FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

Michał Biesiada, Jan Górowski, Adam Łomnicki

Nowe cechy równoboczności trójkątów*

Abstract. In this paper the authors formulate and prove several conditions for triangle to be equilateral. These conditions are associated with Gergonne, Nagel and Torricelli points and were obtained by composing and solving the so-called 'enforcement tasks'. Both, the method and the results, can be used to trigger some mathematical student activities at different levels of education or even some teacher activities.

W artykułach (Górowski, Klakla, Łomnicki, 2004; Górowski, Klakla, Łomnicki, 2011; Górowski, Łomnicki, 2012; Górowski, Łomnicki, Żabowski, 2013) sformułowano i udowodniono szereg cech równoboczności trójkątów. Uzyskano te twierdzenia na drodze układania i rozwiązywania tzw. zadań na wymuszanie.

Przykładami takich cech są następujące:

- Trójkąt jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy pokrywają się w nim którekolwiek dwa z jego następujących punktów charakterystycznych: środek ciężkości, ortocentrum, środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego.
- Trójkąt jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy promień okręgu opisanego na nim jest dwukrotnie dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

W tym artykule podamy i udowodnimy kilka dalszych cech równoboczności trójkąta, związanych z punktami Gergonne'a[1], Nagela i Torricellego. Zaznaczmy, że materiał ten mógłby – naszym zdaniem – być wykorzystywany na zajęciach ze studentami matematyki (lub uzdolnionymi matematycznie uczniami szkół średnich), poświęconych wspólnemu budowaniu geometrii elementarnej, „odkrywaniu" matematyki przez odkrywanie twierdzeń i ich różnych dowodów.

Przyjmijmy następujące definicje:

---

*Some new criterions for equilateral triangles

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97G40

Key words and phrases: equilateral triangle, Georgonne point, Nagel point, Torricelli point

[1] W literaturze można też spotkać pisownię Georgonne'a.

Definicja 1
Prostą Gergonne'a nazywamy prostą łączącą wierzchołek trójkąta z punktem styczności przeciwległego boku z okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Punkt styczności, o którym mowa, nazywać będziemy śladem prostej Gergonne'a.

Definicja 2
Prostą Nagela nazywamy prostą łączącą wierzchołek trójkąta z punktem styczności przeciwległego boku z odpowiednim okręgiem dopisanym do rozważanego trójkąta, a ten punkt styczności nazywamy śladem prostej Nagela.

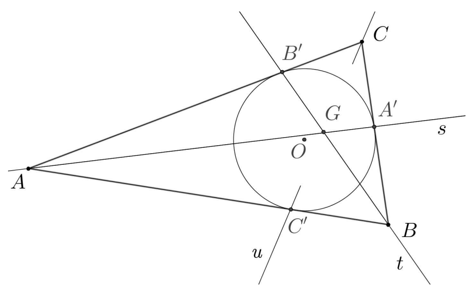
Na rycinie 1 prostymi Gergonne'a trójkąta ABC są s, t, u; punkty A', B', C' są śladami tych prostych. Na rycinie 2 prostymi Nagela są k, l, m; punkty A', B', C' są śladami tych prostych.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu wynika, że jeśli A', B', C' są śladami prostych Gergonne'a, to

$$|AB'| = |AC'|, \quad |BC'| = |BA'|, \quad |CA'| = |CB'|.$$

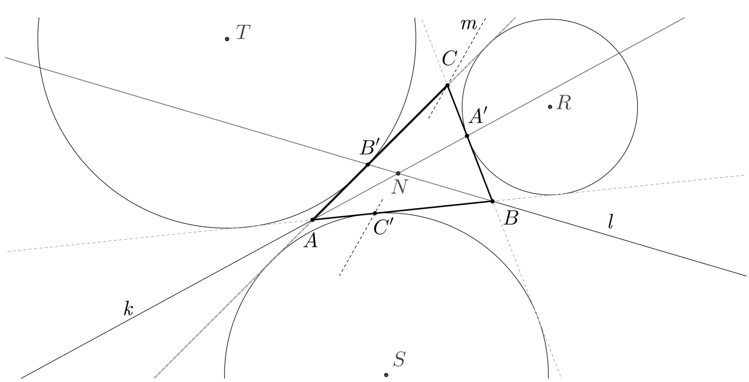
Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy proste Gergonne'a rozważanego trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy punktem Gergonne'a tego trójkąta.

