

Piotr Błaszczuk, Kazimierz Mrówka

Euclides, *Elementy*, Księga III

Euclid, *Elements*, Book III. Translated Into Polish From the Text of Heiberg*

Definicje

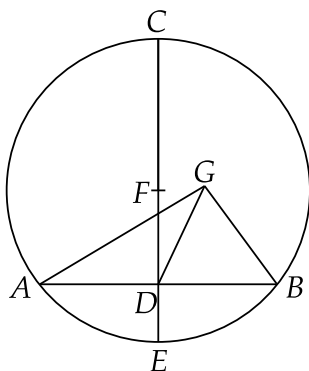
1. Równe są te koła, których średnice są równe lub te z centrów są równe.
2. Mówi się, że prosta styka się z kołem, gdy napotykać koło i będąc przedłużona nie przecina koła.
3. Mówi się, że koła stykają się ze sobą, gdy nie przecinają się ze sobą.
4. Mówi się, że proste w kole są w równej odległości od centrum, gdy prostopadłe poprowadzone do nich są równe.
5. Mówi się, że jest w większej odległości ta (prosta), na którą pada większa prostopadła.
6. Odcinek koła jest figurą zawartą między prostą i obwodem koła.
7. Kąt odcinka zaś to ten zawarty między prostą i obwodem koła.
8. Kąt w odcinku zaś jest kątem zawartym między połączonymi prostymi, gdy dowolny punkt jest obrany na obwodzie odcinka, a proste są poprowadzone od niego do krańców prostej, która jest podstawą odcinka.
9. Kiedy zaś prosta zawierająca kąt przetnie obwód, wtedy mówi się, że kąt stoi na tym (obwodzie).
10. Wycinek koła zaś jest figurą zawartą między prostymi zawierającymi kąt i obwodem odciętym przez nie, gdy kąt jest utworzony w centrum koła.
11. Podobne odcinkami koła to te, które przyjmują równe kąty lub w których kąty są wzajemnie równe.

Twierdzenia

Twierdzenie 1

Znaleźć centrum danego koła.

Niech ABC będzie danym kołem. Należy więc znaleźć centrum koła ABC.



Niech będzie poprowadzona przez nie dowolna linia prosta AB i niech będzie przecięta na pół w punkcie D ; i niech do AB będzie poprowadzona do kątów prostych DC i niech będzie przedłużona do E ; i niech CE będzie przecięta na pół w F . Twierdzę, że F jest centrum koła ABC .

Jeśli bowiem nie (jest), to jeśli możliwe, niech będzie nim G i niech GA , GD oraz GB będą połączone. A skoro AD jest równa DB , zaś DG (jest) wspólna, to dwie AD , DG są równe dwóm BD , DG odpowiednio. I podstawa GA jest równa podstawie GB , bo są z centrum. Zatem trójkąt ADG jest równy trójkątowi GDB . Kiedy zaś prosta jest przedłużeniem prostej tak, że kąty przyległe są równe, to każdy z równych kątów jest prosty; zatem kąt GDB jest prosty. I FDB jest również prosty; zatem FDB jest równy GBD , większy mniejszemu; co jest niemożliwe. Zatem G nie jest centrum koła ABC . Podobnie możemy wykazać, że nie jest nim żaden inny (punkt), z wyjątkiem F .

Zatem punkt F jest centrum koła ABC .

Wniosek

Stąd jasne (jest), że jeśli prosta w kole przecina prostą na pół pod kątami prostymi, to centrum koła jest na przecięciu. Co było do okazania.

Twierdzenie 2

Jeśli na obwodzie koła obrane są dowolnie dwa punkty, to prosta łącząca punkty będzie przebiegać wewnątrz koła.

Niech ABC będzie kołem i niech dwa punkty A , B będą obrane dowolnie na jego obwodzie. Twierdzę, że prosta łącząca A z B będzie przebiegać w kole.

Jeśli bowiem nie, to jeśli możliwe, niech padnie na zewnątrz, jak AEB i niech będzie obrane centrum koła ABC , i niech będzie on D ; niech DA , DB będą połączone i niech będzie poprowadzona DFE .

Skoro rzeczywiście DA jest równa DB , zatem również kąt DAE jest równy DBE ; a skoro został utworzony jeden bok AEB trójkąta DAE , zatem kąt DEB jest większy od DAE . DAE zaś (jest) równy DBE ; zatem DEB (jest) większy od DBE . Skoro zaś większy kąt jest wyznaczony przez większy bok, zatem DB (jest) większy od DE . DB zaś (jest) równa DF . Zatem DF (jest) większy od DE , mniejszy od większego; co jest niemożliwe. Zatem prosta łącząca A z B nie będzie padać na

centrum i przecinając AB nie (przechodzącą) przez centrum, również przecina ją do (kątown) prostych.

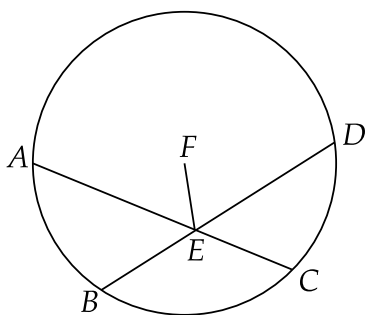
Ale niech CD przetnie AB . Twierdę, że również ją przetnie, a tym samym AF jest równa FB .

Skoro bowiem, przy użyciu tej samej konstrukcji, EA jest równa EB , to kąt EAF jest również równy EBF . I prosty AFE jest również równy prostemu BFE ; zatem EAF , EBF są dwoma trójkątami mającymi dwa kąty równe dwóm kątom i jeden bok równy jednemu bokowi, ich wspólny EF , i przylegający do jednego z równych kątów; a zatem pozostałe boki będą równe pozostałym bokom; zatem AF (jest) równa FB .

Tym sposobem, jeśli w kole jakaś prosta (przechodząc) przez centrum przecina na pół jakąś prostą nie (przechodzącą) przez centrum, to również przecina ją do (kątown) prostych; i jeśli przecina ją do (kątown) prostych, to również przecina ją na pół. Co było do okazania.

Twierdzenie 4

Jeśli w kole dwie proste przecinają jedna drugą i nie (przechodzą) przez centrum, to nie przecinają jedna drugiej na pół.



Niech $ABCD$ będzie kołem i niech w nim dwie proste AC , BD , które nie (przechodzą) przez centrum, przecinają jedna drugą w E . Twierdę, że nie przecinają jedna drugiej na pół.

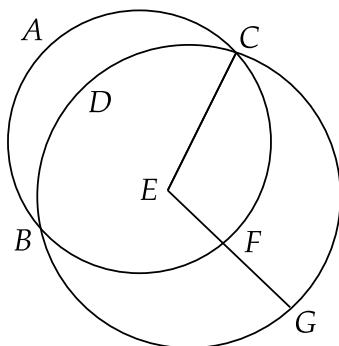
Jeśli bowiem możliwe, niech przetną jedna drugą na pół, w ten sposób, że z jednej strony AE jest równa EC , z drugiej zaś BE (jest równa) ED ; i niech będzie znalezione centrum koła $ABCD$, i niech to będzie F , i niech FE będzie połączony.

Skoro rzeczywiście prosta (przechodzącą) przez centrum, FE , przecina na pół jakąś prostą nie (przechodzącą) przez centrum, AC , to przecina ją również do (kątown) prostych; zatem (kąt) FEA (jest) prosty. Znowu, skoro jakaś prosta FE przecina na pół jakąś prostą BD , to przecina ją również do (kątown) prostych; zatem FEB (jest) prosty. Wykazano zaś, że również FEA (jest) prosty; zatem ZEA jest równy FEB , mniejszy większemu; co jest niemożliwe. Zatem AC , BD nie przecinają jedna drugiej na pół.

Tym sposobem, jeśli w kole dwie proste przecinają jedna drugą i nie (przechodzą) przez centrum, to nie przecinają jedna drugiej na pół. Co było do okazania.

Twierdzenie 5

Jeśli dwa koła przetną jedno drugie, to nie będą miały tego samego centrum.



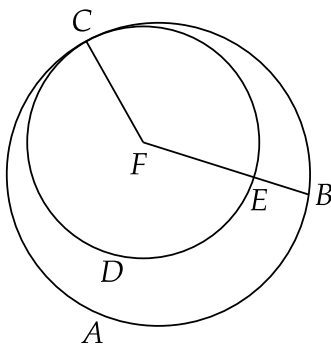
Niech bowiem koła ABC, CDG przetną jedno drugie w punktach B, C. Twierdzą, że nie będą miały tego samego centrum.

Jeśli bowiem możliwe, niech będzie nim E i niech EC będzie połączony, i niech EFG będzie dowolnie poprowadzona przez (to koło). A skoro punkt E jest centrum koła ABC, to EC jest równa EF. Znowu, skoro punkt E jest centrum koła CDG, to EC jest równa EG; zostało zaś wykazane, że również EC (jest) równa EF; zatem również EF jest równa EG, mniejsza większej; co jest niemożliwe. Zatem punkt E nie jest centrum kół ABC, CDG.

Tym sposobem, jeśli dwa koła przetną jedno drugie, to nie będą miały tego samego centrum. Co było do okazania.

Twierdzenie 6

Jeśli dwa koła stykają się ze sobą, to nie będą miały tego samego centrum.



Niech bowiem dwa koła ABC, CDE stykają się ze sobą w punkcie C. Twierdzą, że nie będą miały tego samego centrum.

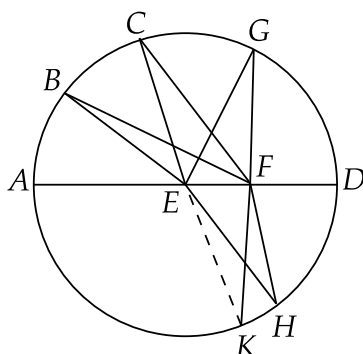
Jeśli bowiem możliwe, niech będzie nim F i niech F , C będą połączone, i niech FEB będzie dowolnie poprowadzona przez (koło).

Skoro rzeczywiście punkt F jest centrum koła ABC , to FC jest równa FB . Znowu, skoro punkt F jest centrum koła CDE , to FC jest równa FE . Zostało zaś wykazane, że (jest) równa FB ; zatem również FE jest równa FB , mniejsza większej; co jest niemożliwe. Zatem punkt F nie jest centrum kół ABC , CDE .

Tym sposobem, jeśli dwa koła stykają się ze sobą, to nie będą miały tego samego centrum. Co było do okazania.

Twierdzenie 7

Jeśli na średnicy koła jest obrany punkt, który nie jest centrum koła, zaś z tego punktu będą padać na koło jakieś proste, to z jednej strony największą będzie ta, na której (jest) centrum, z drugiej zaś najmniejszą resztą (średnicy); zaś z pozostałych, ta bliższa tej przez centrum będzie zawsze większa od tej dalszej; zaś tylko dwie równe będą padać z punktu na kole, po jednej z każdej (strony) najmniejszej (prostej).



