymi narzędziami w nauczaniu o funkcjach i ich wykresach, ale nie mogą zastąpić procesów myślowych, które są charakterystyczne dla rozumowań matematycznych. Uczniowie, a także studenci matematyki muszą umieć powiązać własności funkcji z własnościami wykresów tych funkcji. Zagadnienia tego typu najczęściej są rozważane w nauczaniu analizy matematycznej, ale występują również w innych dziedzinach matematyki.

Oto przykład z algebry. Rozważmy zbiory $C_{\langle 0,1\rangle}$ i $C_{\langle 0,3\rangle}$ wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych określonych odpowiednio na przedziałach domkniętych $\langle 0,1\rangle$ i $\langle 0,3\rangle$. Zbiory $C_{\langle 0,1\rangle}$ i $C_{\langle 0,3\rangle}$ ze zwykłym działaniem dodawania $+$ funkcji są grupami. Można wykazać, że grupy $(C_{\langle 0,1\rangle},+)$ i $(C_{\langle 0,3\rangle},+)$ są izomorficzne (zob. **?**).

Izomorfizm $\varphi\colon C_{\langle 0,1\rangle} \longrightarrow C_{\langle 0,3\rangle}$ jest określony następująco:

$$(\varphi[f])(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

dla dowolnej funkcji $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$ i dowolnego $x \in \langle 0,3\rangle$.

Pomysł takiego określenia izomorfizmu φ wynika z faktu, że wykres funkcji $\varphi[f] \in C_{\langle 0,3\rangle}$ powstaje z wykresu funkcji $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$ przez przekształcenie geometryczne (powinowactwo prostokątne o osi Oy i skali 3) polegające na takim „równomiernym rozciągnięciu” wykresu funkcji ciągłej f określonej na przedziale $\langle 0,1\rangle$, aby otrzymać wykres funkcji ciągłej $\varphi[f]$ określonej na przedziale $\langle 0,3\rangle$.

Najczęściej spotykane zagadnienie dotyczące przekształcania wykresów funkcji można sformułować następująco:

Problem 5.2
Dany jest wykres funkcji $f\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}$, sporządzić wykres funkcji $F\colon \mathcal{R} \supseteq D_F \longrightarrow \mathcal{R}$ określonej wzorem $F(x) = cf(ax+b)+d$, gdzie $a,c \in \mathcal{R}\setminus\{0\}$ oraz $b,d \in \mathcal{R}$ są ustalonymi liczbami oraz $D_F = \{x \in \mathcal{R} :\ ax+b \in D_f\}$.

W dalszej części pracy zajmiemy się przede wszystkim tym problemem i jego szczególnymi przypadkami. Symbole f i F będą zawsze oznaczać funkcje określone w powyższym problemie.

6. Wykres funkcji F

Dana jest funkcja f, rozważmy dwie funkcje $g\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ oraz $h\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ określone wzorami $g(x) = ax+b$ i $h(x) = cx+d$, gdzie $a \neq 0$ i $c \neq 0$. Wtedy $F = h \circ f \circ g$, a więc

$$F(x) = cf(ax+b)+d,$$

gdzie $D_F = \{x \in \mathcal{R} :\ ax+b \in D_f\}$.

Przyjmijmy, że $ax+b = z$, stąd $x = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$. Ponieważ $f(ax+b) = \frac{1}{c}F(x) - \frac{d}{c}$, więc $f(z) = \frac{1}{c}F(\frac{1}{a}z - \frac{b}{a}) - \frac{d}{c}$. Zmieniając zmienną z na x otrzymujemy

$$f(x) = \frac{1}{c}F\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) - \frac{d}{c},$$

gdzie $D_f = \{x \in \mathcal{R} :\ \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \in D_F\}$.

Na mocy powyższych rozważań mamy:

$$x \in D_F \iff ax + b \in D_f\,,$$
$$x \in D_f \iff \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \in D_F$$

dla $x \in \mathcal{R}$.