Na rycinie 1 punkt Gergonne'a trójkąta ABC został oznaczony literą G.



Ryc. 1.

Przyjmijmy, że na rycinie 2 i dalej w artykule dla trójkąta ABC: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$.



Ryc. 2.

Nietrudno pokazać (por. np. Coxeter, 1967), że

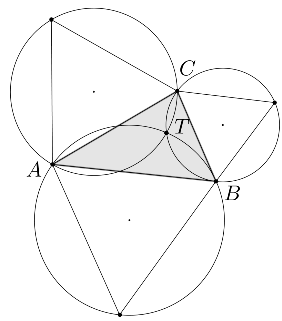
$$|AB'| = |A'B| = p - c,$$
$$|CA'| = |C'A| = p - b,$$
$$|BC'| = |B'C| = p - a, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Stąd

$$\frac{|AB'||CA'||BC'|}{|A'B||C'A||B'C|} = 1$$

i w oparciu o twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy otrzymujemy, że proste Nagela przecinają się w jednym punkcie. Na rycinie 2 punkt Nagela trójkąta ABC został oznaczony literą N.

Punktem Torricellego trójkąta nazywamy punkt wspólny okręgów opisanych na trójkątach równobocznych, które zostały zbudowane na bokach danego trójkąta, jak to sugeruje rycina 3.



Ryc. 3.

Prostą Torricellego trójkąta nazywamy każdą z prostych wyznaczonych przez wierzchołek tego trójkąta i punkt T Torricellego. Punkt wspólny prostej Torricellego z bokiem trójkąta, różny od wierzchołka, będziemy nazywali śladem prostej Torricellego.

Nietrudno pokazać, że z punktu Torricellego trójkąta widać każdy bok tego trójkąta pod kątem $\frac{2\pi}{3}$. Ponadto jeżeli A', B', C' są śladami prostych Torricellego trójkąta ABC, przy czym $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, a T jest punktem Torricellego, to $|\sphericalangle ATC'| = \frac{\pi}{3}$.

Przyjmijmy, na potrzeby artykułu oznaczenia:

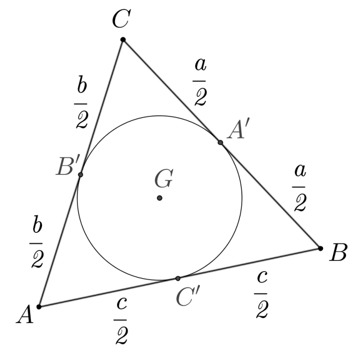
G – punkt Gergonne'a rozważanego trójkąta,
N – punkt Nagela rozważanego trójkąta,
T – punkt Torricellego rozważanego trójkąta.
S – środek ciężkości rozważanego trójkąta,
W – środek okręgu wpisanego w rozważany trójkąt,
H – ortocentrum rozważanego trójkąta,
O – środek okręgu opisanego na rozważanym trójkącie,
$2p$ – obwód rozważanego trójkąta,
$a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ w trójkącie ABC.

Twierdzenie 1

Jeżeli $G = S$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Symbolami A', B', C' oznaczmy odpowiednio ślady prostych Gergonne'a trójkąta ABC (ryc. 4). Z założenia $G = S$ wynika, że A' jest równocześnie środkiem boku BC i śladem prostej Gergonne'a. Podobnie B' oraz C' są równocześnie odpowiednio środkami boków AC, AB i śladami prostych Gergonne'a.

