FOLIA 364

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 14(2022)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.14.14

Piotr Błaszczyk

Recenzja: Stewart Shapiro, Geoffrey Hellman, *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspective*, Oxford University Press, Oxford 2021, ss. 577.

1. Książka składa się z krótkiego *Wstępu* i 18 rozdziałów:

1. B. Sattler, *Divisibility and Indivisibility: The Notion of Continuity from Presocratics to Aristotle,*
2. O. Harari, *Contiguity, Continuity and Continuous Change: Alexandre of Aphrodisis,*
3. E. D. Sylla, *Infinity and Continuity: Thomas Bradwardine and his Contemporaries,*
4. S. Levey, *Continuous Extension and Indivisibles in Galileo,*
5. D. M. Jesseph, *The Indivisibles of the Continuum: Seventeenth-Century Adventures in Infinitesimal Mathematics,*
6. S. Levey, *The Continuous, the Infinitely Small, and the Law of Continuity in Leibniz,*
7. D. Sutherland*Continuity ad Intuition in Eighteen-Century Analysis and in Kant,*
8. P. Rusnock, *Bolzano on Continuity,*
9. A. Kanamori, *Cantor and Continuity,*
10. E. Haffner and D. Schlimm, *Dedekind on Continuity,*
11. Ch. McCarty, *What is Number? Continua, Magnitudes, Quantities,*
12. Ch. McCarty, *Continuity and Intuitionism,*
13. P. Vargas and M. E. Moore, *Peircean Continuum,*

14. A. C. Varzi, *Points as Higher-Order Constructs: Whitehead's Method of Extensive Abstraction,*
15. P. Koellner, *The Predicative Conception of the Continuum,*
16. G. Gerla, *Point-Free Continuum,*
17. J.L. Bell, *Intuitionistic/Constructive Accounts of the Continuum Today,*
18. P. Ehrlich, *Contemporary Infinitesimalist Theories of Continua and Their Late Nineteenth- and Early Twentieth-Century Forerunners.*

Zacznijmy od wyboru tematów.

W roku 1949 wydano *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* C. B. Boyera. Pierwsza wersja książki zatytułowana *The Concepts of the Calculus*, ukazała się w roku 1939 i została zmieniona pod wpływem recenzji do postaci z 1949 roku. W *The History of the Calculus* Boyer opracował model rozwoju pojęcia kontinuum, który można uznać za syntezę poglądów historyków matematyki pierwszej połowy XX wieku. Model ten jest powtarzany do dzisiaj przez wszystkie studia w tym zakresie, a składają się nań kolejno następujące etapy:

- Starożytność: filozoficzna debata na temat struktury kontinuum (ruchu, czasu i przestrzeni) skoncentrowana wokół paradoksów Zenona i koncepcji Arystotelesa;
- Średniowieczne: dyskusje na temat struktury kontinuum (ruchu, czasu, przestrzeni) w ramach filozofii naturalnej Arystotelesa;
- XVI i XVII wiek: początki rachunku różniczkowego, teorie przyjmujące, że kontinuum składa się niepodzielnych części;
- przełom XVII i XVIII: Leibniz i Newton;
- wiek XVIII, okres, w którym ścierały dwie tendencje: według pierwszej geometria powinna stanowić podstawy rachunku różniczkowego, według drugiej – nieskończenie małe;
- rok 1872: konstrukcje liczb rzeczywistych oraz odkrycie 'istoty ciągłości' przez Dedekinda.

Recenzowana monografia powiela schemat Boyera. Greckie i średniowieczne teorie kontinuum są omawiane przez pryzmat koncepcji Arystotelesa (rozdz. 1–3). Teorie XVI i XVII wieku są oceniane z perspektywy, czy kontinuum składa się z niepodzielnych części, czy zawiera nieskończenie małe (rozdz. 4–6). Rozdziały 8–10 omawiają konstrukcje liczb rzeczywistych z roku 1872.

