FOLIA 196

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VII (2015)

ISSN 2080-9751

Bożena Olik-Pawlik

O zjawisku zniekształcania obrazu matematyki*

Abstract. In this paper, we identify the phenomenon of *false conviction*. We analyze the definition of *false conviction* and provide the typology of *false convictions*, including their logical, geometric, cognitive and methodological types. Every type of *false conviction* is exemplified by empirical data.

1. Wprowadzenie

> Nie można (...) wrzucać do tego samego worka pojęciowego, z jednej strony postaw i zachowań ucznia, który mówi lub pisze byle co, bo nie interesuje go rozwiązanie problemu, chwilowych pomyłek, wywołanych brakiem uwagi, błędów wynikających z luk w wiedzy, które mogą być łatwo poprawione przez samego ucznia, gdy pozostawi mu się czas na refleksję lub uzupełnienie wiadomości, wniosków opartych na lekkomyślnym zgadywaniu itp., z drugiej zaś strony świadomego rozumowania logicznie niepoprawnego, oraz błędów ujawniających głęboko zakorzenione fałszywe koncepcje, których uczeń nawet z uporem broni, jeżeli mu na to pozwalamy (Krygowska, 1989, s. 146).

Tak apelowała Z. Krygowska w przemówieniu wygłoszonym podczas inauguracji konferencji zorganizowanej przez Międzynarodową Komisję do Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki[1], na której błąd w matematyce szkolnej był głównym przedmiotem rozważań. W swojej wypowiedzi Z. Krygowska zwróciła uwagę na występowanie różnorodnych typów uczniowskich błędów i wyraźnie podkreśliła, iż szczególnego traktowania wymagają te błędy, które są rezultatem głęboko zakotwiczonych fałszywych koncepcji czy nieprzypadkowego a niepoprawnego rozumowania. Błędy nazwała *istotnymi i nieuniknionymi składnikami ludzkiej działalności.* Stwierdziła też, że *zakres analiz i badań* (dotyczących problemów związanych z błędami) *jest tak rozległy i ich wyniki tak bogate, że nie jest już możliwe opanowanie indywidualną wiedzą tego, co już zostało wypracowane.*

---

*On distorting the image of mathematics

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97C70; Secondary: 97D40

Key words and phrases: Research on teacher education, False conviction

[1] Konferencja odbyła się w Sherbrooke (Kanada) w dniach od 27 lipca do 1 sierpnia 1987 roku. Temat konferencji: The role errors play in the learning and teaching of mathematics (Rola błędu w uczeniu się i nauczaniu matematyki).

Problematyka rozprawy doktorskiej (Pawlik, 2004c), niepublikowanej do tej pory w całości, której fragmenty składają się na niniejszy artykuł, koncentruje się na błędach dostrzeżonych w rozumowaniach początkujących studentów matematyki – przyszłych nauczycieli. Są to takiego rodzaju błędy, których nie można, zgodnie z apelem, zlekceważyć, gdyż opierają się na niepoprawnych koncepcjach. *Fałszywe przekonania*, bo tak te koncepcje nazwano, funkcjonujące w rozumowaniach uczących się matematyki, sterują ich myśleniem podczas pracy nad różnego rodzaju zadaniami, utrudniając albo wręcz uniemożliwiając ich poprawne rozwiązanie. Są one niebezpieczne dla tworzonego w umyśle uczącego się obrazu matematyki, ponieważ nie wykorzenione mogą stać się przyczyną jego zniekształcania.