Stąd wynika, że można przyjąć oznaczenia, jak na rycinie 4.



Ryc. 4.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu wynika, że

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} = \frac{c}{2}.$$

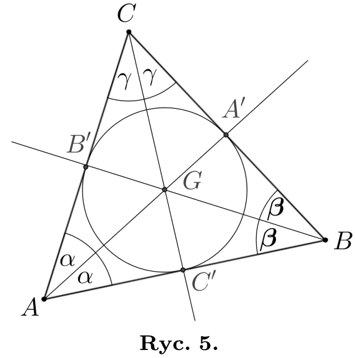
Stąd $a = b = c$, trójkąt ABC jest więc równoboczny.

Twierdzenie 2

Jeżeli $G = W$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. I sposób rozumowania:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.

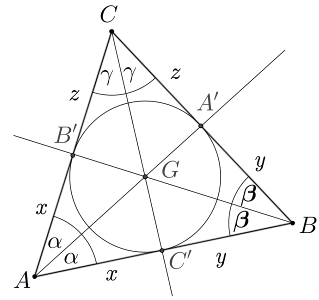


Ryc. 5.

Z założenia $G = W$ wynika, że A' jest równocześnie śladem dwusiecznej kąta BAC i śladem prostej Gergonne'a. Stąd na podstawie twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu otrzymujemy

$$|AB'| = |AC'|, \quad |BC'| = |BA'|, \quad |CA'| = |CB'|.$$

Możemy więc przyjąć dodatkowe oznaczenia, jak na rycinie 6.



Ryc. 6.

Skoro $AA'^{\to}$ jest dwusieczną kąta BAC w trójkącie ABC, to (na podstawie twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie):

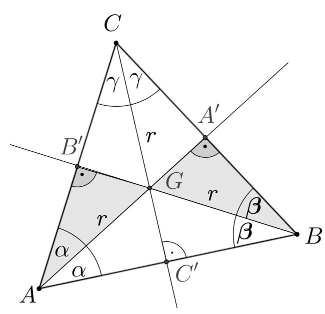
$$\frac{x+y}{y} = \frac{x+z}{z}.$$

Stąd $\frac{x}{y} = \frac{x}{z}$, więc $y = z$.

Analogicznie można pokazać, że $x = z$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

II sposób rozumowania:

Skoro $G = W$, to GA', GB', GC' są promieniami okręgu wpisanego w trójkąt ABC, prostopadłymi odpowiednio do boków BC, AC, AB. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rycinie 7.



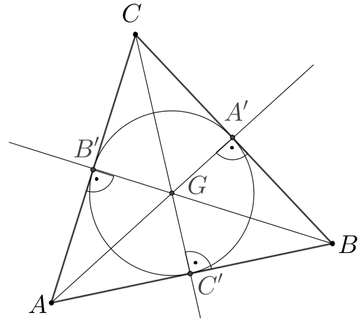
Ryc. 7.

Kąty $GA'B$ oraz $GB'A$ są więc proste. Ponadto $|\sphericalangle B'GA| = |\sphericalangle A'GB|$ (kąty wierzchołkowe). Zatem trójkąty $A'GB$, $B'GA$ są przystające, bo są podobne (cecha kk) w skali 1. Stąd $\alpha = \beta$.

Analogicznie można pokazać, że $\alpha = \gamma$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

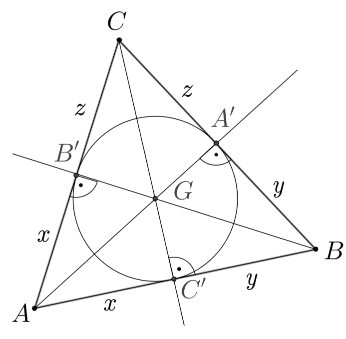
TWIERDZENIE 3
Jeżeli $G = H$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Z założeń wynika, że można przyjąć oznaczenia, jak na rycinie 8, ponieważ A' jest równocześnie śladem prostej AA' Gergonne'a i spodkiem wysokości opuszczonej z A (i analogicznie B', C').