Model Boyera jest oczywiście uzupełniony o koncepcje z XX wieku. W rozdziale 17 przedstawione są wersje rachunku różniczkowego oparte na logice intuicjonistycznej: kontinuum Brouwera oraz teoria funkcji określonych na dziedzinie zawierającej nilpotentne nieskończenie małe; rozdział ten informuje też o konstruktywizmie Bishopa. Rozdział 18 traktuje o ciałach niearchimedesowych. Rozdziały

11–16 omawiają XX-wieczne filozoficzne koncepcje kontinuum, które nie wiążą się z jakimiś specyficznymi technikami i nie wpłynęły na matematykę.

W recenzowanej monografii, podobnie jak u Boyera, niewiele miejsca poświęcono matematyce greckiej, Kartezjuszowi, oraz Eulerowi; inaczej niż u Boyera, nie znaleziono miejsca dla Newtona; kwestie te są potraktowane zupełnie incydentalnie w rozdział 1, 6, 7. W monografii nie ma rozdziałów poświęconych aksjomatom liczb rzeczywistych, teorii ciał rzeczywiście domkniętych, która pokazuje, ile założeń o kontinuum trzeba przyjąć, aby rozwijać analizę tylko za pomocą wielomianów, nie ma rozdziałów poświęconych teorii ciał topologicznych, która wiąże pojęcia ciała uporządkowanego z ciągłością działań. Temat ciągłości funkcji także nie jest obecny w monografii jako odrębny wątek, co jest o tyle ważne, że w teorii Arystotelesa ciągłość obiektów geometrycznych i ciągłość ruchu są charakteryzowane w jeden i ten sam sposób. Bernard Bolzano, w krótkiej pracy *Rein analytischer Bewis*s (1817), odróżnił ciągłość porządku i ciągłość funkcji. Od tego czasu w matematyce obecne są dwa niezależne rozumienia ciągłości: ciągłość porządku liniowego zapisana w aksjomatach liczb rzeczywistych oraz ciągłość funkcji, czy to w wersji $\varepsilon\delta$, ciągowej, czy topologicznej.[1].

Paul Rusnock omawiając wkład Bolzano do historii kontinuum poświęca definicji ciągłości funkcji z pracy *Rein analytischer Bewiss* odrębny paragraf, ale nie zauważa, że w tej samej pracy Bolzano definiuje także zasadę supremum.

W monografii wreszcie nie ma odrębnego rozdziału poświęconego geometrii; uwagi o geometrii są rozproszone, niespójne, a nawet błędne.[2]

2. Niedoszacowanie matematyki greckiej, dorobku Kartezjusza, Newtona i Eulera, znacząco zubaża przekaz monografii. Dziedzictwo Euklidesa leży u podstaw współczesnego rachunku różniczkowego w postaci metryki euklidesowej, iloczynu skalarnego i trygonometrii. Natomiast zupełnie podstawowe dla historii rachunku różniczkowego jest pojęcie ciała uporządkowanego: proporcje opisujące zależności geometryczne, formuły zawierające równania wielomianów, funkcji wymiernych, transcendentnych, a wreszcie stycznych przetwarzane są zgodnie z prawami wynikającymi z aksjomatów ciała uporządkowanego. Źródła tych reguł w zakresie dodawania sięgają Księgi V *Elementów*; do praktyki matematycznej nowożytnej Europy zostały one wprowadzone przez Kartezjusza w *La Geometrie* (1637); Kartezjusz rozszerzył też zakres działań o mnożenie.[3] Dalszy rozwój pojęcia kontinuum wiąże się z dodatkowymi założeniami nakładanymi na ciało uporządkowane. I tak Kartezjusz przyjął, że na płaszczyźnie istnieją punkty przecięcia krzywych algebraicznych, Euler – że istnieją nieskończenie małe i nieskończenie duże, Heine, Cantor i Dedekind – przyjmują aksjomat ciągłości, analiza niestandardowa – twierdzenie o części standardowej. Z poszczególnymi założeniami wiążą się specyficzne techniki

[1]Zob. P. Błaszczyk, M. Fila (2023), *On Bolzano and Greek concepts of continuity*, [w:] Sriraman, B. (eds) Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Springer

[2]Niżej podajemy kilka przykładów.