2. Określenie i krótka charakterystyka fałszywych przekonań

Fałszywe przekonania (w skrócie *FP*) – domniemane fundamenty niepoprawnych rozumowań; są nimi fałszywe koncepcje, błędne schematy myślowe oraz niepoprawne reguły wnioskowania. Określenie to powstało przez analogię do zaobserwowanych przez A. Bella (1992, s. 11) uczniowskich fałszywych poglądów – błędnych przekonań typu: *mnożenie zwiększa, a dzielenie zmniejsza, czy dzieli się liczbę większą przez mniejszą.*

Nazwą tą objęte są takie błędne schematy, które stosowane są przez studentów jakby automatycznie. Choć nazwane zostały przekonaniami[2], nie znaczy to, że są one uświadomione. Chodzi o to, że studenci postępując według tych schematów działają w dobrej intencji i wydają się być przekonani, że ich rozumowania i działania są poprawne. Warto podkreślić, że *fałszywe przekonania* studenta, który nie zetknął się z wywołującym zaniepokojenie konfliktem zmuszającym go do weryfikacji swojego (błędnego) rozumowania, pozostają nieuświadomione.

Charakterystyczne dla rozwiązań opartych na *fałszywych przekonaniach* jest to, że ich autorzy przystępują do pracy nad zadaniem tak, jakby już znali odpowiedź. Większość z nich nie bada, nie poszukuje, nie powołuje się na poznane wcześniej definicje czy twierdzenia. Wydaje się, że autorzy formułując rozwiązanie realizują pierwszą myśl, która im „przyszła do głowy”.

3. Przykłady i typy fałszywych przekonań

W ramach opisanych w rozprawie badań wyróżnione zostały cztery typy fałszywych przekonań. Można je krótko scharakteryzować w podany dalej sposób.

Typ I – *fałszywe przekonania „logiczno-pojęciowe”*
Fałszywe przekonania tego typu dotyczą rozumowań, które związane są z błędną definicją pojęcia, niepoprawną regułą wnioskowania lub ich struktura logiczna – jak to ujął Z. Powązka (2009, s. 215) – opiera się na błędnej tautologii.

[2] W pedagogice funkcjonuje termin **przekonanie**. W pracy (Okoń, 1984, s. 248) czytamy, iż jest to *względnie stały składnik świadomości człowieka, oparty na przeświadczeniu, że pewien stan rzeczy jest taki, a nie inny; na przekonania składają się: poznanie jakiegoś stanu rzeczy, emocjonalna aprobata zdobytej wiedzy oraz skłonność do postępowania zgodnego z jej treścią; najlepszym sprawdzianem siły przekonań jest codzienna praktyka potwierdzająca zgodność wiedzy i działania.*

Typ II – *fałszywe przekonania „połączenia”.*
Dotyczą sklejeń[3] i złożeń („połączeń”) przekształceń geometrycznych. Związane są z przenoszeniem przez studentów własności pewnych obiektów matematycznych na „nowy” obiekt – „połączenie” – powstały z danych według domyślnej zasady.

Typ III – *fałszywe przekonania „analogia”*
Tego typu fałszywe przekonania powstały przez nieostrożne wykorzystanie zdobytej wcześniej wiedzy.

Typ IV – *fałszywe przekonania „metodologiczne”*
Związane są z takimi rozumowaniami, w których ujawniają się błędy natury metodologicznej – dotyczące np. roli przykładu, kontrprzykładu czy rysunku.

Zaprezentowane dalej przykłady studenckich prac służą ukazaniu zarówno samych fałszywych przekonań, jak i zwróceniu uwagi na różne ich typy.

Prezentacja każdego z zawartych tu przykładów obejmuje:

- temat zadania,
- (błędne) rozwiązanie tego zadania podane przez studenta,
- analizę przedstawionego rozwiązania,
- ogólne sformułowanie *fałszywego przekonania*, stanowiącego domyślny fundament błędnego rozumowania zawartego w omawianym rozwiązaniu.

Nie mam pewności, że wszystkie rozumowania autorów analizowanych prac przebiegały dokładnie tak, jak zostały przedstawione. Hipotetyczne rozumowania studentów zwerbalizowane zostały po to, by je opisać i rozpoznać istotę błędów popełnionych w oparciu o *fałszywe przekonania*.