TWIERDZENIE 6.1
Punkt $X' = (x', y')$ należy do wykresu funkcji F wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $X = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f taki, że spełniony jest następujący warunek:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}(x - b), \\ y' = cy + d. \end{cases} \tag{9}$$

Dowód. Zakładamy, że punkt $X' = (x', y')$ należy do wykresu funkcji F. Wówczas

$$y' = F(x'),$$

czyli

$$y' = cf(ax' + b) + d. \tag{10}$$

Wykażemy, że punkt $X = (x, y)$ o współrzędnych x i y określonych równościami

$$\begin{cases} x = ax' + b, \\ y = \frac{1}{c}(y' - d) \end{cases} \tag{11}$$

należy do wykresu funkcji f. Istotnie, z równości (10) wynika, że $\frac{1}{c}(y' - d) = f(ax' + b)$, a więc $y = f(x)$ na mocy równości (11), czyli punkt $X = (x, y)$ należy do wykresu funkcji f. Dokonując prostych przekształceń równości (11) otrzymujemy (9).

Odwrotnie, zakładamy, że istnieje punkt $X = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f i spełniający równości (9). Stąd wynika, że $y = f(x)$. Zauważmy, że punkt $X' = (x', y')$ należy do wykresu funkcji F. Istotnie,

$$F(x') = cf\left(a\frac{1}{a}(x - b) + b\right) + d = cf(x) + d = cy + d = y'.$$

Korzystając z definicji 2.1 łatwo sprawdzić, że wzory (9) określają przekształcenie afiniczne płaszczyzny E. Przekształcenie afiniczne odwrotne do przekształcenia (9) jest określone wzorami (11).

Wobec tego na mocy twierdzenia 6.1 otrzymujemy następujący

WNIOSEK 6.2
Wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w przekształceniu afinicznym (9)*, natomiast wykres funkcji f jest obrazem wykresu funkcji F w przekształceniu afinicznym odwrotnym do przekształcenia* (9).

Przeprowadzimy analizę wzorów (9) określających przekształcenie afiniczne, w którym obrazem wykresu funkcji f jest wykres funkcji F.

Wzory (9) zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}, \\ y' = cy + d. \end{cases} \tag{12}$$

Najpierw rozważymy cztery szczególne przypadki przekształcenia afinicznego (12).

(W1) Funkcja postaci $F(x) = f(x + b)$. Ponieważ $a = c = 1$ i $d = 0$, więc wzory (12) mają postać:

$$\begin{cases} x' = x - b, \\ y' = y. \end{cases}$$

W tym przypadku wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w translacji $T_{[-b,0]}$.

(W2) Funkcja postaci $F(x) = f(x) + d$. Ponieważ $a = c = 1$ i $b = 0$, więc wzory (12) mają postać:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + d. \end{cases}$$

W tym przypadku wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w translacji $T_{[0,d]}$.

(W3) Funkcja postaci $F(x) = f(ax)$. Ponieważ $c = 1$ i $b = d = 0$, więc wzory (12) mają postać:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}x, \\ y' = y. \end{cases}$$

W tym przypadku wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w powinowactwie prostokątnym $P_{Oy}^{\frac{1}{a}}$.

(W4) Funkcja postaci $F(x) = cf(x)$. Ponieważ $a = 1$ i $b = d = 0$, więc wzory (12) mają postać:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = cy. \end{cases}$$

W tym przypadku wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w powinowactwie prostokątnym P_{Ox}^{c}.

Rolę i znaczenie przekształceń określonych warunkami (W1) - (W4) wyjaśnia następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.3
Punkt $X' = (x', y')$ należy do wykresu funkcji F wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $X = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f taki, że

$$(x', y') = (T_{[0,d]} \circ P^{c}_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]})(x, y). \tag{13}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(T_{[0,d]} \circ P^{c}_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]})(x, y) &= (T_{[0,d]} \circ P^{c}_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy})(x - b, y)\\ &= (T_{[0,d]} \circ P^{c}_{Ox})\left(\frac{1}{a}(x - b), y\right)\\ &= (T_{[0,d]})\left(\frac{1}{a}(x - b), cy\right)\\ &= \left(\frac{1}{a}(x - b), cy + d\right)\\ &= (x', y').\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}(x - b),\\ y' = cy + d.\end{cases}$$

Następnie wystarczy zastosować twierdzenie 6.1.