[3]Boyer pisze: It is interesting to see that after the development of mathematical analysis, the concept of proportion resembles the arithmetical form of the Pythagoreans rather than the geometrical one of Eudoxus (*The History of the Calculus* …, Dover, 1959, s. 31). To jedno zdanie pokazuje, że nie rozpoznał on, iż w arytmetyce odcinków Kartezjusz zamienił proporcje na równość ułamków. Wyrażenia, na które wskazuje Boyer to nie pitagorejskie proporcje, ale ułamki w ciele uporządkowanym.

– w przypadku ciał rzeczywiście domkniętych będę to rozszerzenia algebraiczne ciał i rozkłady wielomianów, u Eulera – szeregi nieskończone zawierające ostatni wyraz oraz relacja *leży nieskończenie blisko*, u Dedekinda – definiowanie liczb na podstawie zasady supremum, u Heinego i Cantora – teoria granic i definiowanie liczb na podstawie zupełności w sensie Cauchy'ego, w analizie niestandardowej – szeregi hiperskończone, twierdzenie o nasyceniu.

Przewodnim założeniem monografii jest, iż najważniejsze w historii kontinuum są filozoficzne dywagacje wokół tego, czy kontinuum składa się z podzielnych w nieskończoność, czy niepodzielnych części. Jednakże techniki matematyczne, jak chociażby te wyżej wskazane, rozwijane są poza debatą, czy kontinuum składa się z podzielnych, czy niepodzielnych części.

3. Redaktorzy monografii piszą we *Wstępie*:

> Our view is that there is no single, monolithic property of continuity. It is more of a cluster concept that can be sharpened, and developed rigorously, in mutually incompatible ways. Early on, we were led to the Aristotelian idea that continua are not composed of points, or indivisible. In terms of contemporary metaphysics, the theme is that continua are gunky: every part of a continuous substance has a proper part. This, of course, is not sanctioned in the contemporary Dedekind-Cantor account, nor, arguably, in the intuitionistic accounts either [. . .]. The bulk of our project in Varieties of continua was to develop various gunky, or point-free, accounts of continuity: one-dimensional and two (and three-) dimensional Euclidean and non-Euclidean, with actual and without actual infinity [. . .]. We went on to compare these accounts with their contemporary counterparts on various mathematical, logical and metaphysical grounds (s. 1–2).

Poczynając od Euklidesa, matematyczna historia kontinuum rozgrywa się poza filozoficznym sporem o to, czy kontinuum składa się z części podzielnych w nieskończoność, czy niepodzielnych monad lub punktów. Owszem, gdy w *Elementach* przecinają się dwie proste, dwa okręgi, okrąg i prosta, wtedy pojawia się punkt; konstrukcje z użyciem cyrkla i linijki polegają właśnie na wyznaczaniu punktów jako przecięć okręgów i prostych. Tym niemniej teza, że prosta składa się z punktów nie należy do geometrii. W systemie Hilberta, który spośród wszystkich współczesnych opisów geometrii elementarnej jest najbliższy *Elementom*, punkty i proste są pojęciami pierwotnymi, co znaczy, że prosta nie redukuje się do zbioru punktów. Teza, że oś liczb rzeczywistych składa się z punktów – we *Wstępnie* nazwano to tezę Cantora-Dedekinda – także nie należy do arytmetyki liczb rzeczywistych. Owszem, konstrukcje liczb rzeczywistych, podobnie, jak modele geometrii euklidesowej, to zbiory. Jednak teoriomnogościowa interpretacja pojęć liczba oraz liczby rzeczywiste nie przesądza interpretacji pojęcia *część*. Redaktorzy przyjmują bezwiednie, a w rozdziale poświęconym Leibnizowi jest to już wprost podane, że relacja *całość-część* to relacja zbiór-podzbiór.[4] W innym miejscu pokazaliśmy jednak, że słynny

[4]Zob. niżej.

aksjomat *Całość jest większa od części* można interpretować algebraicznie.[5] Podążając tym tropem, można pokazać, że liczby na osi $(\mathbb{R}, <)$ reprezentują końce odcinków $[0, x]$, a wtedy przedział $[0, x]$, nie a singleton $\{x\}$, jest *częścią* zbioru $\mathbb{R}$. Tak rozumiana *część* jest podzielna w nieskończoność dokładnie tak, jak to widział Arystoteles.