Ryc. 8.

Z faktu, że A', B', C' są śladami prostych Gergonne'a, wynika możliwość przyjęcia oznaczeń jak na rycinie 9.



Ryc. 9.

I droga dalszego rozumowania:
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$x^2 + |C'C|^2 = (x+z)^2,$$

$$y^2 + |C'C|^2 = (z+y)^2.$$

Stąd kolejno

$$y^2 + (x+z)^2 - x^2 = (z+y)^2,$$

$$y^2 + x^2 + 2xz + z^2 - x^2 = z^2 + 2zy + y^2,$$

$$x = y.$$

Analogicznie można wykazać, że $z = y$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

II droga dalszego rozumowania:

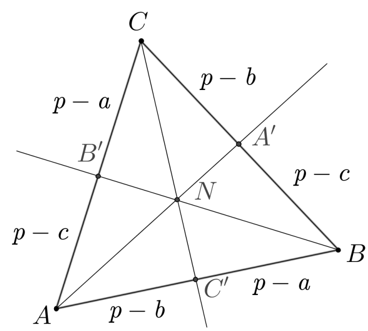
Zauważmy, że $|\sphericalangle B'CG| = |\sphericalangle C'BG|$. Ponadto trójkąty $GB'C$ i $GA'C$ oraz GBC' i $GA'B$ są przystające (na podstawie cechy *bbb*, gdyż są to trójkąty prostokątne). Stąd $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC|$. Analogicznie $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BAC|$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

III droga dalszego rozumowania:

Nietrudno wykazać, że $G = W$. Wystarczy tylko zauważyć, że proste GA', GB' zawierają promienie okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzone odpowiednio do punktów A' i B'. Stąd z twierdzenia 2 wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Twierdzenie 4
Jeżeli $N = S$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Można przyjąć oznaczenia jak na rysunku 10, ponieważ N jest punktem Nagela trójkąta ABC.



Ryc. 10.

Z założenia $N = S$ wynika, że A' jest równocześnie środkiem boku BC i śladem prostej Nagela.

Podobnie B', C'. Zatem

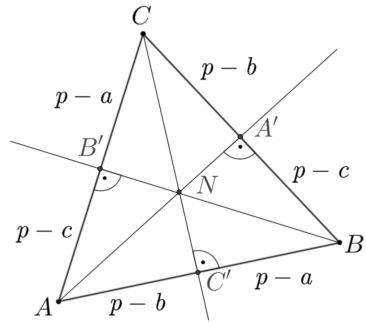
$$p - b = p - c,$$

$$p - b = p - a.$$

Stąd $a = b = c$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

Twierdzenie 5
Jeżeli $N = H$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Można przyjąć oznaczenia jak na rycinie 11, ponieważ z założenia $N = H$ wynika, że B' jest równocześnie śladem prostej Nagela i spodkiem wysokości trójkąta ABC.



Ryc. 11.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$|B'B|^2 = c^2 - (p-c)^2, |B'B|^2 = a^2 - (p-a)^2.$$

Stąd

$$-p^2 + 2pc = -p^2 + 2pa,$$

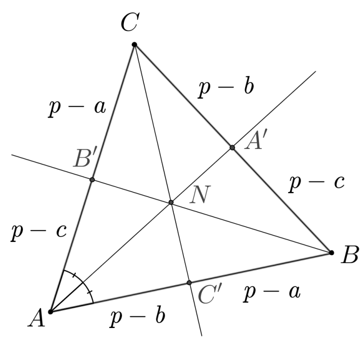
a więc

$$c = a.$$

Analogicznie można pokazać, że $b = c$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

Twierdzenie 6
Jeżeli $N = W$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Można przyjąć oznaczenia jak na rycinie 12, ponieważ N jest punktem Nagela oraz punktem wspólnym dwusiecznych kątów trójkąta ABC.