Niech $ABCD$ będzie kołem, zaś AD będzie jego średnicą i niech na AD będzie obrany punkt F , który nie jest centrum koła, zaś centrum koła niech będzie E , i niech z F proste FB , FC , FG będą padać na koło $ABCD$. Twierdzę, że z jednej strony FA jest największa, z drugiej zaś FD jest najmniejsza, a z pozostałych, z jednej strony FB (jest) większa od FC , z drugiej zaś FC od FG .

Niech bowiem będą połączone BE , CE , GE . A skoro w każdym trójkącie dwa boki są większe od pozostałego, to EB , EF są większe od BF . AE zaś (jest) równa BE , zatem BE , EF są równe AF ; zatem AF (jest) większa od BF . Znowu, skoro BE jest równa CE i FE (jest) wspólna, to dwie BE , EF są równe dwóm CE , EF . Ale również kąt BEF (jest) większy od kąta CEF . Zatem podstawa BF jest większa od podstawy CF , dlatego również CF jest większa od FG .

Znowu, skoro GF , FE są większe od EG , zaś EG (jest) równa ED , to GF , FE są większe od ED . Niech EF będzie odjęta od obu; zatem reszta GF jest większa od reszty FD . Zatem z jednej strony FA (jest) największa, z drugiej zaś FD najmniejsza, i z jednej strony FB (jest) większa od FC , z drugiej zaś FC od FG .

Twierdzę, że również z punktu F tylko dwie równe (proste) padną na koło ABCD, po jednej z każdej (strony) najmniejszej FD. Niech bowiem na prostej EF i w punkcie E na niej będzie utworzony FEH równy kątowi GEF i niech FH będzie dołączona. Skoro rzeczywiście GE jest równa EH, zaś EF (jest) wspólna, to dwa boki GE, EF są równe dwóm bokom HE, EF; i kąt GEF jest równy kątowi HEF; zatem podstawa FG jest równa podstawie FH. Twierdzę więc, że inna (prosta) równa FG nie będzie padać na koło z punktu F; jeśli bowiem możliwe, to niech FK będzie padać. A skoro FK jest równa FG, ale FH jest równa FG, to również FK jest równa FH, bliższa tej przez centrum równa tej dalszej; co jest niemożliwe. Zatem inna (prosta) równa GF nie będzie padać z punktu F na koło; zatem tylko jedna.

Tym sposobem, jeśli na średnicy koła jest obrany punkt, który nie jest centrum koła, zaś z tego punktu będą padać na koło jakieś proste, to z jednej strony największą będzie ta, na której (jest) centrum, z drugiej zaś najmniejszą reszta (średnicy); zaś z pozostałych, ta (prosta) bliższa tej (prostej przechodzącej) przez centrum będzie zawsze większa od tej dalszej; zaś tylko dwie równe (proste) będą padać z punktu na kole, po jednej z każdej (strony) najmniejszej (prostej). Co było do okazania.

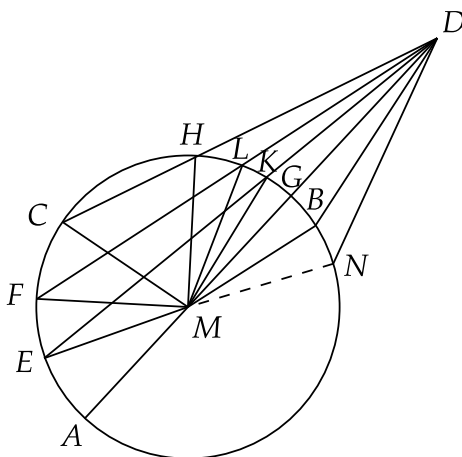
Twierdzenie 8

Jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła, zaś jakieś proste są poprowadzone z punktu do koła, z których jedna (przechodzi) przez centrum, pozostałe zaś poprowadzone są dowolnie, to z jednej strony, z prostych padających na wklęsły obwód, ta (przechodząca) przez centrum jest największa, z drugiej zaś, z tych innych, ta (prosta) bliższa (prostej przechodzącej) przez centrum jest zawsze większa od dalszej; z jednej strony, z prostych padających na wypukły obwód, najmniejszą jest ta pomiędzy punktem i obwodem, z drugiej zaś, z tych innych, ta (prosta) bliższa najmniejszej jest zawsze mniejsza od tej bardziej oddalonej; zaś tylko dwie równe (proste) będą padać z punktu na koło, po jednej z każdej (strony) tej najmniejszej (prostej).

Niech ABC będzie kołem i niech punkt D będzie obrany na zewnątrz ABC, i niech proste DA, DE, DF, DC będą poprowadzone do (koła), i niech DA będzie (przechodzić) przez (centrum). Twierdzę, że z jednej strony, z prostych padających na wklęsły obwód AEFC, AD (przechodząca) przez centrum jest największa, z drugiej zaś DE jest większa od DF i DF od DC; z jednej strony, z prostych padających na wypukły obwód HLKG, najmniejszą jest DG pomiędzy punktem i obwodem AG, z drugiej zaś bliższa do najmniejszej DG jest zawsze mniejsza od tej bardziej oddalonej, DG od DL i DL od DH.

Niech bowiem będzie obrane centrum koła ABC i niech nim będzie M; niech ME, MF, MC, MK, ML, MH będą połączone.

A skoro AM jest równa EM, to niech MD będzie dodana do każdej; zatem, AD jest równa EM, MD. Ale EM, MD jest większa od ED; zatem również AD jest większa od ED. Znowu, skoro zaś ME jest równa MF i MD jest wspólna, to EM, MD są równie FM, MD; i kąt EMD jest większy od kąta FMD; zatem podstawa ED jest większa od podstawy FD. Podobnie zaś możemy wykazać, że FD jest większa od CD; zatem z jednej strony DA (jest) największa, z drugiej zaś



DE większa od DF i DF od DC.

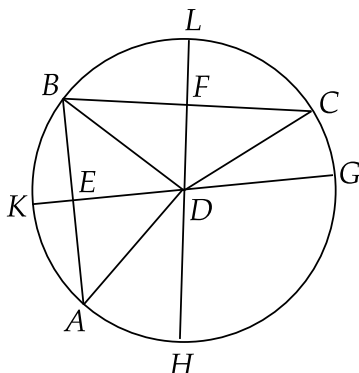
A skoro MK, KD są większe od MD, zaś MG (jest) równa MK, to reszta KD jest większa od reszty GD; tak iż GD jest mniejsza od KD; a skoro na jednym z boków trójkąta MLD zbudowane zostały dwie proste MK, KD, spotykające się wewnątrz, zatem MK, KD są mniejsze od ML, LD; zaś MK jest równa ML; zatem reszta DK jest mniejsza od reszty DL. Podobnie możemy wykazać, że również DL jest mniejsza od DH; zatem z jednej strony DG (jest) najmniejsza, z drugiej zaś DK (jest) mniejsza od DL, a DL od DH.

Twierdzę również, że tylko dwie równe (proste) będą padać z punktu D na koło, po jednej z każdej (strony) najmniejszej DG; niech na prostej MD i w punkcie M na niej będzie zbudowany kąt DMB równy kątowi KMD i niech DB będzie połączona. A skoro MK jest równa MB, zaś MD (jest) wspólna, to odpowiednio dwie KM, MD są równe dwóm BM, MD; i kąt KMD (jest) równy kątowi BMD; zatem podstawa DK jest równa podstawie DB. Twierdzę, że inna prosta równa DK nie padnie na koło z punktu D; jeśli bowiem możliwe, niech padnie i niech nią będzie DN. Skoro rzeczywiście DK jest równa DN, a DK jest równa DB, to również DB jest równa DN, bliższa do najmniejszej równa tej dalszej; co jest niemożliwe, jak zostało wykazane. Zatem nie więcej niż dwie równe (proste) będą padać na koło ABC z punktu D, po jednej z każdej (strony) najmniejszej DG.

Tym sposobem, jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła, zaś jakieś proste są poprowadzone z punktu do koła, z których jedna (przechodzi) przez centrum, pozostałe zaś poprowadzone są dowolnie, to z jednej strony, z prostych padających na wklęsły obwód, ta (przechodząca) przez centrum jest największa, z drugiej zaś, z tych innych, ta (prosta) bliższa (prostej przechodzącej) przez centrum jest zawsze większa od jednej dalszej; z jednej strony, ta z prostych padających na wypukły obwód, najmniejszą jest ta pomiędzy punktem i obwodem, z drugiej zaś, z tych innych, ta (prosta) bliższa najmniejszej jest zawsze mniejsza od tej bardziej oddalonej; zaś tylko dwie równe (proste) będą padać z punktu na koło, po jednej z każdej (strony) tej najmniejszej (prostej). Co było do okazania.

Twierdzenie 9

Jeśli jakiś punkt jest obrany wewnątrz koła i więcej niż dwie równe proste padają z tego punktu na koło, to obrany punkt jest centrum koła.



Niech ABC będzie kołem, zaś D punktem w nim i niech z D na koło ABC będą padać więcej niż dwie równe proste, DA, DB, DC. Twierdzę, że punkt D jest centrum koła.

Niech bowiem AB, BC będą połączone i podzielone na pół w punktach E, F, i niech ED, FD będą połączone, niech będą poprowadzone do punktów G, K, H, L.

Skoro rzeczywiście AE jest równa EB, zaś ED (jest) wspólna, to dwie AE, ED są równe dwóm BE, ED; i podstawa DA (jest) równa podstawie DB; zatem kąt AED jest równy kątowi BED. Zatem każdy z kątów AED, BED jest prosty; zatem GK przecina AB na pół i do (kątów) prostych. A skoro w kole jakaś prosta przecina jakąś prostą na pół i do (kątów) prostych, to centrum koła jest na przecinającej, zatem centrum koła jest na GK. Dlatego również centrum koła ABC jest na HL. I proste GK, HL nie mają żadnego wspólnego punktu prócz D; zatem punkt D jest centrum koła ABC.

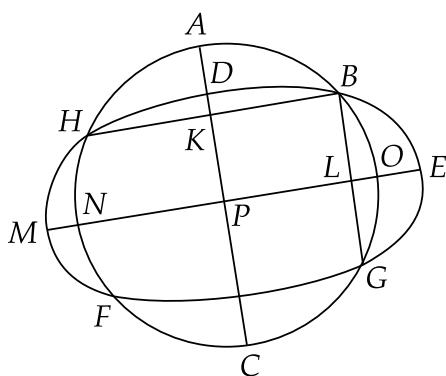
Tym sposobem, jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła, zaś więcej niż dwie równe proste padają z punktu na koło, to obrany punkt jest centrum koła. Co było do okazania.

Twierdzenie 10

Koło nie przecina koła w więcej niż dwóch punktach.