4. Arystotelesa teorię kontinuum można zamknąć w tezach nieskończona podzielność oraz wspólna granica:

> *Ciągłym nazywam to, co jest podzielne na nieskończenie podzielne* (*Fizyka* VI.2),
>
> *Ciągłe są rzeczy, których granice, tam gdzie się stykają, są jednym* (*Fizyka*, VI.3).

Dodajmy jeszcze do tego przykłady przedmiotów, którym przysługuje ciągłość:

> Wielkości są albo dyskretne, albo ciągłe [...]. Dyskretne to na przykład liczba i mowa, ciągłe są linia, powierzchnia, ciało, czas i przestrzeń (*Kategorie* 6).

Linia, powierzchnia, ciało są określa Arystoteles tym samym słowem *megethos* (*Fizyka*, VI.2), którego Euklides używa w Księdze V mając na uwadze odcinki, figury bryły i kąty. Łatwo więc porównać Arystotelesa i Euklidesa zastawiając ich charakterystyki odcinka.

W twierdzeniu I.10 Euklides pokazuje, że odcinek AB można podzielić na dwie równe części: odcinki AD, DB. Tak więc *części* AB to odcinki, które można dalej dzielić na połowy powtarzając opisaną w twierdzeniu I.10 konstrukcję. W tym sensie AB jest podzielny na części, które są podzielne. Zarazem punkt D, leżący na styku AD i DB jest wspólny tym obu częściom. Jedno twierdzenie Euklidesa ilustruje wszystko to, co o kontinuum miał do powiedzenia Arystoteles.

W twierdzeniu VI.9, już w teorii proporcji, Euklides pokazuje, jak podzielić odcinek na dowolną ilość równych części.

Założeniem geometrii Euklidesa, które nie ma odpowiednika w teorii Arystotelesa jest to, że przecinające się odcinki wyznaczają punkt. W twierdzeniu I.10 punkt D jest przecięciem odcinka AB i dwusiecznej kąta. Kąt ten powstaje w wyniku następującej konstrukcji: na AB konstruowany jest trójkąt równoboczny ABC (*Elementy*, I.1), gdzie punkt C jest przecięciem dwóch okręgów. Konstrukcję dwusiecznej zawiera twierdzenie I.9.[6] We współczesnej geometrii, założenie o punkcie przecięcia odcinków jest formalizowane w aksjomacie Pascha. Założenie o przecinaniu się okręgów jest formułowane wprost jako aksjomat o przecinaniu się okręgów.

Zupełnie nowe spojrzenie na odcinek zawiera Księga V *Elementów*, gdzie odcinki stanowią półgrupę uporządkowaną $(M, +, <)$ scharakteryzowaną aksjomatami:

---

[5] Zob. P. Błaszczyk, G*alilleo's Paradox and Numerosities*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce LXX, 2021, 73–107.

[6] W recenzowanej monografii w kilku rozdziałach omawiane jest założenie Euklidesa o przecinaniu się okręgów, ale bez związku z nieskończoną podzielnością odcinka.

E1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})(nx > y)$,

E2 $(\forall x, y)(\exists z)(x < y \Rightarrow x + z = y)$,

E3 $(\forall x, y, z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$,

E4 $(\forall x)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y)(x = ny)$,

E5 $(\forall x, y, z)(\exists v)(x : y :: z : v)$,

gdzie nx oznacza $nx = x + ... + x$ $(n - times)$.

Aksjomat E4 wprost dekretuje, że odcinek x jest podzielny na dowolną ilość równych części; części te to inne odcinki i każdy z nich jest podzielny tak, jak odcinek wyjściowy.