Korzystając z (13) rozważmy teraz następujące przekształcenie afiniczne płaszczyzny E:

$$\Phi = T_{[0,d]} \circ P^{c}_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]}. \tag{14}$$

Z twierdzenia 6.3 wynika następujący

Wniosek 6.4
Wykres funkcji F jest obrazem wykresu funkcji f w przekształceniu afinicznym (14)*, natomiast wykres funkcji f jest obrazem wykresu funkcji F w przekształceniu afinicznym odwrotnym do przekształcenia* (14)*.*

Na podstawie wniosku 6.4 można ustalić następującą regułę:

> *Aby wykonać wykres funkcji F należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:*
>
> 1) *translację o wektor $\vec{u} = [-b, 0]$,*
> 2) *powinowactwo prostokątne o osi Oy i stosunku $s = \frac{1}{a}$,*
> 3) *powinowactwo prostokątne o osi Ox i stosunku $s = c$,*
> 4) *translację o wektor $\vec{w} = [0, d]$.*

Poprzednio rozważyliśmy cztery podstawowe, szczególne przypadki (W1)-(W4) postaci funkcji F. Obecnie będziemy analizować następne sześć przypadków funkcji F, które często pojawiają się przy przekształcaniu wykresów funkcji f.

(W5) Jeżeli $a = c = 1$, to funkcja F ma postać $F(x) = f(x+b)+d$. Ponieważ $P^c_{Ox} = P^{\frac{1}{a}}_{Oy} = I_E$, więc

$$\Phi = T_{[0,d]} \circ T_{[-b,0]}.$$

Z twierdzenia 3.2 wynika, że

$$T_{[0,d]} \circ T_{[-b,0]} = T_{[-b,0]} \circ T_{[0,d]}.$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F, należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:

1) *translację o wektor* $\overrightarrow{u} = [-b, 0]$,
2) *translację o wektor* $\overrightarrow{w} = [0, d]$

lub

1) *translację o wektor* $\overrightarrow{w} = [0, d]$,
2) *translację o wektor* $\overrightarrow{u} = [-b, 0]$.

(W6) Jeżeli $c = 1$ i $d = 0$, to funkcja F ma postać $F(x) = f(ax+b)$. Ponieważ $P^c_{Ox} = T_{[0,d]} = I_E$, więc

$$\Phi = P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]}.$$

Udowodnimy, że

$$P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]} = T_{[-\frac{b}{a},0]} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy}.$$

Niech $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. Wówczas

$$\begin{aligned}
(P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[-b,0]})(x,y) &= P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(T_{[-b,0]}(x,y)) = P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(x-b,y) \\
&= \left(\frac{1}{a}(x-b), y\right) = \left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}, y\right) \\
&= T_{[-\frac{a}{b},0]}\left(\frac{1}{a}x, y\right) = T_{[-\frac{a}{b},0]}(P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(x,y)) \\
&= (T_{[-\frac{b}{a},0]} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy})(x,y).
\end{aligned}$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:

1) *translację o wektor* $\vec{u} = [-b, 0]$,

2) *powinowactwo prostokątne o osi* Oy *i stosunku* $s = \frac{1}{a}$

lub

1) *powinowactwo prostokątne o osi* Oy *i stosunku* $s = \frac{1}{a}$,

2) *translację o wektor* $\vec{v} = [-\frac{b}{a}, 0]$.

(W7) Jeżeli $a = 1$ i $d = 0$, to funkcja F ma postać $F(x) = cf(x+b)$. Ponieważ $P^{\frac{1}{a}}_{Oy} = T_{[0,d]} = I_E$, więc

$$\Phi = P^c_{Ox} \circ T_{[-b,0]}.$$

Udowodnimy, że

$$P^c_{Ox} \circ T_{[-b,0]} = T_{[-b,0]} \circ P^c_{Ox} .$$

Niech $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. Wówczas

$$\begin{aligned}(P^c_{Ox} \circ T_{[-b,0]})(x, y) &= P^c_{Ox}(T_{[-b,0]}(x, y)) = P^c_{Ox}(x - b, y) = (x - b, cy)\\ &= T_{[-b,0]}(x, cy) = T_{[-b,0]}(P^c_{Ox}(x, y))\\ &= (T_{[-b,0]} \circ P^c_{Ox})(x, y).\end{aligned}$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F *należy do wykresu funkcji* f *zastosować kolejno następujące przekształcenia:*

1) *translację o wektor* $\vec{u} = [-b, 0]$,

2) *powinowactwo prostokątne o osi* Ox *i stosunku* $s = c$

lub

1) *powinowactwo prostokątne o osi* Ox *i stosunku* $s = c$,

2) *translację o wektor* $\vec{u} = [-b, 0]$.