Jeśli bowiem możliwe, to niech koło ABC przetnie koło DEF w więcej niż dwóch punktach, B, C, F, H; i niech BH, BG będą połączone i przecięte na pół w punktach K, L; i niech KC, LM będą poprowadzone do (kątów) prostych do BH, BG z K, L i niech będą przedłużone do punktów A, E.

Skoro rzeczywiście w kole ABC prosta AC przecina prostą BH na pół i do (kątów) prostych, to centrum koła ABC jest na AC. Znowu, skoro w tym samym kole ABC prosta NO przecina BG na pół i do (kątów) prostych, to centrum koła ABC jest na NO. Zostało zaś również wykazane, że na AC i proste AC, NO nie spotykają w żadnym innym niż w P; zatem punkt P jest centrum koła ABC.

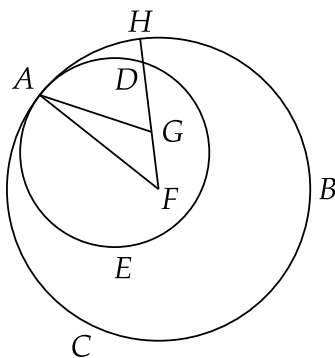


Podobnie możemy wykazać, że P jest również centrum koła DEF; zatem dwa przecinające się koła ABC, DEF, mają to samo centrum P. Co jest niemożliwe.

Tym sposobem, koło nie przecina koła w więcej niż dwóch punktach. Co było do okazania.

Twierdzenie 11

Jeśli dwa koła stykają się ze sobą wewnętrznym i obrane są ich centra, to utworzona prosta łącząca ich centra będzie padać na punkt styczności kół.



Niech bowiem dwa koła ABC, ADE stykają się wewnętrznym w punkcie A i niech będzie obrane centrum F koła ABC i (centrum) G (koła) ADE. Twierdzą, że utworzona prosta łącząca G z F będzie padać na A.

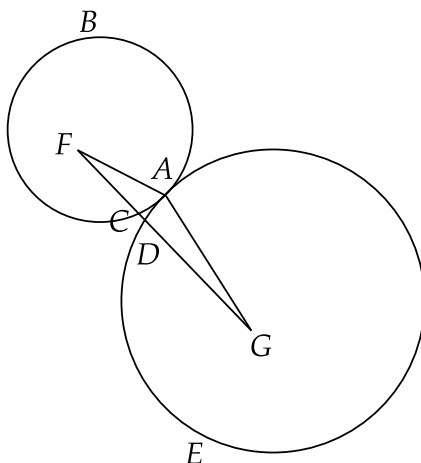
Jeśli bowiem nie, to jeśli możliwe, niech będzie padać jak FGH i niech AF, AG będą połączone.

Skoro rzeczywiście AG, GH są większe od FA, to znaczy od FH, to niech FG będzie odjęta od każdej; zatem reszta AG jest większa od reszty GH. Zaś AG (jest) równa GD; zatem również GD jest większa od GH, mniejsza od większej. Co jest niemożliwe. Zatem prosta łącząca F z G nie będzie padać na zewnątrz; zatem będzie padać w A na styku.

Tym sposobem, jeśli dwa koła stykają się ze sobą wewnętrznym i obrane są ich centra, to utworzona prosta łącząca ich centra będzie padać na punkt styczności kół. Co było do okazania.

Twierdzenie 12

Jeśli dwa koła stykają się zewnętrznym, to (prosta) łącząca ich centra będzie przechodzić przez punkt styczności.



Niech bowiem dwa koła ABC, ADE będą się stykać zewnętrznym w punkcie A i niech będzie obrane centrum F (koła) ABC. Twierdzą, że prosta łącząca F z G będzie przechodzić przez punkt styczności A.

Jeśli bowiem nie, to jeśli możliwe, niech będzie przechodzić jak FCDG i niech AF, AG będą połączone.

Skoro rzeczywiście punkt F jest centrum koła ABC, to FA jest równa FC. Znowu, skoro punkt G jest centrum koła ADE, to GA jest równa GD. Zostało zaś wykazane, że również FD; zatem FA, AG są równe FC, GD; to znaczy cała FG jest większa od FA, AG. Ale również mniejsza. Co jest niemożliwe. Zatem prosta łącząca F z G nie może nie przechodzić przez punkt styczności A. Zatem będzie przez niego przechodzić.

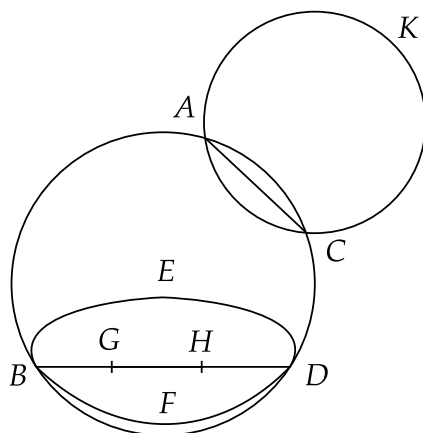
Tym sposobem, jeśli dwa koła stykają się zewnętrznym, to (prosta) łącząca ich centra będzie przechodzić przez punkt styczności. Co było do okazania.

Twierdzenie 13

Koło styka się z kołem w nie więcej niż jednym punkcie, czy stykają się wewnętrznym czy zewnętrznym.

Jeśli bowiem możliwe, to niech koło ABDC będzie się stykać z kołem EBF, D, B.

I niech z jednej strony będzie obrane centrum G koła ABDC, z drugiej zaś (centrum) H (koła) EBF.



Zatem (prosta) łącząca G z H będzie padać na B, D; niech będzie padać jak na BGHD. A skoro punkt G jest centrum koła ABCD, to BG jest równa GD; zatem BG (jest) większa od HD; zatem BH (jest) dużo większa od HD. Zatem, skoro punkt H jest centrum koła EBFD, to BH jest równa HD. Zostało zaś wykazane, że również dużo większa od niej. Co jest niemożliwe. Zatem koło nie styka się z kołem w więcej niż jednym punkcie.

Twierdzę, że nie styka się również zewnętrznie.

Jeśli bowiem możliwe, to niech koło ACK będzie się stykać z kołem ABDC zewnętrznie w więcej niż jednym punkcie A, C i niech AC będą połączone.

Skoro rzeczywiście dwa punkty koła, A, C, zostały obrane dowolnie na obwodzie każdego z kół ABDC, ACK, to prosta łącząca punkty będzie padać wewnątrz każdego (koła). Ale będzie padać wewnątrz koła ABCD i na zewnątrz ACK. Co jest niedorzeczne. Zatem koło nie styka się z kołem zewnętrznie w więcej niż jednym punkcie; zostało zaś wykazane, że również wewnątrz.

Tym sposobem, koło styka się z kołem w nie więcej niż jednym punkcie, czy stykają się wewnątrz czy zewnętrznie. Co było do okazania.

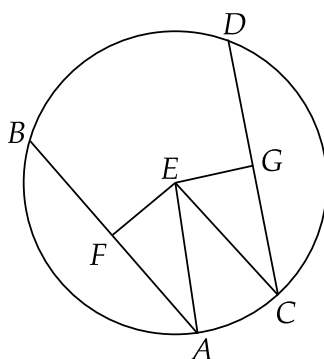
Twierdzenie 14

W kole równe proste są w równej odległości od centrum i te, które są w równej odległości od centrum, są równe jedna drugiej.

Niech ABDC będzie kołem i niech AB, CD będą w nim równymi prostymi. Twierdzę, że AB, CD są w równej odległości od centrum.

Niech bowiem będzie obrane centrum koła ABDC i niech nim będzie E; i niech z E poprowadzone będą EF, EG prostopadłe do AB, CD; i niech AE, EC będą połączone.

Skoro rzeczywiście prosta EF, przez centrum koła, przecina prostą AB, nie przez centrum, do (kątown) prostych, to również przecina ją na pół. Zatem AF (jest) równa FB; zatem AB (jest) podwojeniem AF. Dlatego również CD jest podwojeniem CG i AB jest równa CD; zatem również AF (jest) równa CG. A skoro AE jest równa EC, to również (kwadrat) na AE jest równy (kwadratowi)



na EC. Ale z jednej strony (kwadraty) na AF, EF (są) równe (kwadratowi) na AE, bowiem kąt F (jest) prosty; z drugiej zaś (kwadraty) na EG, GC (są) równe (kwadratowi) na EC, bowiem kąt w G (jest) prosty. Zatem (kwadraty) na AF, FE są równe (kwadratowi) na CG, GE, z których (kwadrat) na AF jest równy (kwadratowi) na CG, bowiem AF jest równa CG; zatem reszta, (kwadrat) na FE, jest równa (kwadratowi) na EG; zatem EF (jest) równa EG. Było zaś powiedziane, że w kole proste są w równej odległości od centrum, gdy poprowadzone do nich prostopadłe są równe. Zatem AB, CD są w równej odległości od centrum.

Niech więc proste AB, CD będą w równej odległości od centrum, to znaczy niech EF będzie równa EG. Twierdzę, że również AB jest równa CD.

Podobnie bowiem możemy wykazać, przy użyciu tej samej konstrukcji, że z jednej strony AB jest podwojeniem AF, z drugiej zaś CD (jest podwojeniem) CG. A skoro AE jest równa CE, to (kwadrat) na AE jest równy (kwadratowi) na CE. Ale z jednej strony (kwadraty) na EF, FA są równe (kwadratowi) na AE, z drugiej zaś (kwadraty) na EG, GC równe (kwadratowi) na CE. Zatem (kwadraty) na EF, FA są równe (kwadratowi) na EG, GC, z których (kwadrat) na EF jest równy (kwadratowi) na EG, bowiem EF (jest) równa EG; zatem pozostały (kwadrat) na AF jest równy (kwadratowi) na CG. Zatem AF (jest) równa CG; i z jednej strony AB jest podwojeniem AF, z drugiej zaś CB podwojeniem CG; zatem AB jest równa CD.

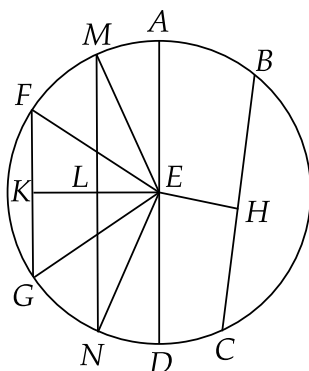
Tym sposobem, w kole równe proste są w równej odległości od centrum i te, które są w równej odległości od centrum, są równe jedna drugiej. Co było do okazania.

Twierdzenie 15

W kole, z jednej strony największą (prostą jest) średnicą, z drugiej zaś w przypadku pozostałych najbliższą centrum jest zawsze większa od bardziej oddalonej.