W aksjomatach E1, E3 rozpoznajemy aksjomaty ciała archimedesowego. Dla historii kontinuum ważne jest, że Euklidesa teoria proporcji była podstawową techniką matematyki greckiej. Gdy Kartezjusz zamienił proporcje na arytmetykę odcinków dorobek matematyki greckiej został przełożony na arytmetykę ciał uporządkowanych.[7]

5. Spójrzmy teraz jak wątki euklidesowe są opisane w recenzowanej monografii.

Barbara Slatter pisze:

> (a) While mathematical practice in ancient times provided some inspiration for the debate about continuity in early Greek thinking up to the time of Aristotle, mathematics is not where the main debate – as far as has been handed down to us – happens. Rather, the discussion is about continuity is a debate within metaphysics and natural philosophy (s. 6).

Najważniejsze kwestie dotyczące kontinuum zostały przesądzone właśnie w ramach matematyki, a debaty filozoficzne nie mały żadnego wpływu na rozwój matematyki i przepadły wraz z filozofią Arystotelesa.

> (b) While not explicitly discussed, this idea of magnitudes being divisible without end seems to have been taken so much for granted by mathematicians that they do not have to pay it any special attention. It is clear that they assume crossing lines and similar constructions there is no reflection of atomistic worries such as that a line crossing another line without would need to go between two atoms; rather infinite divisibility just seems to be presupposed (s. 14).

W tym miejscu Autorka myli niepisane założenie geometrii Euklidesa o istnieniu punktów przecięcia okręgów i prostych z nieskończoną podzielnością odcinka. Teoria Arystotelesa nie odnosi się do pierwszej kwestii, bo ciągłość odcinka opisuje Arystoteles bez związku z konstrukcjami geometrycznymi, natomiast nieskończona podzielność odcinka – jak pokazaliśmy – jest w *Elementach* dowodzona w twierdzeniach I.10, VI.9 oraz zadekretowana w aksjomacie E4.

---

[7]Zob. Błaszczyk, P. (2021). *Descartes' Transformation of Greek Notion of Proportionality.* [w:] Sriraman, B. (eds) Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Springer, Cham.

> (c) The mathematical understanding of continuity in the sense of infinite divisibility is presupposed by any geometrical operation that involves the mathematical bisection of a line, surface, or body (s. 14).

To ciąg dalszy nieporozumienia, na które wskazaliśmy wyżej. Aby nadać temu zdaniu sens, należy przyjąć, że założenie o przecinaniu się okręgów gwarantuje wykonalność bisekcji odcinka. Jednak – powtórzmy – teoria Arystotelesa w żaden sposób nie odnosi się do istnienie punktów przecięcia prostych i okręgów.

W geometrii współczesnej, gdy przyjmuje się, że ciągłość jest wyrażona za pomocą przekrojów Dedekinda, konstrukcja bisekcji odcinka odgrywa fundamentalną rolą w dowodzie ciągłości prostej. Wówczas bowiem obok aksjomatu Dedekinda należy pokazać, że prosta jest przestrzenią ośrodkową; rolę ośrodka pełnią liczby dwójkowe, które wprowadza się właśnie dzięki bisekcji (przeprowadzonej tylko za pomocą przecięć linii prostych).[8]

Samuel Levey w rozdziale *Continuous Extension and Indivisibles in Galileo* ten jeden passsus poświęcił Kartezjuszowi.

> The revolution in seventeenth-century geometry that culminated in the differential and integral calculus is understood to arise from two striking developments of the era: analytic geometry, which represents magnitudes in algebraic terms, and various infinitary methods that render curves, plane or solids as comprising infinitely many infinitesimal or indivisible elements. The first was due to Viete and especially to Descartes, which furnished an algebraic framework for geometry that could exactly represent curves by polynomial expressions built around the fundamental operations of addition, subtraction, multiplication, division, and powers or extractions of roots (s. 82).