(W8) Jeżeli $c = 1$ i $b = 0$, to funkcja F ma postać $F(x) = f(ax)+d$. Ponieważ $P^c_{Ox} = T_{[-b,0]} = I_E$, więc

$$\Phi = T_{[0,d]} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy}.$$

Udowodnimy, że

$$T_{[0,d]} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} = P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ T_{[0,d]}.$$

Niech $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. Wówczas

$$\begin{aligned}(T_{[0,d]} \circ P_{Oy}^{\frac{1}{a}})(x,y) &= T_{[0,d]}(P_{Oy}^{\frac{1}{a}}(x,y)) = T_{[0,d]}(\frac{1}{a}x, y) = (\frac{1}{a}x, y+d)\\ &= P_{Oy}^{\frac{1}{a}}(x, y+d) = P_{Oy}^{\frac{1}{a}}(T_{[0,d]}(x,y))\\ &= (P_{Oy}^{\frac{1}{a}} \circ T_{[0,d]})(x,y).\end{aligned}$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:

1) *powinowactwo prostokątne o osi Oy i stosunku $s = \frac{1}{a}$,*
2) *translację o wektor $\vec{w} = [0, d]$*

lub

1) *translację o wektor $\vec{w} = [0, d]$,*
2) *powinowactwo prostokątne o osi Oy i stosunku $s = \frac{1}{a}$.*

(W9) Jeżeli $a = 1$ i $b = 0$, to funkcja F ma postać $F(x) = cf(x) + d$. Ponieważ $P_{Oy}^{\frac{1}{a}} = T_{[-b,0]} = I_E$, więc

$$\Phi = T_{[0,d]} \circ P_{Ox}^{c}\,.$$

Udowodnimy, że

$$T_{[0,d]} \circ P_{Ox}^{c} = P_{Ox}^{c} \circ T_{[0,\frac{d}{c}]}.$$

Niech $(x,y) \in \mathcal{R}^2$. Wówczas

$$\begin{aligned}(T_{[0,d]} \circ P_{Ox}^{c})(x,y) &= T_{[0,d]}(P_{Ox}^{c}(x,y)) = T_{[0,d]}(x, cy) = (x, cy+d)\\ &= P_{Ox}^{c}\left(x, y+\frac{d}{c}\right) = P_{Ox}^{c}(T_{[0,\frac{d}{c}]}(x,y))\\ &= (P_{Ox}^{c} \circ T_{[0,\frac{d}{c}]})(x,y).\end{aligned}$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:

1) *powinowactwo prostokątne o osi Ox i stosunku $s = c$,*
2) *translację o wektor $\vec{w} = [0, d]$*

lub

1) *translację o wektor $\vec{v} = [0, \frac{d}{c}]$,*
2) *powinowactwo prostokątne o osi Ox i stosunku $s = c$.*

(W10) Jeżeli $b = d = 0$, to funkcja F ma postać $F(x) = cf(ax)$. Ponieważ $T_{[0,d]} = T_{[-b,0]} = I_E$, więc

$$\Phi = P^c_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} .$$

Udowodnimy, że

$$P^c_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy} = P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ P^c_{Ox} .$$

Niech $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. Wówczas

$$\begin{aligned}(P^c_{Ox} \circ P^{\frac{1}{a}}_{Oy})(x, y) &= P^c_{Ox}(P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(x, y)) = P^c_{Ox}\left(\frac{1}{a}x, y\right) = \left(\frac{1}{a}x, cy\right)\\ &= P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(x, cy) = P^{\frac{1}{a}}_{Oy}(P^c_{Ox}(x, y))\\ &= (P^{\frac{1}{a}}_{Oy} \circ P^c_{Ox})(x, y).\end{aligned}$$

W tym przypadku, aby wykonać wykres funkcji F należy do wykresu funkcji f zastosować kolejno następujące przekształcenia:

1) *powinowactwo prostokątne o osi Oy i stosunku $s = \frac{1}{a}$,*

2) *powinowactwo prostokątne o osi Ox i stosunku $s = c$*

lub

1) *powinowactwo prostokątne o osi Ox i stosunku $s = c$,*

2) *powinowactwo prostokątne o osi Oy i stosunku $s = \frac{1}{a}$.*

Opis pozostałych czterech przypadków postaci funkcji F, gdy jedno z przekształceń występujących we wzorze (14) jest tożsamością, wynika z poprzednich rozważań zawartych w przypadkach (W1)-(W10).

7. Podstawowe własności funkcji F

W tym paragrafie będziemy badać zależności między parzystością, nieparzystością i okresowością funkcji f i F.