Jako pierwsze przedstawiono fałszywe przekonanie *FP „odcinek”*. Choć było ono już niejednokrotnie prezentowane we wcześniejszych publikacjach (por. np. Pawlik, 2003, 2008), zamieściłam je tutaj ponownie dla przejrzystości prezentacji, ponieważ i na tym fałszywym przekonaniu oparte jest rozwiązanie zamieszczone w dalszej części tej pracy (zob. Przykład 2). Należy zaznaczyć, że inne przykłady fałszywych przekonań lub błędne prace studentów ilustrujące te fałszywe przekonania, na które zwrócono uwagę w niniejszym opracowaniu, znaleźć można w innych publikacjach B. Pawlik wskazanych w wykazie literatury.

FP „odcinek” przedstawia się następująco:

FP „odcinek”
Obrazem odcinka AB w przekształceniu P jest odcinek $A'B'$ taki, że $P(A) = A'$, $P(B) = B'$
(niezależnie od określenia przekształcenia P).

[3] Sklejenia przekształceń to przekształcenia zadane dwu- lub wielonormowo. Mimo że odwzorowania tego typu nie mają dla teorii przekształceń większego znaczenia, dla celów dydaktycznych (chodzi o to, by skontrastować pojęcie złożenia przekształceń) były uwzględniane na ćwiczeniach z geometrii elementarnej.

O jego funkcjonowaniu w rozumowaniach uczących się matematyki świadczy przywołane dalej rozwiązanie zadania 1 podane przez studentkę, która nie uczestniczyła w zajęciach, w ramach których omawiane było zagadnienie obrazu odcinka w przekształceniach geometrycznych.

Przykład 1

Zadanie 1 *Oceń wartość logiczną poniższego zdania. Odpowiedź uzasadnij.*
Obrazem odcinka AB w przekształceniu P jest odcinek $A'B'$ taki, że

$$P(A) = A', \ P(B) = B'.$$

Rozwiązanie studentki.

Obrazem odcinka AB w przekszt. P jest odcinek A'B'
taki że P(A)=A', P(B)=B' Jest to prawdz
ponieważ szukając obrazu odcinka szukamy
obrazów jego końców A B. Przekształcamy je
tak, że P(A) = A' i P(B) = B'. Łączymy
ze sobą A' i B' i powstaje nam obraz
odcinka AB w tym przekształceniu P.

W swoim uzasadnieniu autorka pracy klarownie sformułowała błędny przepis na „wyznaczenie obrazu odcinka AB w przekształceniu P”. Prawdopodobnie wcześniejsze doświadczenia szkolne przyczyniły się do wytworzenia opisanego schematu w umyśle rozwiązującej zadanie. Na wcześniejszych etapach edukacji uczyła się o przekształceniach zachowujących współliniowość punktów i ich uporządkowanie. Właśnie tak konstruowało się obraz odcinka w każdym z rozważanych przykładów. Wydaje się, że wielokrotne powtórzenie tego samego sposobu postępowania mogło przyczynić się do utrwalenia poglądu, iż powyższy schemat jest uniwersalny, więc można go stosować do wszystkich przekształceń geometrycznych. Wygląda na to, że dla studentki „obraz odcinka” utożsamił się z tym, co zawsze robiła w szkole, czyli z procedurą znajdowania jego obrazu – „wyznaczyć obrazy końców odcinka i połączyć je”.

O tym, że taka procedura wielu studentom nie jest obca, przekonuje wypowiedź innej osoby, która przyznała, iż:

W szkole podstawowej, później średniej, zawsze myślałam, uczono mnie, że obrazem odcinka w przekształceniach jest odcinek. Jednak na studiach okazało się, że nie we wszystkich przekształceniach obrazem odcinka jest też odcinek.

Dla ilustacji kolejnych fałszywych przekonań – innego typu – posłuży rozwiązanie zadania 2.