Niech ABCD będzie kołem, zaś AD niech będzie jego średnicą, centrum zaś E; i niech BC będzie bliżej średnicy AD, zaś FD bardziej oddalona. Twierdzę, że z jednej strony AD jest największą, z drugiej zaś BC większą od FG.

Niech EH, EK będą poprowadzone z centrum E do (kątown) prostych do BC, FG. A skoro z jednej strony BC jest bliżej centrum, z drugiej zaś FG bardziej odd-



alona, to EK (jest) większa od EH. Niech EL będzie równa EH i niech LM będzie poprowadzona przez L do (kątown) prostych do EK; i niech będzie poprowadzona do N, i niech ME, EN, FE, EG będą połączone.

A skoro EH jest równa EL, to również BC jest równa MN. Znowu, skoro z jednej strony AE jest równa EM, z drugiej zaś ED (jest równa) EN, to AD jest równa ME, EN. Ale ME, EN są większe od MN; i MN (jest) równa BC. Zatem AD jest większa od BC. A skoro dwie ME, EN są równe dwóm FE, EG i kąt MEN (jest) większy od kąta FEG, to podstawa MN jest większa od podstawy FG. Ale zostało wykazane, że MN (jest) równa BC. Zatem z jednej strony średnica AD jest największą (prostą), z drugiej zaś BC (jest) większa od FG.

Tym sposobem, w kole, z jednej strony największą (prostą jest) średnica, z drugiej zaś w przypadku pozostałych najbliższa centrum jest zawsze większa od bardziej oddalonej. Co było do okazania.

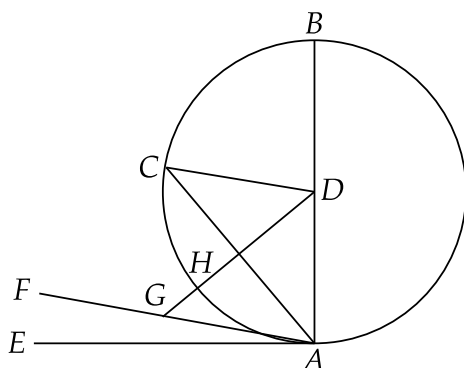
Twierdzenie 16

(Prosta) poprowadzona do średnicy koła do (kątów) prostych z jego krańca będzie padać na zewnątrz koła, a inna prosta nie będzie mogła być umieszczona w przestrzeni między prostą i obwodem; i z jednej strony kąt półokręgu jest większy od każdego kąta ostrego prostoliniowego, z drugiej zaś reszta (jest) mniejsza od (każdego kąta ostrego prostoliniowego).

Niech ABC będzie kołem z centrum D i średnicy AB. Twierdzę, że (prosta) poprowadzona z A do AB pod kątem prostym z jego krańca będzie padać na zewnątrz koła.

Jeśli bowiem nie, to jeśli możliwe, niech będzie padać wewnątrz jako CA i niech DC będą połączone.

Skoro DA jest równa DC, to również kąt DAC jest równy kątowi ACD; zaś DAC jest prosty; zatem również ACD (jest) prosty; tak więc w trójkącie ACD dwa kąty DAC, ACD są równe dwóm (kątom) prostym. Co jest niemożliwe. Zatem (prosta) narysowana z punktu A do (kątown) prostych do BA, nie będzie padać wewnątrz koła. Podobnie możemy wykazać, że nie będzie także (padać) na obwód; zatem (będzie padać) na zewnątrz.



Niech będzie padać jak AE. Twierdzą więc, że inna prosta nie będzie mogła być umieszczona w przestrzeni między prostą AE i obwodem CHA.

Jeśli bowiem możliwe, to niech będzie umieszczona jak FA i niech DG będzie poprowadzona z punktu D prostopadłe do FA. A skoro AGD jest prosty, zaś DAG mniejszy od prostego, to AD (jest) większa od DG; zaś DA (jest) równa DH. Zatem DH (jest) większa od DG, mniejsza od większej. Co jest niemożliwe. Zatem inna prosta nie może być umieszczona w przestrzeni między prostą i obwodem.

Twierdzą również, że z jednej strony kąt półokręgu zawarty między prostą BA i obwodem CHA jest większy od każdego kąta ostrego prostoliniowego, z drugiej zaś reszta zawarta między obwodem CHA i prostą AE jest mniejsza od każdego kąta ostrego prostoliniowego.

Jeśli bowiem każdy kąt ostry prostoliniowy jest większy od zawartego między prostą BA i obwodem CHA lub mniejszy od zawartego między obwodem CHA i prostą AE, to prosta może być umieszczona w przestrzeni między obwodem CHA i prostą EA; tak iż utworzy, z jednej strony, (kąt) zawarty między prostymi, większy od kąta zawartego między prostą BA i obwodem CHA, z drugiej zaś mniejszy od (kąta) zawartego między obwodem CHA i prostą AE. Ale taka (prosta) nie może być umieszczona. Zatem (kąt) ostry zawarty między prostymi nie może być większy od kąta zawartego między prostymi BA i obwodem CHA, ani mniejszy od zawartego między obwodem CHA i prostą AE.

Wniosek

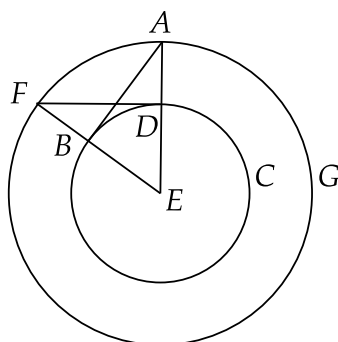
Stąd jasne (jest), że (prosta) poprowadzona pod kątami prostymi do średnicy koła z jego krańców styka się z kołem i że prosta styka się z kołem w jednym punkcie, jak to również zostało wykazane, że (prosta) spotykająca (koło) w dwóch (punktach) pada do wewnątrz (koła). Co było do okazania.

Twierdzenie 17

Z danego punktu poprowadzić prostą stykającą się z danym kołem.

Niech z jednej strony A będzie danym punktem, z drugiej zaś BCD danym kołem. Należy więc z punktu A poprowadzić prostą stykającą się z kołem BCD.

Niech bowiem będzie obrane centrum E koła i niech AE będzie połączona; i niech z jednej strony AFG będzie narysowane z centrum E i o promieniu EA, z



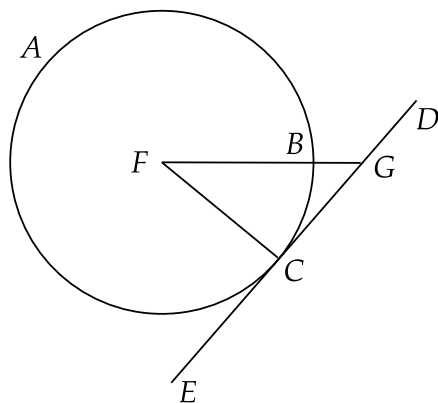
drugiej zaś niech DF będzie poprowadzona z D do (kątown) prostych do EA; i niech EF i AB będą połączone.

Skoro bowiem E jest centrum kół BCD, AFG, to z jednej strony EA jest równa EF, z drugiej zaś ED (jest równa) EB. Tak więc AE, EB są równe dwóm FE, ED i zawierają wspólny kąt w E. Zatem podstawa DF jest równa podstawie AB i trójkąt DEF jest równy trójkątowi EBA, i pozostałe trójkąty (są równe) pozostałym kątom. Zatem EDF jest równy EBA. EDF zaś (jest) prosty. Zatem również EBA (jest) prosty. I EB jest promieniem; i (prosta) poprowadzona pod kątem prostym do średnicy koła z jego krańców, styka się z kołem. Zatem AB styka się z kołem BCD.

A zatem z danego punktu A została poprowadzona prosta AB stykająca się z kołem BCD. Co było do wykonania.

Twierdzenie 18

Jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś inna prosta została połączona z centrum do punktu styczności, to tak połączona będzie prostopadła do stycznej.



Niech prosta DE styka się z kołem ABC w punkcie C i niech będzie znalezione centrum F koła ABC i niech FC będzie połączona z F do C. Twierdzą, że FC jest

prostopadła do DE.

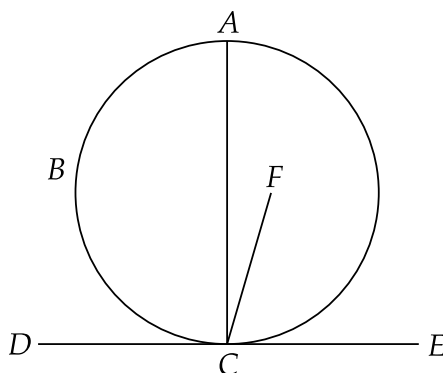
Jeśli bowiem nie, to niech FG będzie poprowadzona z F prostopadle do DE.

Skoro rzeczywiście FGC jest kątem prostym, to FCG jest ostry; i większy kąt leży naprzeciwko większego boku. Zatem FC (jest) większa od FG; zaś FC (jest) równa FB. Zatem również FB jest większa od FG, mniejsza od większej. Co jest niemożliwe. Zatem FG nie jest prostopadła do DE. Podobnie więc możemy wykazać, że również żadna inna z wyjątkiem FC. Zatem FC jest prostopadła do DE.

Tym sposobem, jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś (inna) prosta została połączona z centrum do punktu styczności, to tak połączona będzie prostopadła do stycznej. Co było do okazania.

Twierdzenie 19

Jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś linia prosta została poprowadzona z punktu styczności do kątów prostych do stycznej, to centrum koła będzie na tak poprowadzonej (prostej).



Niech bowiem prosta DE styka się z kołem ABC w punkcie C i niech z C będzie poprowadzona CA do (kątów) prostych do DE. Twierdzę, że centrum koła jest na AC.

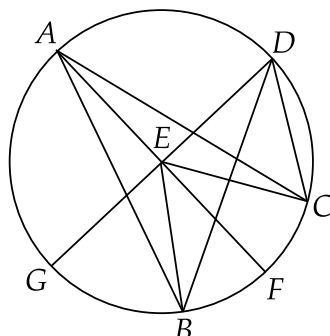
Jeśli bowiem nie, jeśli możliwe, to niech F będzie (centrum koła) i niech CF będą połączone.

Skoro rzeczywiście prosta DE styka się z kołem ABC i FC została połączona z centrum do punktu styczności, to FC jest prostopadła do DE. Zatem FCE jest (kątem) prostym. ACE zaś również (jest kątem) prostym; zatem FCE jest równy ACE, mniejszy większemu. Co jest niemożliwe. Zatem F nie jest centrum koła ABC. Podobnie możemy wykazać, że żaden inny (z wyjątkiem jednego) na AC.

Tym sposobem, jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś linia prosta została poprowadzona z punktu styczności do (kątów) prostych do stycznej, to centrum koła będzie na tak poprowadzonej (prostej). Co było do okazania.