Ryc. 12.

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie otrzymujemy:

$$\frac{p-c}{c} = \frac{p-b}{b}.$$

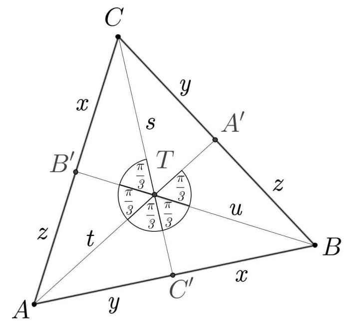
Stąd

$$c = b.$$

Analogicznie można pokazać, że $a = c$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

Twierdzenie 7
Jeżeli $T = N$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód I. Z założeń wynika, że można przyjąć oznaczenia, jak na rycinie 13, na której m.in.: $|AT| = t$, $|BT| = u$, $|CT| = s$.



Ryc. 13.

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów ATC i BTC dostajemy:

$$(z + x)^2 = t^2 + s^2 + ts,$$

$$(y + z)^2 = u^2 + s^2 + su.$$

Stąd mamy kolejno

$$(y + z)^2 - (z + x)^2 = u^2 - t^2 + s(u - t),$$

$$(2z + x + y)(y - x) = (u - t)(t + u + s). \qquad (*)$$

Pokażemy, że $x = y$.

I droga rozumowania: Przypuśćmy, że $y > x$. Wtedy z równości $(*)$ wynika, że $u > t$, a stąd $uy > ty$. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie (rozważając trójkąt ABT) mamy

$$\frac{t}{y} = \frac{u}{x},$$

czyli

$$uy = tx.$$

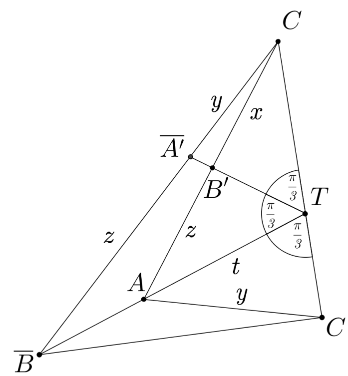
Stąd nierówność $uy > ty$ pociąga nierówność $tx > ty$ i dalej $x > y$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Analogicznie przypuszczenie $y < x$ można doprowadzić do sprzeczności. Zatem $x = y$. Ze względu na symetrię założeń mamy też $x = z$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

II droga rozumowania: Oczywiście $2z + x + y > 0$ i $t + u + s > 0$, więc z równości $(*)$ wynika, że obie różnice $y - x$ oraz $u - t$ są równe 0 lub są tych samych znaków. Stąd $(y-x)(u-t) \geqslant 0$. Z kolei z twierdzenia o dwusiecznej kąta wenętrznego w trójkącie (rozważając trójkąt ABT) dostajemy kolejno $\frac{u}{x} = \frac{t}{y}$, $tx = uy$, $tx - ty = uy - ty$, $t(x-y) = y(u-t)$, $(x-y)(u-t) \geqslant 0$ (bo obie różnice $x - y$ oraz $u - t$ są równe 0 lub są tych samych znaków).

Z nierówności $(y-x)(u-t) \geqslant 0$ oraz $(x-y)(u-t) \geqslant 0$ otrzymujemy $(y-x)(u-t) = 0$, a stąd $x = y$ lub $u = t$. Równość $u = t$ pociąga $x = y$, ponieważ $\frac{u}{x} = \frac{t}{y}$. Ostatecznie $y = x$. Zatem $|AC| = |BC|$. Z tych samych powodów $|AB| = |BC|$.

Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

Dowód II. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rycinie 13. Przypuśćmy, że trójkąt ABC nie jest równoboczny i że $|AC| > |BC|$. Stąd $x+z > z+y$, $x > y$ i dalej, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie (dla trójkąta ATB) dostajemy $u > t$. Niech S_k oznacza symetrię osiową o osi k, gdzie literą k oznaczono prostą CC' oraz $\overline{A'} = S_k(A')$, $\overline{B} = S_k(B)$. Rozważmy trójkąt ACC' (przedstawiony na rycinie 14) oraz obraz $\overline{B}CC'$ trójkąta BCC' w symetrii S_k.



Ryc. 14.

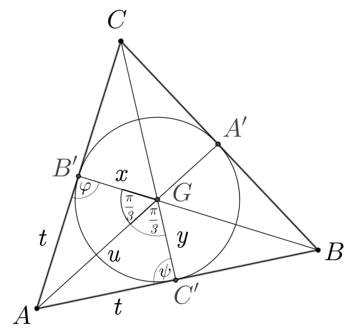
Ponieważ $|AT| = t < u = |BT| = |\overline{B}T|$ i punkty $\overline{B}$, A, T są współliniowe (gdyż $|\sphericalangle CTB| = |\sphericalangle CTA|$ i $T \in k$), to $|\overline{B}C| > |AC|$, $z + y > z + x$ i dalej $y > x$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem $|AC| = |BC| = |AB|$.

Twierdzenie 8

Jeżeli $G = T$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Z założeń wynika, że można przyjąć oznaczenia, jak na rycinie 15, w szczególności $|AG| = u$, $|GB'| = x$, $|GC'| = y$.



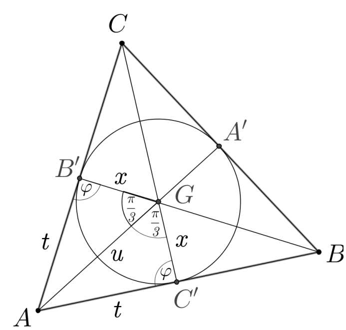
Ryc. 15.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów AGB' i AGC' wynika, że okręgi opisane na nich są przystające. Oznaczmy literą R długość promieni tych okręgów. Wtedy

$$2R = \frac{u}{\sin\varphi} = \frac{u}{\sin\psi}.$$

Stąd $\psi = \varphi$ lub $\psi = \pi - \varphi$.

Przyjmijmy najpierw, że $\psi = \varphi$. Wtedy $x = y$ i mamy sytuację taką jak na rycinie 16.



Ryc. 16.

I droga rozumowania w przypadku $\psi = \varphi$: trójkąty AGB' i AGC' są oczywiście przystające, więc półprosta $AG^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $C'AB'$, czyli kąta BAC w trójkącie ABC. Analogicznie półprosta $BG^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta CBA w trójkącie ABC, punkt G jest więc środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Z twierdzenia 2 wyciągamy teraz wniosek, że trójkąt ABC jest równoboczny.

II droga rozumowania w przypadku $\psi = \varphi$: trójkąty $C'GB$ i $B'GC$ (ryc. 16) są przystające (cecha kbk). Stąd $|BG| = |GC|$. Zatem $|BB'| = |CC'|$ i trójkąty ABB' i ACC' są przystające (cecha bkb). To pociąga $|AB| = |AC|$. Analogicznie $|AB| = |BC|$. Trójkąt ABC jest więc w rozważanym przypadku ($\psi = \varphi$) równoboczny.

Przyjmijmy teraz, że $\psi = \pi - \varphi$. Wtedy przy oznaczeniach z ryc. 15 (biorąc pod uwagę czworokąt $AC'GB'$) mamy

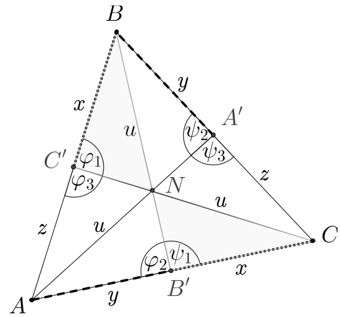
$$|\sphericalangle BAC| = 2\pi - \varphi - (\pi - \varphi) - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Rozumując analogicznie, można wykazać, że $|\sphericalangle ABC| = \frac{\pi}{3}$. Trójkąt ABC jest więc w rozważanym przypadku ($\psi = \pi - \varphi$) równoboczny.