Przykład 2

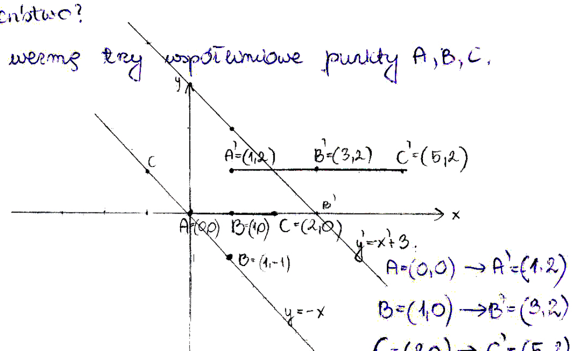
Zadanie 2 *Przekształcenie P płaszczyzny określono wzorami*

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}.$$

- *Czy P jest podobieństwem?*
- *Czy P jest przekształceniem afinicznym?*

Rozwiązanie studentki.[4] *Czy to jest podobieństwo? Aby to pokazać wezmę trzy współliniowe punkty A, B, C.*

Czy to jest podobieństwo?
Aby to pokazać wezmę trzy współliniowe punkty A,B,C.



Ponieważ zachowana jest współliniowość, a jak wiemy na podstawie twierdzenia, podobieństwo zachowuje współli-niowość, zatem to przekształcenie jest podobieństwem.

Ponieważ zachowana jest współliniowość, a jak wiemy na podstawie twierdzenia, podobieństwo zachowuje współliniowość, zatem to przekształcenie jest podobieństwem.
Sprawdzę jeszcze dla prostej $y = -x$.

Sprawdzę jeszcze dla prostej: $y=-x$

$y' = 2y+2$ $\qquad$ $x' = 2x+1$

$2y = y'-2 /:2$ $\qquad$ $2x = x'-1 /:2$

$y = \frac{1}{2}y' - 1.$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}.$

$\frac{1}{2}y' - 1 = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2} \;/\cdot 2$

$y' - 2 = -x' + 1$

$y' = -x' + 3.$

Prosta $y=-x$ przeszła w tym przekształceniu na prostą $y'=-x'+3$
zatem jest to podobieństwo.

Z tych samych powodów jest to przekształcenie afiniczne, bo
jak wiemy przekształcenie afiniczne zachowuje współliniowość

Prosta $y = -x$ przeszła w tym przekształceniu na prostą $y' = -x' + 3$, zatem jest to podobieństwo.
Z tych samych powodów jest to przekształcenie afiniczne, bo jak wiemy przekształcenie afiniczne zachowuje współliniowość.

Zaprezentowane rozwiązanie jest przykładem błędnego rozumowania kończącego się prawdziwym wnioskiem. Analizując jego strukturę logiczną można zauważyć, że autorka potraktowała występującą w nim implikację tak, jakby była równoważnością. Na wcześniej poznane i zacytowane w pracy twierdzenie: *podobieństwo zachowuje współliniowość punktów*, powołała się w ten sposób, że zachowywanie współliniowości punktów przez dane przekształcenie (warunek konieczny dla założenia twierdzenia) potraktowała jako warunek wystarczający na to, aby przekształcenie to było podobieństwem. Wygląda na to, że rozumowanie studentki przebiegało tak, jak gdyby uznawała ona fałszywą regułę dowodzenia, którą można by nazwać „regułą odrywania" postaci:

$$\frac{p \Rightarrow q, q}{p}.$$

Przypuszczalne rozumowanie studentki, w „języku inkluzji”, można opisać następującym, niepoprawnym, ogólnym schematem wnioskowania:

FP „COPI”

fałszywe przekonanie – „częściowo odwrócona przechodniość inkluzji”

Błędna reguła wnioskowania

$$\frac{A \subset B, C \subset B}{C \subset A}$$

Rozumowanie oparte na powyższym *fałszywym przekonaniu „COPI”* studentka powtórzyła na końcu swojej pracy, stwierdzając, iż z tego samego powodu – zachowywania współliniowości punktów – przekształcenie P jest przekształceniem afinicznym.