Twierdzenie 7.1
Niech f będzie funkcją parzystą. Funkcja F jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, x \in D_F\ [ax - b \in D_f \wedge f(ax + b) = f(ax - b)]. \tag{15}$$

Dowód. Dowód. Zakładamy, że F jest funkcją parzystą, a więc

$$\forall\, x \in D_F\ [-x \in D_F \wedge F(x) = F(-x)].$$

Zauważmy, że $x \in D_F \iff ax + b \in D_f$ oraz $-x \in D_F \iff a(-x) + b \in D_f$. Zakładamy, że $x \in D_F$. Wówczas $-x \in D_F$, a więc $a(-x) + b \in D_f$. Ponieważ $a(-x) + b = -(ax - b)$, więc $ax - b \in D_f$ na mocy parzystości funkcji f. Z założenia, że $F(x) = F(-x)$ wynika, że $cf(ax + b) + d = cf(a(-x) + b) + d$, a stąd $f(ax+b) = f(a(-x)+b)$. Z parzystości funkcji f wynika, że $f(ax+b) = f(a(-x) + b) = f(-(ax - b)) = f(ax - b)$. Spełniony jest warunek (15).

Odwrotnie, zakładamy, że spełniony jest warunek (15). Jeżeli $x \in D_F$, to $ax - b \in D_f$ na mocy warunku (15). Z parzystości funkcji f wynika, że $-(ax - b) \in D_f$, czyli $a(-x) + b \in D_f$, a więc $-x \in D_F$. Na mocy warunku (15) i parzystości funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(x) &= cf(ax + b) + d = cf(ax - b) + d = cf(-(a(-x) + b)) + d \\ &= cf(a(-x) + b) + d \\ &= F(-x) \end{aligned}$$

dla każdego $x \in D_F$.

Bezpośrednio z twierdzenia 7.1 wynika następujący

Wniosek 7.2
Jeżeli f jest funkcją parzystą, to funkcja F dla $b = 0$, czyli $F(x) = cf(ax) + d$, jest funkcją parzystą.

Korzystając z twierdzenia 7.1, zbadać parzystość funkcji:

(a) $F(x) = 3\cos(2x + \pi) + 1,\ x \in \mathcal{R}$;

(b) $F(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 1,\ x \in \mathcal{R}$.

(a) Funkcja $f(x) = \cos x$ jest parzysta. Ponieważ $\cos(2x + \pi) = -\cos 2x = \cos(2x - \pi)$ dla $x \in \mathcal{R}$, więc funkcja F jest parzysta.

(b) Funkcja $f(x) = \cos x$ jest parzysta. Ponieważ $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ i $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ dla $x \in \mathcal{R}$, więc funkcja F nie jest parzysta.

Twierdzenie 7.3
Niech f będzie funkcją nieparzystą. Funkcja F jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, x \in D_F\ \left[ax - b \in D_f \wedge f(ax - b) - f(ax + b) = \frac{2d}{c}\right]. \tag{16}$$

Dowód. Zakładamy, że F jest funkcją nieparzystą, a więc

$$\forall\, x \in D_F\ [-x \in D_F \wedge F(-x) = -F(x)].$$

Zauważmy, że $x \in D_F \Longleftrightarrow ax + b \in D_f$ oraz $-x \in D_F \Longleftrightarrow a(-x) + b \in D_f$. Zakładamy, że $x \in D_F$. Wówczas $-x \in D_F$, a więc $a(-x) + b \in D_f$. Ponieważ $a(-x) + b = -(ax - b)$, więc $ax - b \in D_f$ na mocy nieparzystości funkcji f. Z założenia, że $F(-x) = -F(x)$ wynika, że $cf(a(-x)+b)+d = -cf(ax+b)-d$, a stąd $f(a(-x) + b) + f(ax + b) = \frac{-2d}{c}$. Z nieparzystości funkcji f wynika, że $f(a(-x)+b) = f(-(ax-b)) = -f(ax-b)$. Wobec tego $-f(ax-b)+f(ax+b) = \frac{-2d}{c}$, a więc $f(ax - b) - f(ax + b) = \frac{2d}{c}$. Spełniony jest warunek (16).