Twierdzenie 9

Jeżeli $N = O$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód. Z założeń wynika, że można przyjąć oznaczenia jak na rycinie 17.



Ryc. 17.

Rozważmy trójkąty BNC', CNB'. Z twierdzenia sinusów wynika, że na obu tych trójkątach można opisać okręgi przystające (bo kąty BNC' i CNB' są wierzchołkowe oraz $|BC'| = |CB'|$); długość promieni tych okręgów oznaczmy literą R. I dalej z tego twierdzenia

$$2R = \frac{u}{\sin\varphi_1} = \frac{u}{\sin\psi_1},$$

a stąd $\psi_1 = \varphi_1$ lub $\psi_1 = \pi - \varphi_1$, Analogicznie: $\psi_2 = \varphi_2$ lub $\psi_2 = \pi - \varphi_2$ i w końcu $\psi_3 = \varphi_3$ lub $\psi_3 = \pi - \varphi_3$.

Gdy $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_2$, $\psi_3 = \varphi_3$, to trójkąty BNC' i CNB', BNA' i ANB', ANC' i $CA'N$ są przystające, bo są podobne w skali 1. Stąd trójkąty ABB' i BCB', ACA' i ABA' mają równe pola. To pociąga, że $x = y$ i $y = z$. Trójkąt ABC jest więc w tym przypadku równoboczny.

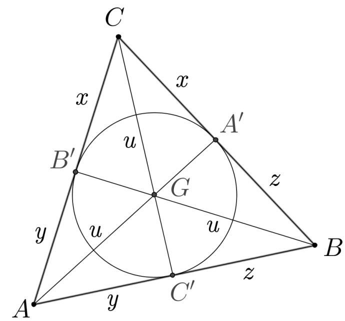
Gdy $\psi_1 = \pi - \varphi_1$, $\psi_2 = \pi - \varphi_2$, $\psi_3 = \pi - \varphi_3$, to $\pi - \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, a stąd $\varphi_1 = \varphi_2$. Analogicznie $\varphi_2 = \varphi_3$ i dalej $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$. Trójkąty $BC'N$ i $AC'N$ są zatem przystające, $x = z$.

Analogicznie: $y = z$.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek różny od omówionych powyżej. Nie zmniejszając ogólności rozumowania, można przyjąć, że $\psi_1 = \varphi_1$ i $\psi_2 = \pi - \varphi_2$. Wtedy trójkąty BNC' i CNB' są przystające (bo są podobne w skali 1), $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle ABN|$. Stąd i z równoramienności trójkątów ACN i ANB wynika dalej, że $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle ABN| = |\sphericalangle BAN|$. Zatem trójkąty ACN i ABN są podobne (cecha kk), a skoro $|AN| = |BN| = |CN|$, to są przystające, więc $x + y = x + z$, $y = z$. Oczywiście $|\sphericalangle AC'N| = \pi - \varphi_1 = \varphi_2$. Ponadto $|\sphericalangle NA'C| = \psi_3 = \pi - \psi_2 = \pi - (\pi - \varphi_2) = \varphi_2$. Trójkąty $AC'N$ i $NA'C$ są więc przystające. Stąd $|\sphericalangle NCB| = |\sphericalangle NAB|$. Ostatecznie $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle CAB|$, trójkąt ABC jest zatem równoboczny.

Twierdzenie 10
Jeżeli $G = O$ w trójkącie ABC, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Dowód. Z założeń wynika, że można przyjąć oznaczenia jak na rycinie 18, w szczególności $|AG| = |BG| = |CG| = u$.



Ryc. 18.