Faktycznie, Kartezjusz wprowadził do matematyki formuły symboliczne reprezentujące krzywe algebraiczne, ale tego w żadnej mierze nie wyjaśnia zwrot *algebraic framework*. W istocie był to wynik połączenia antycznej tradycji krzywych mechanicznych, greckiej teorii proporcji, założenia matematyki greckiej o przecinaniu się okręgów i prostych oraz niezapisanej reguły Kartezjusza o zamianie proporcji na arytmetykę odcinku. Otrzymana w rezultacie formuła algebraiczna była dalej przetwarzana zgodnie z prawami ciała uporządkowanego.[9]

W rozdziale *The Continuous, the Infinitely Small, and the Law of Continuity in Leibniz* Levey słusznie zauważa, że definicja Euklidesa V.4 odpowiada aksjomatowi Archimedesa, dalej jednak pisze:

> Such quantities [nieskończenie małe i nieskończenie duże] 'incomparable' to ordinary finite magnitudes– i.e. magnitudes given to us in perception – are thus ruled out. This finitism is widely recognized in ancient and early mathematics as a point of rigour in demonstration, although use of infinity or infinitesimals in the less exacting contexts of experiment and discovery was also familiar.

[8] Zob. K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.
[9] Zob. P. Błaszczyk, (2021). *Descartes' Transformation of Greek Notion … .*

W księgach I–IV *Elementów* nie ma niczego, co usprawiedliwia stwierdzenie, że aksjomaty geometrii wykluczają nieskończenie małe. Od czasu *Grundlagen der Geometrie* (1899) Hilberta wiadomo, że modelami geometrii Euklidesa rozwiniętej w Księgach I–IV są także płaszczyzny niearchimedesowe. Aksjomat Archimedesa jest założeniem teorii proporcji, ale twórcy rachunku różniczkowe stosowali teorię proporcji również do nieskończenie małych. Newton na przykład wprost przyjmował, że nieskończenie małe tworzą odrębny rodzaj wielkości, inny niż – powiedzmy – skończone odcinki.[10]

Nieporozumienia na temat roli aksjomatu Archimedesa w systemie Euklidesa rozciąga się na pozostałe rozdziały. I tak we *Wstępie* czytamy

> Phillip Ehrlich provides a rich presentation of theories that, unlike the Dedekind-Cantor accounts, accept the existence of infinitesimals, adopted in both Aristotle and Euclid (s. 5).

Natomiast Philip Ehrlich słowami Stolza pisze:

> Otto Stolz observed that *It has been often noted that Euclid implicitly used the principle: a magnitude can be so often multiplied that it exceeds other of the same kind.*

Dalej, podobnie stylizując wypowiedź Stolza, Ehrlich pisze:

> Such argument was required for, as Stolz emphasized, the term 'magnitude' occurs in Euclid's *Elements*, but he nowhere explains the concept (s. 505).

Aksjomat Archimedesa w wersji przywołanej przez Stolza to definicja Euklidesa V.4, natomiast pojęcie *wielkość* należy odtworzyć na podstawie Księgi V *Elementów.* Ehrlich pozostawia te enuncjacje Stolza bez komentarza, dalej zaś czytamy:

> Just as ordered fields of real numbers arose in conjunction with the study of Euclidean geometry, it was from the study of non-Archimedean geometry that non-Archimedean ordered fields emerged.

Definicję ciała uporządkowanego do matematyki wprowadził Hilbert w *Grudlagen der Geometrie* z uwagi na badanie niezależności aksjomatów geometrii, natomiast ciało niearchimedesowe niemal jawnie stosuje Euler w *Introductio in analysin infinitorum* (1748).[11]

Drugi motyw, jakim kierował się Hilbert wprowadzając pojęcie ciała uporządkowanego to teoria proporcji. Współczesna geometria odrzuca grecką proporcję, wprowadzając w to miejsce albo liczby rzeczywiste, albo arytmetykę odcinków. Rozstrzygnięcia te mają znaczenie jedynie w podstawach geometrii. W matematyce reguły ciała uporządkowanego były powszechnie stosowane przynajmniej od

[10] Zob. P. Błaszczyk, A. Petiurenko, *Euler's Series for Sine and Cosine: An Interpretation in Nonstandard Analysis*, [w:] M. Zach, D. Waszek (eds.) Research in History and Philosophy of Mathematics. The CSHPM 2021 Volume, Birkhauser 2023, 73–114.