Twierdzenie 20

W kole kąt w centrum jest podwojeniem tego na obwodzie, podczas gdy kąty mają taki sam obwód podstawy.



Niech bowiem ABC będzie kołem i z jednej strony niech BEC będzie kątem w jego centrum, z drugiej zaś BAC (kątem) na obwodzie, i niech mają taki sam obwód podstawy BC . Twierzę, że kąt BEC jest podwojeniem BAC .

Niech bowiem AE będą połączone i poprowadzone do F .

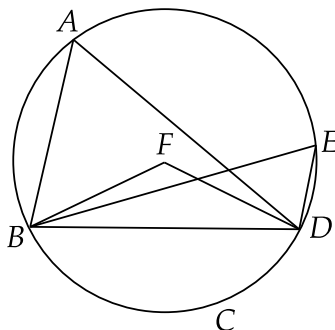
Skoro rzeczywiście EA jest równa EB , to również kąt EAB (jest) równy EBA . Zatem kąty EAB , EBA są podwojeniem EAB ; zaś kąt BEF (jest) równy EAB , EBA ; zatem również BEF jest podwojeniem EAB . Dlatego również FEC jest podwojeniem EAC . Zatem cały BEC jest podwojeniem całego BAC .

Znowu, niech inna będzie złamana i niech będzie inny kąt BDC , i niech połączone DE będą przedłużone do G . Podobnie możemy wykazać, że kąt GEC jest podwojeniem EDC , w którym GEB jest podwojeniem EDB . Zatem reszta BEC jest podwojeniem (reszty) BDC .

Tym sposobem, w kole kąt w centrum jest podwojeniem tego na obwodzie, podczas gdy kąty mają taki sam obwód podstawy. Co było do okazania.

Twierdzenie 21

W kole kąty na tym samym odcinku są sobie równe.



Niech $ABCD$ będzie kołem i niech kąty BAD , BED będą kątami na tym samym odcinku (koła) $BAED$. Twierdzą, że kąty BAD , BED są równe sobie.

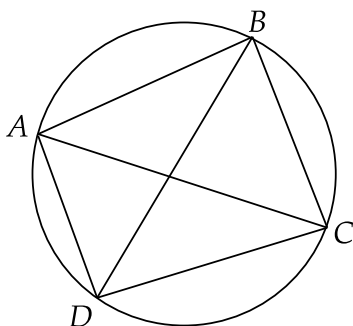
Niech bowiem będzie obrane centrum koła $ABCD$ i niech nim będzie F , i niech BD , FD będą połączone.

A skoro z jednej strony kąt BFD jest w centrum, z drugiej zaś BAD na obwodzie i mają ten sam obwód podstawy BCD , to kąt BFD jest podwojeniem BAD . Dlatego BDF również jest podwojeniem BED . Zatem BAD (jest) równy BED .

Tym sposobem, w kole kąty na tym samym odcinku (koła) są sobie równe.

Twierdzenie 22

Kąty przeciwległe czworokątów w kole (są) równe dwóm (kątom) prostym.



Niech $ABCD$ będzie kołem i niech $ABCD$ będzie czworokątem w nim. Twierdzą, że kąty przeciwległe czworokątów w kole są równe dwóm (kątom) prostym.

Niech AC , BD będą połączone.

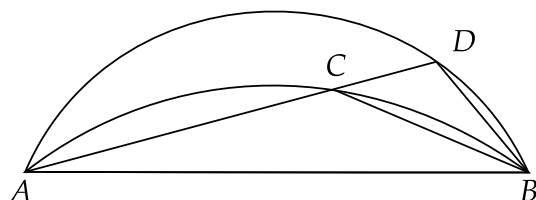
Skoro rzeczywiście w każdym trójkącie trzy kąty są równe dwóm (kątom) prostym, to trzy kąty CAB , ABC , BCA trójkąta ABC są równe dwóm kątom prostym. Z jednej strony CAB (jest) równy BDC , bowiem są na tym samym odcinku $BADC$, z drugiej zaś ACB (jest równy) ADB , bowiem są na tym samym odcinku $ADCB$. Zatem cały ADC jest równy BAC , ACB ; niech ABC będzie dodany do obu. Zatem ABC , BAC , ACB są równe ABC , ADC . Ale ABC , BAC , ACB są równe dwóm (kątom) prostym. Zatem również ABC , ADC są równe dwóm (kątom) prostym. Podobnie możemy wykazać, że również kąty BAD , DCB są równe dwóm (kątom) prostym.

Tym sposobem, kąty przeciwległe czworokątów w kole (są) równe dwóm (kątom) prostym. Co było do okazania.

Twierdzenie 23

Na tej samej prostej nie można zbudować dwóch podobnych i nierównych odcinków kół na tym samym boku.

Jeśli bowiem możliwe, to niech na tej samej prostej AB będą zbudowane dwa podobne i nierówne odcinki kół ACB , ADB na tym samym boku i niech ACD będzie poprowadzona przez (te odcinki kół), i niech CB , DB będą połączone.

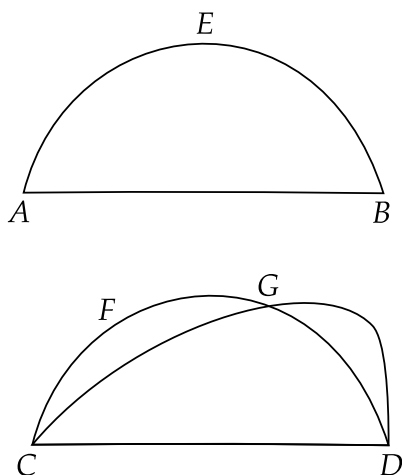


Skoro rzeczywiście odcinek ACB jest podobny do odcinka ADB i podobne odcinki kół są takie, że przyjmują równe kąty, to kąt ACB jest równy ADB, zewnętrzny wewnętrznemu. Co jest niemożliwe.

Tym sposobem, na tej samej prostej nie można zbudować dwóch podobnych i nierównych odcinków kół na tym samym boku. Co było do okazania.

Twierdzenie 24

Podobne odcinki kół na prostych są sobie równe.



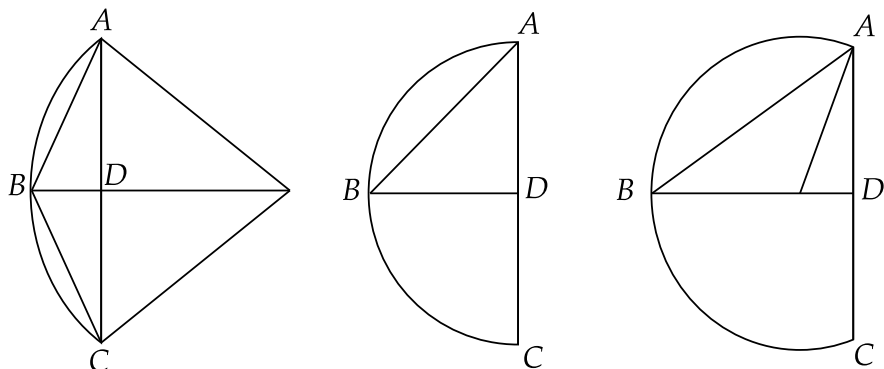
Niech bowiem AEB, CFD będą podobnymi odcinkami kół na prostych AB, CD. Twierdzę, że odcinek AEB jest równy odcinkowi CFD.

Niech bowiem odcinek AEB będzie nałożony na CFD i z jednej strony punkt A będzie postawiony na C, z drugiej zaś prosta AB na CD; zatem również punkt B będzie pasował do punktu D, bowiem AB jest równa CD. Jeśli AB pasuje do CD, to AEB będzie pasował do CFD. Jeśli bowiem prosta AB pasuje do CD, zaś odcinek AEB nie pasuje do CFD, to będzie padać albo na zewnątrz albo do wewnątrz, albo przesunięty jak CGD; i koło będzie przecinać koło w więcej niż dwóch punktach. Co jest niemożliwe. Zatem, jeśli prosta AB pasuje do CD, to również odcinek AEB nie może nie pasować do CFD. Zatem będzie pasować i będzie mu równy.

Tym sposobem, podobne odcinki kół na prostych są sobie równe. Co było do okazania.

Twierdzenie 25

Dla danego odcinka koła, dopełnić koło, z którego jest odcinek.



Niech ABC będzie danym odcinkiem koła. Należy więc dopełnić koło, z którego jest odcinek.

Niech bowiem AC będzie podzielone na pół w D i niech DB będzie poprowadzona z punktu D do (kątown) prostych do AC , i niech AB będą połączone. Zatem kąt ABD jest większy, równy lub mniejszy od BAD .

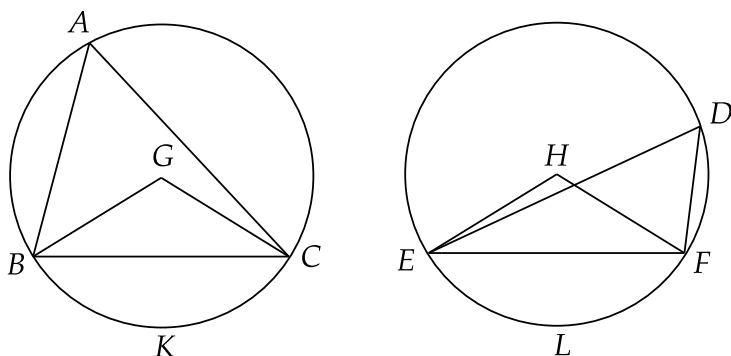
Niech będzie wprawdzie większy i niech BAE , równy kątowi ABD będzie utworzony na prostej BA w punkcie A na niej, i niech DB będzie poprowadzona przez E , i niech EC będzie połączona. Skoro rzeczywiście kąt ABE jest równy BAE , to również prosta EB jest równa EA . A skoro AD jest równa DC , zaś DE (jest) wspólna, to dwie AD , ED są równe dwóm CD , DE ; i kąt ADE jest równy kątowi CDE ; zatem każdy z nich jest prosty. Zatem podstawa AE jest równa podstawie CE . Ale zostało wykazane, że AE (jest) równa BE ; zatem również trzy (proste) AE , EB , EC są sobie równe. Zatem koło narysowane z centrum E i promieniem jednym z AE , EB , EC , przejdzie również przez pozostałe punkty i będzie dopełnione. Zatem koło zostało dopełnione z danego odcinka koła. I jasne, że odcinek ABC jest mniejszy od półkola, bowiem centrum E pada poza nim.

Podobnie, jeśli kąt ABD jest równy BAD , (skoro) AD staje się równa każdej z BD , DC , to trzy DA , DB , DC będą sobie równe i D będzie centrum dopełnionego koła, i oczywiście ABC będzie półkolem. Jeśli zaś ABD jest mniejszy od BAD i na prostej BA oraz w punkcie A na niej utworzymy (kąt) równy ABD , to centrum będzie padać na DB , wewnątrz odcinka ABC , i oczywiście odcinek ABC będzie większy od półkola.