Przypuśćmy, że trójkąt ABC nie jest równoboczny i że $|AC| > |BC|$. Stąd wynika, że $y > z$. Ale $|AB| = y + z$, więc punkt wspólny symetralnej boku AB (do której należy punkt G, bo $G = O$) z bokiem AB należy do odcinka AC'. W konsekwencji kąt $BC'G$ jest rozwarty, kąt BGC' jest ostry. Rozważamy trójkąty równoramienne AGC i BGC, w których $|AG| = |GC| = |GB|$. Stąd skoro $|AC| > |BC|$, to $|\sphericalangle AGC| > |\sphericalangle BGC|$ i dalej $|\sphericalangle BGC'| > |\sphericalangle C'GA|$. Ale jak już wiemy, kąt BGC' jest ostry, więc i kąt $C'GA$ jest ostry. Okręgi opisane na trójkątach $AC'G$ i $C'GB$ są przystające, gdyż (na podstawie twierdzenia sinusów):

$$\frac{u}{\sin \sphericalangle AC'G} = \frac{u}{\sin \sphericalangle BC'G}.$$

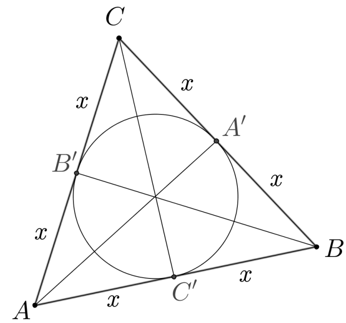
Stąd

$$\frac{y}{\sin \sphericalangle AGC'} = \frac{z}{\sin \sphericalangle C'GB}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, bowiem $y > z$ oraz $\sin \sphericalangle AGC' < \sin \sphericalangle BGC'$ (w świetle tego, co zostało pokazane o kątach AGC' i BGC').

Twierdzenie 11
Jeżeli $G = N$ w trójkącie ABC, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód jest oczywisty. Wystarczy rzut oka na rycinę 19, na której przyjęto oznaczenia zgodnie z założeniami tego twierdzenia.



Ryc. 19.

Twierdzenie 11 zostało podane, by podkreślić, że dopóki nie poznamy dowodu (a jeszcze lepiej kilku dowodów) śmiało postawionej hipotezy, nie możemy ocenić, czy formułując hipotezę, postawiliśmy problem trudny do rozstrzygnięcia. A i po poznaniu pomysłowego, skomplikowanego dowodu jakiegoś twierdzenia nie możemy być pewni, czy nie można odkryć błyskotliwie krótkiego dowodu.

Geometria elementarna, której narzędzia (twierdzenia) są powszechnie znane, daje wiele wspaniałych przykładów, jak różnymi drogami można uzyskać cel – dowód lub obalenie postawionej hipotezy.

Oczywiście w trójkącie równobocznym pokrywają się punkty oznaczone w artykule literami G, N, T, S, H, W, O. Stąd i z twierdzeń 1-11 wynikają zapowiedziane w tytule artykułu cechy równoboczności trójkątów.

Literatura

Coxeter, H.: 1967, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2004, Zadania „na wymuszanie” jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 61-80.

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2011, Projekt materiałów dydaktycznych wyzwalających odkrywanie twierdzeń, w: J. Żabowski (red.), *O nauczaniu matematyki (wybrane materiały do studiowania dydaktyki matematyki)*, Wyd. Nauk. NOVUM, Płock, 385-417.

Górowski, J., Łomnicki, A.: 2012, Cechy równoboczności trójkątów, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 83-92.

Górowski, J., Łomnicki, A., Żabowski, J.: 2013, Karakterizaj punktoj de triangulo, *Litera scripta manet, Serta in honorem Helmar Frank*, Wyd. KAVA-PECH, Dobřichovice, 295-306.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: michael91@op.pl
e-mail: alomnicki@poczta.fm
e-mail: jangorowski@interia.pl