[11] Zob. P. Błaszczyk, A. Petiurenko (2023), *Euler's Series for Sine and Cosine ...* .

czasu *La Geometrie* (1637). Kartezjusz uzasadniał arytmetykę odcinków grecką proporcją, ale z czasem, w kolejnych stuleciach uzasadnienie to nie miało to już większego znaczenia. Od czasu *Über den Zahlbegriff* (1900), gdzie Hilbert podał aksjomaty liczb rzeczywistych, pojęcia ciała uporządkowanego jest wprowadzane aksjomatycznie.

Nawiązanie do greckiej proporcji znajdujemy jeszcze w klasycznych konstrukcjach liczb rzeczywistych Dedekinda i Cantora, wtedy gdy ustalany jest związek między liczbami wymiernymi a punktami linii prostej. Ten motyw nie jest omówiony w monografii, a w jednym rozdziale jest wręcz błędnie opisany. Akihiro Kanamori pisze:

> Cantor next went about correlating his *Zhalengrossen* with points on the straight line – so yes, he was inherently committed to the continuum as consisting extensionally of points. Once an origin *o* and a unit distance have been specified, the rational numbers to points according to a ration. [...] We today so readily identify real numbers with points on the straight line, that Cantor's initial identification may seem jejune or at best a pragmatic correlation. However, one can try to approach hermeneutic interpretation by seeing how Cantor in his day is taking the straight line *qua* linear continuum in a prior sense, one through which his *Zahlengrossen* are to gain 'a certain objectivity'. A plausible thinking is that Cantor's axiom is analogous to Church's Thesis, correlating an informal notion with a formal one (s. 226–227).

Cantor wiąże dwa formalne pojęcie: ówczesne rozumienie linii prostej w geometrii Euklidesa, z jednej strony, oraz liczby rzeczywiste, z drugiej. Wyraźnym nawiązaniem do Euklidesa jest skorelowanie liczb wymiernych z punktami na prostej przeprowadzane na podstawie twierdzenia Talesa. Dla dzisiejszych matematyków ten wątek jest mało zrozumiały, bo współczesna geometria odrzuciła grecką teorię proporcji wprowadzając w to miejsce liczby rzeczywiste (Borsuk i Szmielew, Birkhoff), lub arytmetykę odcinków (Hilbert, Tarski).

Dalej, także w nawiązaniu do geometrii, Kanamori pisze:

> Dedekind's principle has been deployed as an axiom to rigorize Euclidean geometry (s. 233).

Powtórzmy zatem, aksjomat ciągłości nie jest wprowadzany do geometrii Euklidesa z uwagi na wypełnienie jakiś luk logicznych. W wykładzie Borsuka i Szmielew jest on wykorzystany w dowodzie kategoryczności systemu, natomiast w ujęciu Hilberta modele płaszczyzny Euklidesa mogą być archimedesowe lub niearchimedesowe. W wykładzie Greenberga, na który wskazuje Kanamori, aksjomat ciągłości pełni ważną rolę, ale w wykładzie geometrii hiperbolicznej.[12]

6. Pierwsze twierdzenie *Elementów* to konstrukcja trójkąta równobocznego. Wierzchołki trójkąta stanowią końce danego odcinka AB oraz punkt przecięcia okręgów o środkach w punktach A, B i promieniu AB. Od wieków twierdzenie to jest przedmiotem komentarzy związanych, czy to z rolą rysunków w systemie Euklidesa, czy

[12] Zob. H. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman, New York 2007.

ciągłością przestrzeni. Levey, za Leibnizem, umieszcza je w kontekście przecięć krzywych różnego rodzaju i pisze:

> In taking up the topic of *Elements* I.1 and trying to furnish an argument to guarantee the existence of a point of intersection, Leibniz belongs to a lineages of mathematicians who sought to close up the purported gap by introducing some axioms of intersections. [...] One can stipulate that for all crossing curves so constructible [tj. za pomocą cyrkla i linijki], the underlying plane contains corresponding points of intersections, this does not require a theory of continuity of the plane. Likewise, taking the further step with Descartes to expand constructions to all algebraic numbers, and still not have to fall back on a general theory of continuity. But if all transcendental curves are to be included under an axiom o intersection, a stronger guarantee of completeness for the class of points in the plane is required (s. 138).