Na uwagę zasługuje także sposób, w jaki autorka omawianego rozwiązania uzasadniła następujący fakt: *zachowana jest współliniowość* – współliniowość punktów jest niezmiennikiem danego przekształcenia. Na początku studentka wykonała rysunek, na którym zaznaczyła dwie trójki współliniowych punktów (w obu przypadkach oznaczonych jednakowo: A, B, C; punkt A jako punkt wspólny obu trójek)

[4] Rozwiązanie to jest przykładem pracy, którą trudno jest w sposób bezdyskusyjny zaliczyć do jednego z typów prezentowanych przykładów, ze względu na to, iż zawarte w nim rozumowanie oparte jest na więcej niż jednym *fałszywym przekonaniu.*

położonych na prostych o równaniach $y = -x$ oraz $y = 0$. Wybrane punkty prostej o równaniu $y = 0$ połączyła, otrzymując odcinek AC, dla którego punkt B jest środkiem. Następnie wyznaczyła obrazy tych punktów, obliczając odpowiednie ich współrzędne. W efekcie, łącząc obrazy punktów, utworzyła z nich odcinek $A'C'$, korzystając w tym momencie między innymi z tego faktu, który chciała wykazać (zachowywania współliniowości punktów przez przekształcenie)[5]. Wydaje się, iż rezultatem takiego rozumowania – obrazem trójki punktów odcinka jest trójka punktów odcinka – nie była usatysfakcjonowana, gdyż w dalszej części rozwiązania napisała: *Sprawdzę jeszcze dla prostej.* Równanie obrazu prostej o równaniu: $y = -x$ wyznaczyła rachunkiem analitycznym. Ostatecznie stwierdziła, że skoro *wybrana przez nią prosta* $y = -x$ *przeszła w tym przekształceniu na prostą* (tu o równaniu: $y = -x + 3$)[6], *zatem zachowana jest współliniowość.*

Analiza uzasadnienia autorki pracy pozwala przypuszczać, iż dokonane przez nią uogólnienie – zaobserwowanej dla jednego obiektu własności – jest rezultatem rozumowania, które można opisać następująco:

Jeżeli *A* należące do *Z* jest *W*, to każdy *X* należący do *Z* jest *W*.

Zauważmy, iż do teoretycznego rozumowania studentki przystaje poprzednio opisane *FP „COPI”*:

$$\frac{W \subset Z, X \in Z}{X \in W}.$$

Wydaje się, że *fałszywe przekonanie* wspomniane wyżej ma też związek z występującą w logice regułą uogólniania.

> *Reguła uogólniania*
>
> $$\frac{\varphi(x), x \in X}{\forall x \in X : \varphi(x)}$$
>
> jest regułą dowodzenia, bowiem jeśli $\varphi(x), x \in X$, jest funkcją zdaniową prawdziwą w X, to dla każdego $a \in X$ prawdziwe jest zdanie $\varphi(a)$, co dowodzi, że zdanie $\forall x \in X : \varphi(x)$ jest prawdziwe” (Rasiowa, 1984, s. 235).

FP „PU”

fałszywe przekonanie – „przykład – uogólnienie”

Błędna reguła uogólniania

$$\frac{\varphi(a)}{\forall x \in X : \varphi(x)},$$

gdzie a jest określonym (wiadomym, konkretnym) elementem zbioru X.

Przedmiotem rozważań autorki omawianego rozwiązania nie była dowolna prosta, lecz prosta wskazana równaniem. Być może w odczuciu studentki prosta o równaniu $y = -x$ była dowolnie wybraną prostą na płaszczyźnie. Wyznaczenie obrazu takiej prostej, a następnie stwierdzenie, że otrzymany obiekt jest również prostą, było dla autorki pracy wystarczającym argumentem potwierdzającym tezę:

[5] Studentka ujawniła tu kolejne fałszywe przekonanie – *FP „odcinek”*.