Tym sposobem, koło zostało dopełnione z danego odcinka koła. Co było do okazania.

Twierdzenie 26

W równych kołach równe kąty stoją na równych obwodach, jeśli stoją w centrach lub na obwodach.



Niech ABC , DEF będą równymi kołami i niech w nich BGC , EHF będą równymi kątami w centrum, i niech BAC , EDF (będą) na obwodzie. Twierdzą, że obwód BKC jest równy obwodowi ELF .

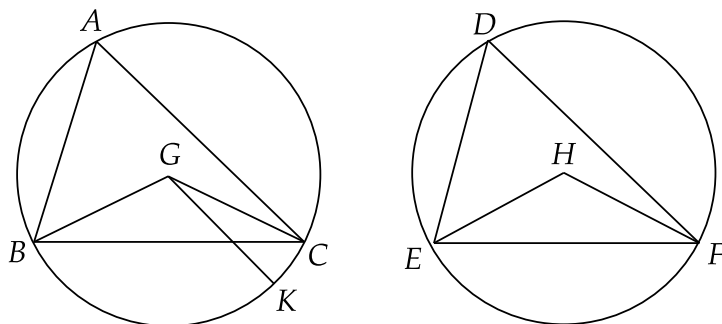
Niech BC , EF będą połączone.

A skoro koła ABC , DEF są równe, to ich promienie są równe. Zatem dwie BG , GC (są) równe dwóm EH , HF ; i kąt w G (jest) równy kątowi w H . Zatem podstawa BC jest równa podstawie EF . A skoro kąt w A jest równy (kątowi) w D , to odcinek BAC jest podobny do odcinka EDF i są na równych prostych BC , EF . Podobne odcinki kół na równych prostych są sobie równe. Zatem odcinek BAC (jest) równy EDF ; i całe koło ABC jest równe całemu kołu DEF . Zatem reszta BKC jest równa (reszcie) obwodu ELF .

Tym sposobem, w równych kołach równe kąty stoją na równych obwodach, jeśli stoją w centrach lub na obwodach. Co było do okazania.

Twierdzenie 27

W równych kołach kąty stojące na równych obwodach są sobie równe, jeśli stoją w centrach lub na obwodach.



Niech bowiem w równych kołach ABC , DEF , na równych obwodach BC , EF , kąty BGC , EHF stoją w centrach G , H zaś BAC , EDF na obwodach. Twierdzą, że kąt BGC jest równy EHF i BAC jest równy EDF .

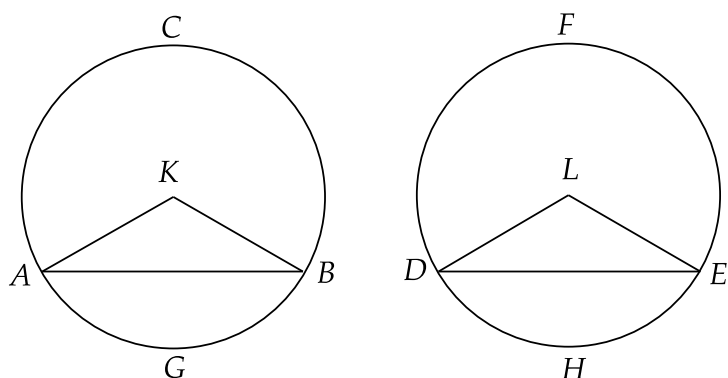
Jeśli bowiem BGC nie jest równy EHF, to jeden z nich jest większy. Niech BGC będzie większy i niech na prostej BG oraz w punkcie G na niej, będzie utworzony BGK równy kątowi EHF; zaś równe kąty stoją na równych obwodach, jeśli są w centrach. Zatem obwód BK (jest) równy obwodowi EF. Ale EF jest równa BC; zatem również BK jest równa BC, mniejsza większej. Co jest niemożliwe.

Zatem kąt BGC nie jest nierówny EHF; zatem równy. I z jednej strony (kąt) w A jest połową BGC, z drugiej zaś (kąt) w D połową EHF. Zatem również kąt w A jest równy (kątom) w D.

Tym sposobem, w równych kołach kąty stojące na równych obwodach są sobie równe, jeśli stoją w centrach lub na obwodach. Co było do okazania.

Twierdzenie 28

W równych kołach równe proste odcinają równe obwody, z jednej strony większy (równy) większemu, z drugiej zaś mniejszy mniejszemu.



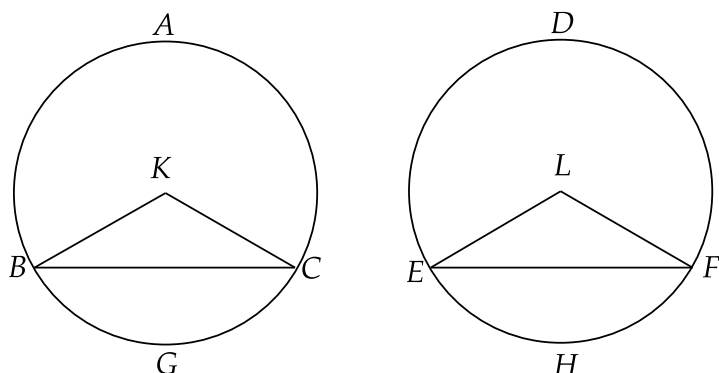
Niech ABC, DEF będą równymi kołami i niech w tych kołach AB, DE będą równymi prostymi, z jednej strony odcinającymi większe obwody ACB, DFE, z drugiej zaś mniejsze AGB, DHE. Twierdzę, że z jednej strony większy obwód ACB jest równy większemu obwodowi DFE, z drugiej zaś mniejszy obwód AGB (mniejszemu) DHE.

Niech bowiem obrane będą centra kół K, L i niech AK, KB, DL, LE będą połączone. A skoro koła są równe, to również promienie są równe. Tak więc dwie AK, KB są równe dwóm DL, LE; i podstawa AB (jest) równa podstawie DE. Zatem kąt AKB jest równy kątowi DLE. Ale równe kąty stoją na równych obwodach, jeśli są w centrach; zatem obwód AGB jest równy DHE. I całe koło ABC jest równe całemu kołu DEF; zatem również reszta obwodu ACB jest równa reszcie obwodu DFE.

Tym sposobem, w równych kołach równe proste odcinają równe obwody, z jednej strony większy (równy) większemu, z drugiej zaś mniejszy mniejszemu. Co było do okazania.

Twierdzenie 29

W równych kołach równe proste leżą naprzeciwko równych obwodów.



Niech ABC , DEF będą równymi kołami i niech w nich odcięte będą obwody BGC , EHF , i niech BC , EF będą połączone. Twierdzą, że BC jest równa EF .

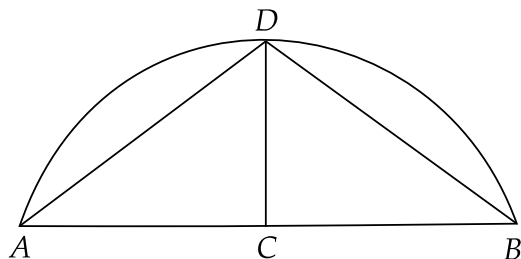
Niech bowiem będą obrane centra kół i niech to będą K , L , i niech BK , KC , EL , LF będą połączone.

A skoro obwód BGC jest równy obwodowi EHF , to również kąt BKC jest równy ELF . A skoro koła ABC , DEF są równe, to również promienie są równe. Zatem dwie BK , KC są równe dwóm EL , LF i zawierają równe kąty. Zatem podstawa BC jest równa podstawie EF .

Tym sposobem, w równych kołach równe proste leżą naprzeciwko równych obwodów. Co było do okazania.

Twierdzenie 30

Dany obwód przeciąć na pół.



Niech ADB będzie danym obwodem; należy więc przeciąć obwód ADB na pół.

Niech AB będzie połączona i niech będzie przecięta na pół w C , i niech z punktu C będzie poprowadzona CD do (kątown) prostych do prostej AB , i niech AD , DB będą połączone.

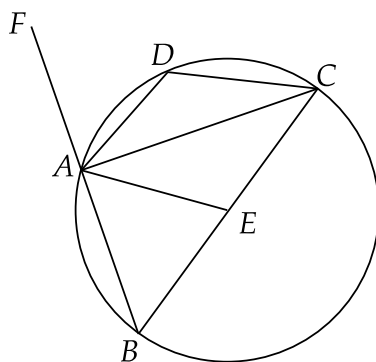
Skoro AC jest równa CB , zaś CD (jest) wspólna, to dwie AC , CD są równe dwóm BC , CD ; i kąt ACD jest równy kątowi BCD , bowiem każdy (jest kątem)

prostym. Zatem podstawa AD jest równa podstawie DB; zaś równe proste odcinają równe obwody, z jednej strony większy (jest równy) większemu, z drugiej zaś mniejszy mniejszemu; i każdy z obwodów AD, DB jest mniejszy od półkola. Zatem obwód AD jest równy obwodowi DB.

Tym sposobem, dany obwód został przecięty na pół w punkcie D. Co było do wykonania.

Twierdzenie 31

W kole, z jednej strony kąt w półkolu jest prosty, z drugiej zaś w większym odcinku (jest) mniejszy od prostego i ten w mniejszym odcinku (jest) większy od prostego; i dalej, z jednej strony kąt większego odcinka jest większy od prostego, z drugiej zaś kąt mniejszego odcinka jest mniejszy od prostego.



Niech ABCD będzie kołem, zaś BC jego średnicą, zaś E jego centrum i niech BA, AC, AD, DC będą połączone. Twierdzę, że kąt BAC w półkolu jest prosty i kąt ABC w odcinku ABC, większym od półkola, jest mniejszy od prostego, zaś kąt ADC w odcinku ADC, mniejszym od półkola, jest większy od prostego.

Niech AE będzie połączona i niech BA będzie poprowadzona do F.

A skoro BE jest równa EA, to również kąt ABE jest równy BAE. Znowu, skoro CE jest równa EA, to również (kąt) ACE jest równy CAE; zatem cały BAC jest równy dwóm ABC, ACB. I kąt FAC, zewnętrzny dla trójkąta ABC, jest równy dwóm kątom ABC, ACD; zatem również kąt BAC (jest) równy FAC. Zatem każdy jest prosty; zatem kąt BAC w półkolu BAC jest prosty.

A skoro w trójkącie ABC dwa kąty ABC, BAC są mniejsze od dwóch (kątown) prostych, zaś BAC jest (kątem) prostym, to ABC jest mniejszy od prostego; i jest w odcinku ABC, większym od półkola.

A skoro ABCD jest czworokątem w kole, zaś przeciwległe kąty czworokąta w kole są równe dwóm (kątom) prostym, zatem kąty ABC, ADC są równe dwóm (kątom) prostym, i ABC jest mniejszy od (kąta) prostego; zatem reszta kąta ADC jest większa od (kąta) prostego i jest w odcinku ADC, mniejszym od półkola.