Przyjmijmy dla uproszczenia, że rozważamy modele płaszczyzny Euklidesa, Kartezjusza, Leibniza. Matematyczne podejście polega na scharakteryzowaniu ciała uporządkowanego $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$ tak, aby – w przypadku Euklidesa – na płaszczyźnie $F \times F$ przecinały się proste i okręgi. Przy tak sformułowanym zadaniu wiadomo, że wystarczy, aby ciało $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$ było zamknięte na operację pierwiastka. Płaszczyznę Kartezjusza opisuje ciało rzeczywiście domknięte. Natomiast krzywe transcendentne, na które wskazuje Levey, $\sin x$, e^x, $\log x$ przecinają się na płaszczyźnie rzeczywistej $R \times R$, ale także hiperrzeczywistej $R^* \times R^*$, gdzie R^* ciałem liczb hiperrealnych. Nie jest więc tak, że warunkiem koniecznym istnienia przecięć krzywych transcendentnych jest zupełność ciała (aksjomat ciągłości).

7. Levey tak relacjonuje argument Leibniza na temat aksjomatu *Całość jest większa od części*: Przyjmując, że odcinki składają się z punktów, można pokazać, że przekątna prostokąta ma tyle samo punktów, co bok; to zaś oznacza, że przekątna i bok są równe. Z drugiej strony,

> the diagonal [...] is greater than its side, each of which is provably equal to a part, contradicting Euclid's principle [...] that the whole is greater than the part (s. 130).

Argument Leibniza oparty jest na ekwiwokacji: równe to równoliczne, równe to przystające. Pierwsze znaczenie nie ma związku z geometrią. Co do drugiego, to faktycznie, biorąc pod uwagę odpowiedni trójkąt, na podstawie I.18 pokażemy, że przekątna prostokąta, powiedzmy d, jest większa od boku, powiedzmy a. Z aksjomatu E3 wynika, $d > a \Rightarrow d = a + e$, co znaczy, że całość $a + e$ jest większa od części a.

8. I jeszcze jeden fragment monografii ukazujący wagę pojęcia ciało uporządkowane w dyskusji na temat kontinuum. John Bell wprowadzając w intuicjonistyczne koncepcje zaczyna od wyników, które mają zaskoczyć czytelnika na przykład, że w rachunku różniczkowym Brouwera nie zachodzi twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej. Jednak gdy za dziedzinę funkcji przyjmiemy niestandardowe liczby rzeczywiste, a ciągłość funkcji wyrazimy za pomocą ciągów (defincja Heinego), to twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej także nie będzie spełnione. Nie wiadomo więc, czy te osobliwe wyniki, którymi epatuje Bell wynikają z założeń logicznych, dziedziny funkcji, czy definicji ciągłości.

Relacjonując SIA (smooth infinitesimal analysis), Bell pokazuje, jak teoria ta prowadzi do odrzucenia prawa wyłączonego środka. Przyjmując bowiem zasady SIA oraz prawo wyłączonego środka dochodzimy do fałszu $1 = 0$ (s. 494). Jednakże w teorii ciał zdanie $1 \neq 0$, gdzie 1 oznacza element neutralny mnożenia, 0 – element neutralny dodawania, jest przyjmowane jako aksjomat. Tak, jak znamy ciała, w których mnożenie jest nieprzemienne, podobnie możemy zakceptować struktury w których nie obowiązuje aksjomat $1 \neq 0$. Bell natomiast twierdzi, że należy odrzucić prawo wyłączonego środka, prawo które towarzyszy matematyce co najmniej od *Elementów* Euklidesa.

9. Reasumując, u czytelnika niepewnie poruszających się po teoriach matematycznych i czerpiącego wiedzę o historii jedynie z opracować, monografia *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspective* może tylko utrwalić model rozwoju pojęcia kontinuum wypracowany przez Boyera. Ci natomiast, którzy mają własny obraz historii continuum, dzięki lekturze *The History of Continua* mogą doprecyzować swoje koncepcje.