[6] Studentka sporządziła błędny rysunek – nie zwróciła uwagi na to, że wyznaczony wcześniej obraz punktu A powinien należeć do obrazu prostej o równaniu $y = -x$.

Przekształcenie P zachowuje współliniowość punktów. Takie uzasadnienie, skonstruowane w oparciu o *FP „PU”*, jest „dowodem przez przykład”. Prowadzi do kolejnego fałszywego przekonania:

> *FP "DPP"*
> *fałszywe przekonanie – „dowód przez przykład”*
> *Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy wskazać choć jeden przykład, który je potwierdza.*

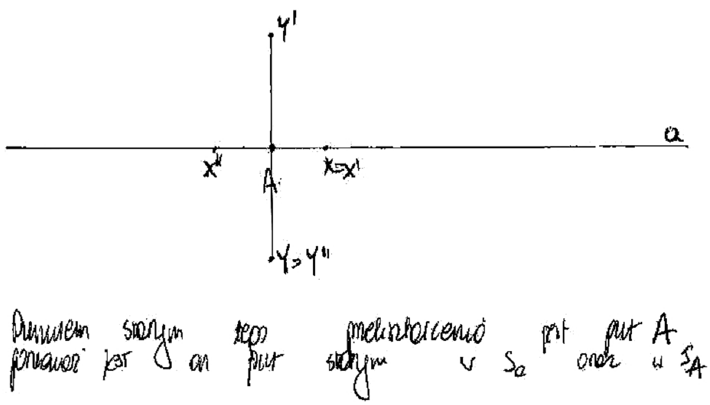
Myślę, że warto podkreślić, iż autorka ostatniej pracy w jednym rozwiązaniu trzykrotnie rozumowała podobnie w zróżnicowanych pojęciowo i metodologicznie sytuacjach. Jej praca wyraźnie ukazuje skalę zagrożenia dla obrazu matematyki wywołanego przez fałszywe przekonania „działające” w umyśle studentki.

Do kolejnej grupy fałszywych przekonań należy błędna koncepcja stanowiąca fundament kolejnego z zaprezentowanych tu rozwiązań.

Przykład 3

Zadanie 3 *Czy złożenie $S_A \circ S_a$, gdzie $A \in a$ ma punkty stałe? Jeśli tak, to ile i jakie?*

Rozwiązanie studentki.



Wskazany przez autorkę rozwiązania punkt A rzeczywiście jest punktem stałym rozważanego złożenia, niestety, nie jedynym. Studentka mogła to łatwo stwierdzić, gdyby się w ogóle nad tym zastanowiła. Wybrany przez nią – w sposób szczególny, najprawdopodobniej w celu zorientowania się w sytuacji – punkt Y, jest również poszukiwanym elementem zbioru punktów stałych. Poza jednym empirycznym zabiegiem, polegającym na wyznaczeniu obrazu punktu Y, autorka nie próbowała zrobić nic więcej – nie wyznaczyła obrazów innych punktów, ani nie skorzystała z definicji punktu stałego. Rozumowała tak, jakby uważała, iż prawdziwe jest następujące twierdzenie:

FP „iloczyn”
Zbiór punktów stałych złożenia przekształceń geometrycznych składa się z wspólnych punktów stałych składowych tego złożenia.

Jako ostatnie zilustruję fałszywe przekonanie o innej od poprzedniego naturze metodologicznej.