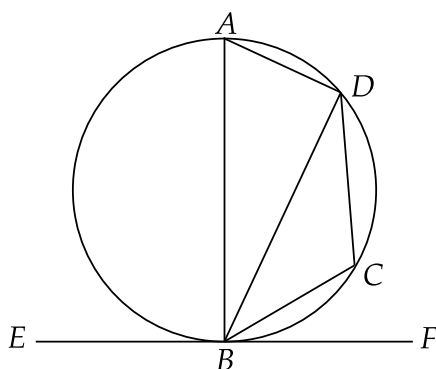
Twierdzę również, że z jednej strony kąt większego odcinka, ten zawarty między obwodem ABC i prostą AC, jest większy od (kąta) prostego, z drugiej zaś kąt mniejszego odcinka, ten zawarty między obwodem ADC i prostą AC, jest mniejszy

od (kąta) prostego. I jest to od razu oczywiste. A skoro (kąta) zawarty między dwiema prostymi BA, AC jest prosty, to również (kąta) zawarty między obwodami ABC i prostą AC jest większy od prostego. Znowu, skoro (kąta) zawarty między prostymi AC, AF jest prosty, to również (kąta) zawarty między obwodami ADC i prostą CA jest mniejszy od prostego.

Tym sposobem, w kole, z jednej strony kąt w półkolu jest prosty, z drugiej zaś w większym odcinku (jest) mniejszy od prostego i ten w mniejszym odcinku (jest) większy od prostego; i dalej, z jednej strony kąt większego odcinka jest większy od prostego, z drugiej zaś kąt mniejszego odcinka jest mniejszy od prostego. Co było do okazania.

Twierdzenie 32

Jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś z punktu styczności jakaś prosta jest poprowadzona poprzecznie w kole, przecinając koło, to kąty, które tworzy ze styczną, będą równe kątom w przeciwnych odcinkach koła.



Niech bowiem prosta EF styka się z kołem ABCD w punkcie B i niech będzie poprowadzona prosta z punktu B w kole ABCD, przecinając je. Twierdzę, że kąty, które BD tworzy ze styczną EF, będą równe kątom w przeciwnych odcinkach koła, to znaczy, że z jednej strony kąt FBD jest równy kątowi utworzonemu w odcinku BAD, z drugiej zaś kąt EBD jest równy kątowi utworzonemu w odcinku DCB.

Niech bowiem BA będzie poprowadzona z B do (kąta) prostych do EF i niech punkt C będzie obrany dowolnie na obwodzie DB, i niech AD, DC, CB będą połączone.

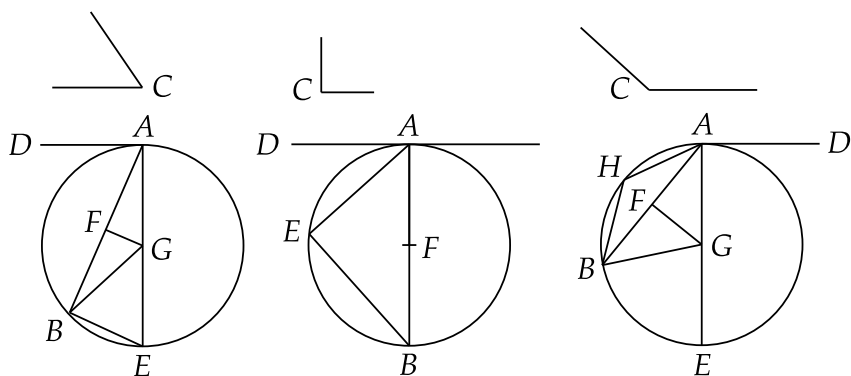
A skoro prosta EF styka się z kołem ABCD w B i AB została poprowadzona z punktu styczności do (kąta) prostych do stycznej, to centrum koła ABCD jest na BA. Zatem BA jest średnicą koła ABCD; zatem kąt ADB, będący w półkolu, jest prosty. Zatem pozostałe (kąty) BAD, ABD są równe jednemu prostemu, zaś również ABF jest prosty; zatem ABF jest równy BAD, ABD. Niech (kąta) ABD będzie odjęty od obu; zatem reszta, kąt DBF, jest równa kątowi BAD w przeciwnym odcinku koła.

A skoro ABCD jest czworokątem w kole, to jego przeciwne kąty są równe dwóm (kątom) prostym, zaś również DBF, DBE są równe dwóm (kątom) prostym. Zatem DBF, DBE są równe BAD, BCD, z których BAD, co zostało wykazane, (jest) równy BDF. Zatem reszta DBE jest równa kątowi DCB w przeciwległym odcinku DCB koła.

Tym sposobem, jeśli jakaś prosta styka się z kołem, zaś z punktu styczności jakaś prosta jest poprowadzona poprzecznie w kole, przecinając koło, to kąty, które tworzy ze styczną, będą równe kątom w przemiennych odcinkach koła. Co było do okazania.

Twierdzenie 33

Na danej prostej opisać odcinek koła przyjmującego kąt równy danemu kątowi prostoliniowemu.



Niech AB będzie daną prostą, zaś kąt C danym kątem prostoliniowym. Należy więc, na danej prostej AB, opisać odcinek koła przyjmującego kąt równy C.

(Kąt) w C jest więc ostry lub prosty lub rozwarty. Wpierw niech będzie ostry i jak na pierwszym diagramie, na prostej AB i w punkcie A niech będzie utworzony (kąt) BAD równy kątowi w C; zatem również BAD jest ostry. Niech AE będzie poprowadzona do (kątown) prostych do DA i niech AB będzie przecięta na pół w F, i niech FG będzie poprowadzona z punktu F do (kątown) prostych do AB, i niech GB będzie połączona.

A skoro AF jest równa FB, zaś FG wspólna, to dwie AF, FG są równe dwóm BF, FG; i kąt AFG (jest) równy kątowi BFG; zatem podstawa AG jest równa podstawie BG. Zatem z jednej strony koło narysowane z centrum G, z drugiej zaś o promieniu GA, również będzie przechodzić przez B. Niech będzie narysowane i niech to będzie ABE, i niech EB będzie połączona. Skoro rzeczywiście AD jest poprowadzona z A, z końca średnicy AE, do (kątown) prostych do AE, to AD styka się z kołem ABE. Skoro rzeczywiście prosta AD styka się z kołem ABE i z punktu styczności A jest poprowadzona prosta AB poprzecznie w kole ABE, to kąt DAB jest równy kątowi AEB w przeciwległym odcinku koła. Ale DAB jest równy C, zatem również C jest równy AEB.

Zatem na danej prostej AB został narysowany odcinek AEB koła przyjmujący kąt AEB równy danemu C .

Ale niech C będzie prosty; i znowu niech na AB należy narysować odcinek koła przyjmujący kąt równy do kąta równego w C . Znowu, niech będzie utworzony BAD równy kątowi prostemu w C , jak na drugim diagramie i niech AB będzie podzielona na pół w F , i niech koło AEB będzie narysowane z centrum F i o promieniu FA lub FB . Zatem prosta AD styka się z kołem ABE , ponieważ kąt w A jest prosty; i BAD jest równy kątowi w odcinku AEB , bowiem również (ten drugi kąt) sam jest (kątem) prostym, będąc w półkołu. Ale również BAD jest (kątem) prostym w C . Zatem również EAB jest równy (kątowni) w C .

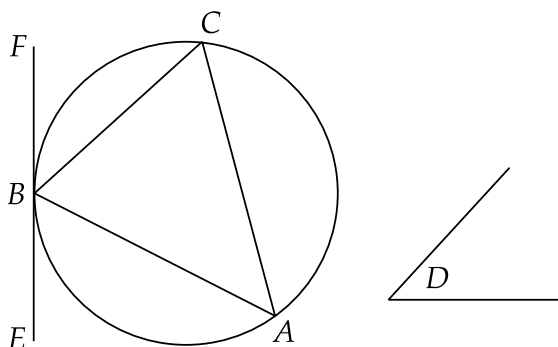
Zatem znowu odcinek EEB koła został narysowany na AB przyjmując kąt równy (kątowni) w C .

Ale dalej, niech (kąt) w C będzie rozwarty i niech na prostej AB i w punkcie A będzie utworzony BAD , jak na trzecim diagramie, i niech AE będą poprowadzone do (kątowni) prostych do AD ; i niech AB będzie przecięta na pół w F i niech FG będzie poprowadzona do (kątowni) prostych do AB , i niech GB będzie połączona. A skoro AF jest równa FB i FG (jest) wspólna, to dwie AF , FG są równe dwóm BF , FG ; i kąt AFG (jest) równy kątowi BFG ; zatem podstawa AG jest równa podstawie BG ; zatem koło narysowane, z jednej strony z centrum G , z drugiej zaś o promieniu GA , również przejdzie przez B . Niech więc przejdzie, jak AEB . A skoro AD jest do (kątowni) prostych do średnicy AE na jej krańcu, to AD styka się z kołem AEB ; i AB została poprowadzona poprzecznie z punktu styczności A ; zatem kąt BAD jest równy C ; zatem również kąt w odcinku AHB jest równy C .

Tym sposobem, na danej prostej opisano odcinek koła przyjmującego kąt równy danemu kątowi prostoliniowemu. Co było do okazania.

Twierdzenie 34

Z danego koła odciąć odcinek przyjmujący kąt równy danemu kątowi prostoliniowemu.



Niech ABC będzie danym kołem, zaś D danym kątem prostoliniowym; należy więc odciąć odcinek przyjmujący kąt równy danemu kątowi prostoliniowemu D , z danego koła ABC .

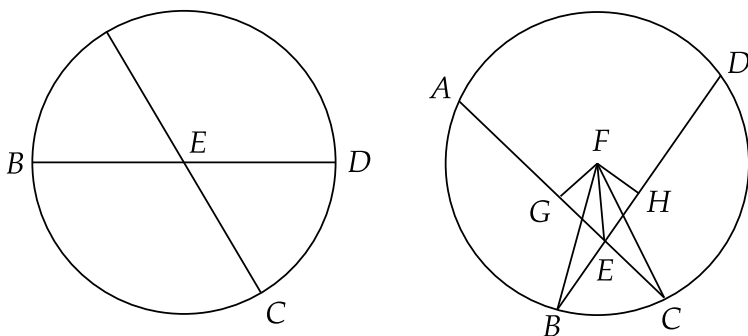
Niech EF będzie poprowadzona stykając się z ABC w punkcie B i niech FBC, równy kątowi D, będzie zbudowany na prostej FB, w punkcie B na niej.