Odwrotnie, zakładamy, że spełniony jest warunek (16). Jeżeli $x \in D_F$, to $ax - b \in D_f$ na mocy warunku (16). Z nieparzystości funkcji f wynika, że $-(ax - b) \in D_f$, czyli $a(-x) + b \in D_f$, a więc $-x \in D_F$. Na mocy warunku (16) i nieparzystości funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(-x) &= cf(a(-x) + b) + d = cf(-(ax - b)) + d = -cf(ax - b) + d \\ &= -c\left(f(ax + b) + \frac{2d}{c}\right) + d = -cf(ax + b) - 2d + d \\ &= -cf(ax + b) - d = -(cf(ax + b) + d) \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

dla każdego $x \in D_F$.

Bezpośrednio z twierdzenia 7.3 wynika następujący

Wniosek 7.4
Jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to funkcja F dla $b = d = 0$, czyli $F(x) = cf(ax)$, jest funkcją nieparzystą.

Podamy przykład funkcji nieparzystych f i F spełniających warunk (16). Niech $f(x) = x$ i $F(x) = cf(ax + b) + d$ dla $x \in \mathcal{R}$, przy czym $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -2$. Zauważmy, że $f(ax - b) - f(ax + b) = f(3x - 1) - f(3x + 1) = 3x-1-3x-1 = -2$ oraz $\frac{2d}{c} = \frac{2\cdot(-2)}{2} = -2$. Zatem spełniony jest warunek (16). Funkcja F ma postać $F(x) = 6x$ dla $x \in \mathcal{R}$, a więc F jest funkcją nieparzystą.

Definicja 7.5
Funkcję $p\colon \mathcal{R} \supseteq D_f \longrightarrow \mathcal{R}$ nazywamy *okresową*, jeżeli spełniony jest następujący warunek:

$$\exists\, s \in \mathcal{R} \setminus \{0\}\ \ \forall\, x \in D_p\ [x + s \in D_p \wedge x - s \in D_p \wedge p(x + s) = p(x)].$$

Liczbę s nazywamy *okresem* funkcji p.

TWIERDZENIE 7.6
Jeżeli f jest funkcją okresową o okresie s, to F jest funkcją okresową o okresie $\frac{s}{a}$. Jeżeli F jest funkcją okresową o okresie s, to f jest funkcją okresową o okresie as.

Dowód. Najpierw zakładamy, że f jest funkcją okresową o okresie s. Mamy wykazać, że

$$\forall\, x \in D_F \ \left[x + \frac{s}{a} \in D_F \wedge x - \frac{s}{a} \in D_F \wedge F\left(x + \frac{s}{a}\right) = F(x)\right].$$

Zakładamy, że $x \in D_F$. Wówczas

$$\begin{aligned} x \in D_F &\Longrightarrow ax + b \in D_f \Longrightarrow [(ax+b) + s \in D_f \wedge (ax+b) - s \in D_f] \\ &\Longrightarrow \left[a\left(x + \frac{s}{a}\right) + b \in D_f \wedge a\left(x - \frac{s}{a}\right) + b \in D_f\right] \\ &\Longrightarrow \left[x + \frac{s}{a} \in D_F \wedge x - \frac{s}{a} \in D_F\right]. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} F(x) &= cf(ax+b) + d = cf((ax+b)+s) + d \\ &= cf((ax+s)+b) + d = cf\left(a\left(x + \frac{s}{a}\right) + b\right) + d \\ &= F\left(x + \frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

Zatem F jest funkcją okresową o okresie $\frac{s}{a}$.

Następnie zakładamy, że F jest funkcją okresową o okresie s. Mamy wykazać, że

$$\forall\, x \in D_f \ [x + as \in D_f \wedge x - as \in D_f \wedge f(x+as) = f(x)].$$

Zakładamy, że $x \in D_f$. Wówczas

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Longrightarrow \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \in D_F \\ &\Longrightarrow \left[\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) + s \in D_F \wedge \left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) - s \in D_F\right] \\ &\Longrightarrow \left[a\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} + s\right) + b \in D_f \wedge a\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} - s\right) + b \in D_f\right] \\ &\Longrightarrow [x + as \in D_f \wedge x - as \in D_f]. \end{aligned}$$

Ponadto

$$f(x) = \frac{1}{c}F\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) - \frac{d}{c} = \frac{1}{c}F\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} + s\right) - \frac{d}{c}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}F\left(\frac{1}{a}(x+as) - \frac{b}{a}\right) - \frac{d}{c} \\
&= f(x+as).
\end{aligned}
$$

Zatem f jest funkcją okresową o okresie as.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@ap.krakow.pl