Przykład 4

ZADANIE 4 *Dane są przecinające się, nie prostopadłe proste a i b. Przekształcenie P_{-2} płaszczyzny określono w następujący sposób:*
Obrazem punktu X jest taki punkt X', że istnieje $A \in a$ spełniający warunki:

$$\overrightarrow{AX} \parallel b \quad i \quad \overrightarrow{AX'} = -2\overrightarrow{AX}.$$

a) *Czy P_{-2} jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem płaszczyzny na płaszczyznę?*

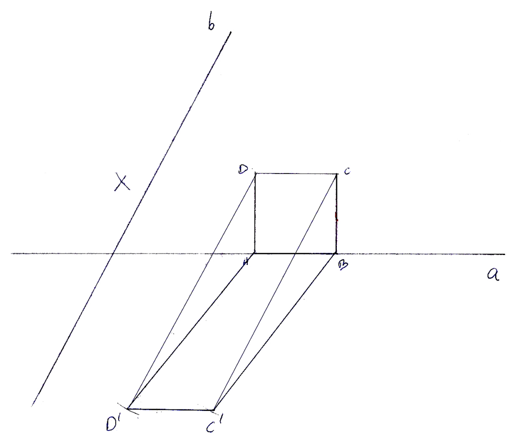
b) *Wyznacz zbiór punktów stałych przekształcenia P_{-2}.*

c) *Czy P_{-2} jest podobieństwem?*

d) *Określ, jeśli istnieje, przekształcenie odwrotne do P_{-2}.*

Odpowiedzi uzasadnij!

Rozwiązanie studenta B dotyczące punktu c).



Jak widać na rysunku obrazem kwadratu w tym przekształceniu nie jest kwadrat

$$\frac{|AD|}{|AC|} \neq \frac{|AB|}{|D'C'|}$$

S. Turnau (1991) precyzując pojęcie błędu napisał, iż *błąd jest nieumyślny, tj. popełniający go działa w dobrej intencji i w swoim mniemaniu – właściwie.* Mając na uwadze przywołane stwierdzenie można być zdania, iż to, co student przedstawił jako rozwiązanie zadania (rezultat jego myślenia nad postawionym problemem) stanowiło – w jego odczuciu – właściwą odpowiedź na pytanie: „Czy P_{-2} jest podobieństwem?". Oczywiście, problem nie tkwi w tym, że autor sporządził i powołał się w rozwiązaniu na rysunek, na którym rzeczywiście widać, że w rozważanym przekształceniu obrazem wskazanego kwadratu nie jest kwadrat[7]. Istota dostrzeżonej trudności polega na tym, że autorowi pracy wydawało się, że zrobił to, co należało zrobić, żeby odpowiedzieć na postawione w ramach egzaminu pytanie. „Sformułowana" przez studenta odpowiedź ukryta jest w rysunku; student „odpowiedział rysunkiem". (Czytelnik pracy może spróbować tę odpowiedź „wydobyć" z przedstawionego rozwiązania.) Obiekty przedstawione na wykonanym (dokładnie) rysunku student potraktował jako prawidłowo „skonstruowany" kontrprzykład, a argumentację wzrokową, którą się posłużył, jako wystarczającą argumentację matematyczną. Rozumował tak, jakby uważał, że:

FP „DPK"
fałszywe przekonanie – „dowód przez pokazanie"
Argumentacja wizualna („jak widać na rysunku") jest rodzajem argumentacji matematycznej.

Fałszywe przekonanie *FP „COPI"*, to przykład fałszywego przekonania typu I. *FP „iloczyn"* należy do fałszywych przekonań typu *„połączenia"*. Typ III fałszywych przekonań zilustrowany został przez *FP „odcinek"*. Natomiast *FP „DPK"* ukazuje istotę fałszywych przekonań typu IV.