Skoro rzeczywiście prosta EF styka się z kołem ABC i BC została poprowadzona poprzecznie z punktu styczności w B, to kąt FBC jest równy kątowi utworzonemu na przeciwległym segmencie BAC. Ale FBC jest równy (kątowi w) D; zatem również (kąt) w segmencie BAC jest równy kątowi w D.

Tym sposobem, odcinek BAC przyjmujący kąt równy danemu kątowi prostolinijnemu D, został odcięty od danego koła ABC. Co było do wykonania.

Twierdzenie 35

Jeśli w kole dwie proste przecinają się wzajemnie, to prostokąt zawarty między odcinkami jednej jest równy prostokątowi zawartemu między odcinkami drugiej.



Niech bowiem w kole ABCD dwie proste AC, BD przecinają się wzajemnie w punkcie E. Twierzę, że prostokąt zawarty między AE, EC jest równy prostokątowi zawartemu między DE, EB.

Jeśli rzeczywiście AC, BD są przez centrum, to E jest centrum koła ABCD; (jest) oczywiste, gdy AE, EC, DE, EB są równe, to prostokąt zawarty między AE, EC jest również równy prostokątowi zawartemu między DE, EB.

Niech więc AC, DB nie będą przez centrum i niech centrum ABCD będzie znaleziony, i niech to będzie F, i niech z F będą poprowadzone FG prostopadłe do prostych AC, DB, i niech FB, FC, FE będą połączone.

A skoro prosta GF przez centrum przecina pod kątem prostym prostą AC, nie przez centrum, to przecina ją również na pół; zatem AG (jest) równa GC.

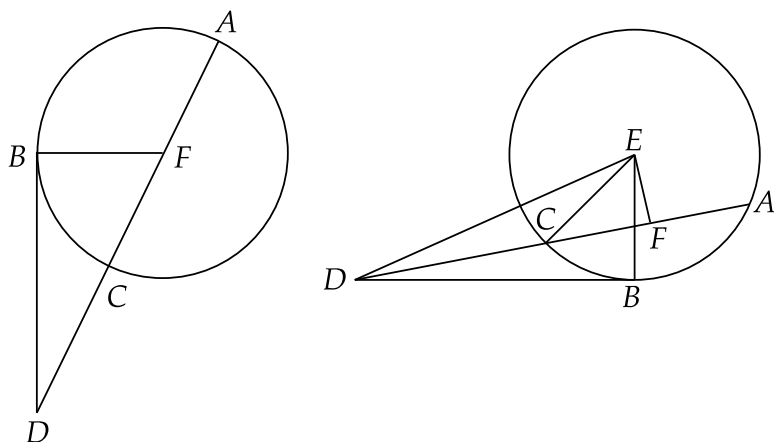
Skoro rzeczywiście prosta AC została przecięta na pół w G i nierówno w E, to prostokąt zawarty między AE, EC wraz z kwadratem na EG jest równy (kwadratowi) na GC. Niech do obu będzie dodany (kwadrat) na GF. Zatem (prostokąt) AE, EC wraz z (kwadratami) na GE, GF, jest równy (kwadratowi) na CG, GF. Ale z jednej strony (kwadrat) na FE jest równy (kwadratowi) na EG, GF, z drugiej zaś (kwadrat) na FC jest równy (kwadratowi) na CG, GF; zatem (prostokąt) AE, EC wraz z (kwadratem) na FE jest równy (kwadratowi) na FC. FC zaś jest równa FB; zatem (prostokąt) AE, EC, wraz z (kwadratem) na EF jest równy (kwadratowi) na FB. Z tego samego powodu, również (prostokąt) DE, EB wraz z (kwadratem)

na FE jest równy (kwadratowi) na FB. Zostało zaś wykazane, że również (prostokąt) AE, EC wraz z (kwadratem) na FE jest równy (kwadratowi) na FB; zatem (prostokąt) AE, EC wraz z (kwadratem) na FE jest równy prostokątowi DE, EB wraz z (kwadratem) na FE. Niech (kwadrat) na FE będzie odjęty od obu; zatem reszta, prostokąt zawarty przez AE, EC, jest równa prostokątowi zawartemu przez DE, EB.

Tym sposobem, jeśli w kole dwie proste przecinają się wzajemnie, to prostokąt zawarty między odcinkami jednej jest równy prostokątowi zawartemu przez odcinki drugiej. Co było do okazania.

Twierdzenie 36

Jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła i z niego na koło padają dwie proste, i z jednej strony (jedna) przecina koło, z drugiej zaś (druga) styka się (z nim), to (prostokąt) zawarty między całą (prostą) przecinającą (koło) i (częścią) odciętą na zewnątrz (koła), między punktem i wypukłym obwodem, będzie równy kwadratowi na prostej stycznej.



Niech bowiem punkt D będzie obrany na zewnątrz koła ABC i niech z D dwie proste DCA, DB padają na koło ABC; i z jednej strony niech jedna DCA przecina koło ABC, z drugiej zaś BD styka się (z nim). Twierdzę, że prostokąt zawarty między AD, DC jest równy kwadratowi na DB.

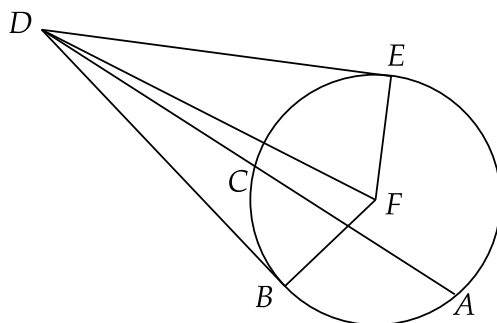
Zatem z pewnością DCA jest przez centrum koła albo nie. Wpierw niech będzie przez centrum i niech F będzie centrum koła ABC, i niech FB będą połączone. Zatem FBD jest (kątem) prostym. A skoro prosta AC została podzielona na pół w F i CD została dodana, to (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratem) na FC jest równy (kwadratowi) na FD; zaś FC (jest) równa FB; zatem (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratem) na FB jest równy (kwadratowi) na FD. (Kwadrat) zaś na FD jest równy (kwadratowi) na FB, BD; zatem (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratem) na FB jest równy (kwadratowi) na FB, BD. Niech (kwadrat) na FB będzie odjęty od obu; zatem reszta, (prostokąt zawarty) między AD, DC, jest równa (kwadratowi) na stycznej DB.

Ale niech DCA nie będzie przez centrum koła ABC i niech będzie znalezione centrum E, i niech EF będą poprowadzone z E prostopadłe do AC, i niech EB, EC, ED będą połączone; zatem EBD jest (kątem) prostym. A skoro prosta EF przez centrum przecina prostą AC nie przez centrum pod kątem prostym, to również przecina ją na pół; zatem AF jest równa FC. A skoro prosta AC została przecięta na pół w punkcie F, to niech CD będzie dodana do niej; zatem (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratem) na FC jest równy (kwadratowi) na FD. Niech (kwadrat) na FE będzie dodany do obu; zatem (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratami) na CF, FE jest równy (kwadratowi) na FD, FE. (Kwadrat) zaś na EC jest równy (kwadratowi) na CF, FE, bowiem kąt EFC jest prosty; zaś (kwadrat) na ED jest równy (kwadratowi) na DF, FE; zatem (prostokąt zawarty) między AD, DC wraz z (kwadratem) na EC jest równy (kwadratowi) na ED. EC zaś (jest) równa EB; zatem (prostokąt) AD, CD wraz z (kwadratem) na EB jest równy (kwadratowi) na ED. (Kwadraty) zaś na EB, BD są równe (kwadratowi) na ED, bowiem kąt EBD jest prosty; zatem (prostokąt) AD, DC wraz z (kwadratem) na EB jest równy (kwadratowi) na EB, BD. Niech (kwadrat) na EB będzie odjęty od obu; zatem reszta, (prostokąt) AD, DC, jest równa (kwadratowi) na DB.

Tym sposobem, jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła i z niego na koło padają dwie proste, i z jednej strony (jedna) przecina koło, z drugiej zaś (druga) styka się (z nim), to (prostokąt) zawarty między całą (prostą) przecinającą (koło) i (częścią) odciętą na zewnątrz (koła), między punktem i wypukłym obwodem, będzie równy kwadratowi na prostej stycznej. Co było do okazania.

Twierdzenie 37

Jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła, zaś z punktu na koło padają dwie proste i z jednej strony (jedna) przecina koło, z drugiej zaś (druga) dotyka go, i jeśli (prostokąt zawarty) między całą (prostą) przecinającą (koło), i (częścią) odciętą na zewnątrz (koła), między punktem i wypukłym obwodem, będzie równy (kwadratowi) na (prostej), to dotykająca będzie styczną do koła.



Niech bowiem punkt D będzie obrany na zewnątrz koła ABC i niech dwie proste DCA, DB będą padać z D na koło ABC, i niech z jednej strony DCA będzie przecinać koło, z drugiej zaś DB będzie dotykać go; i niech (prostokąt zawarty)

między AD, DC będzie równy (kwadratowi) na DB. Twierdzę, że DB jest styczną do koła ABC

Niech bowiem będzie poprowadzona DE stykająca się z ABC i niech będzie obrane centrum koła ABC, i niech to będzie F, i niech FE, FB, FD będą połączone. Zatem FED jest (kątem) prostym. A skoro DE styka się z kołem ABC, zaś DCA przecina (je), to (prostokąt zawarty) między AD, DC jest równy (kwadratowi) na DE. Jeśli zaś również (prostokąt zawarty) między AD, DC był równy (kwadratowi) na DB, to (kwadrat) na DE jest równy (kwadratowi) na DB; zatem DE (jest) równa DB. FE zaś również jest równa FB; zatem dwie DE, EF są równe dwóm DB, BF; i (mają) wspólną podstawę FD; zatem trójkąt DEF jest równy trójkątowi DBF. DEF zaś jest (kątem) prostym; zatem również DBF (jest kątem) prostym. A przedłużona FB jest średnicą, zaś (prosta) poprowadzona pod kątami prostymi do średnicy koła, z jego krańca, styka się z kołem; zatem DB styka się z kołem ABC. Podobnie możemy wykazać, jeśli nawet centrum zdarzy się na AC.

Tym sposobem, jeśli jakiś punkt jest obrany na zewnątrz koła, zaś z punktu na kole padają dwie proste i z jednej strony (jedna) przecina koło, z drugiej zaś (druga) dotyka go, i jeśli (prostokąt zawarty) między całą (prostą) przecinającą (koło), i (częścią) odciętą na zewnątrz (koła), między punktem i wypukłym obwodem, będzie równy (kwadratowi) na (prostej), to dotykająca będzie styczną do koła. Co było do okazania.

Piotr Błaszczyk
University of the National Education
Commission in Krakow, Poland
e-mail: piotr.blaszczyk@up.krakow.pl

Kazimierz Mrówka
University of the National Education
Commission in Krakow, Poland
e-mail: kazimierz.mrowka@up.krakow.pl