4. Zakończenie

Zaprezentowane (w rozprawie doktorskiej) rozwiązania zadań pozwalają wątpić w słuszność stwierdzenia, że *fałszywe przekonania* funkcjonujące w rozumowaniach studentów zanikają samoistnie w miarę upływu czasu, czy też w wyniku rozbudowywania ich matematycznej wiedzy. Uzmysławiają, że każde nieusunięte *fałszywe przekonanie* stanowi poważne zagrożenie dla wiedzy studentów. *Fałszywe przekonania* mogą bowiem stać się, z jednej strony, przyczyną szeregu różnych błędów i nieporozumień trudnych do wyeliminowania bez wcześniejszego usunięcia zakotwiczonych w umysłach uczących się matematyki rozmaitych niepoprawnych schematów, koncepcji czy reguł, z drugiej zaś impulsem do formowania się w ich umysłach kolejnych *fałszywych przekonań*, gdyż, jak stwierdziła Z. Krygowska:

[7] Student B jest także autorem innego rozwiązania przemawiającego za funkcjonowaniem w jego rozumowaniu *FP „brzeg" – Figura to linia przedstawiona śladem przyrządu rysującego* (zob. Pawlik, 2008). W kontekście przedstawionego wcześniej fałszywego przekonania *FP „odcinek"* oraz *FP „brzeg"* pojawiają się tu pytania: Jaki zbiór punktów student miał na myśli mówiąc o kwadracie? W jaki sposób wyznaczał obraz tego kwadratu w badanym przekształceniu?

> (...) matematyka jako przedmiot uczenia się zachowuje swą organizację wewnętrzną. Jest to dziedzina pojęciowo zorganizowana przez samą siebie tak, że pozornie drobna luka w rozumieniu lub wiedzy łatwo może sprowokować następne nieporozumienia, narastające jedne na drugich, które uzewnętrzniają się w lawinie błędów, trudnej do zatrzymania (Krygowska, 1989, s. 142).

Literatura

Bell, A.: 1992, Systematyczne użycie konfliktu poznawczego w nauczaniu – trzy eksperymenty, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka Matematyki* **13**, 9–54.

Krygowska, Z.: 1989, Zrozumieć błąd w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **10**, 141-147.

Okoń, W.: 1984, *Słownik pedagogiczny*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pawlik, B.: 2003, On the understanding of geometric transformations by mathematics freshmen, w: Płocki, A. (red.), *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Folia 16, Studia Mathematica III*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków, 155–164.

Pawlik, B.: 2004a, *On false convictions concerning geometric transformations of the plane in mathematics students' reasoning*, referat (w postaci artykułu) przygotowany na konferencję ICME 10 Kopenhaga 2004, 4-11 lipca 2004, publikacja internetowa. (`http://www.icme-organisers.dk/tsg10/articulos/Pawlik_30_updated_paper.doc`).

Pawlik, B.: 2004b, On false convictions in mathematics students' reasoning, *w: Mathematica. Proceedings of the XI^{th} Slovak-Czech-Polish Mathematical School, Pedagogical Faculty Catholic University in Ružomberok, Ružomberok June 2nd-5th*, 138–145.

Pawlik, B.: 2004c, *Fałszywe przekonania dotyczące przekształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki.* Niepublikowana rozprawa doktorska, promotor: prof. dr hab. Stefan Turnau.

Pawlik, B.: 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 365-376.

Pawlik, B.: 2008, Co to jest fałszywe przekonanie? Prezentacja zjawiska w oparciu o przykłady rozwiązań zadań podanych przez studentów matematyki, *w: Współczesne Problemy Nauczania Matematyki 1 (seria: Prace Monograficzne z Dydaktyki Matematyki), "Forum Dydaktyków Matematyki"*, Bielsko-Biała, 115-128.

Powązka, Z.: 2009, O fałszywych przekonaniach obserwowanych na zajęciach z analizy matematycznej, w: Chronowski, A., Klakla, M. (red.), *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków, 213-223.

Rasiowa, H.: 1984, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Turnau, S.: 1991, O niektórych błędach dydaktycznych i ich skutkach, *Problemy dydaktyczne matematyki,* **tom V**, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Zielona Góra, 145-154.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail bpawlik@up.krakow.pl