FOLIA 364

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 14(2022)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.14.10

*Moritz Pasch*

# Wykłady Z Nowszej Geometrii

## Wprowadzenie

Ze względu na sposób powstania, nowsza geometria stanowi przeciwieństwo nie tyle geometrii Starożytnych, co geometrii analitycznej. Z geometrii Starożytnych, utworzonej przez Euklidesa, a potem ciągle rozszerzanej i wielorako przekształcanej, choć w swej naturze istotnie nie zmienionej, pochodzi część przygotowania potrzebnego w studiowaniu geometrii analitycznej; można nazwać tę część elementami, a ową geometrię elementarną, ze względu na jednakową prostotę jej procedur. Geometria analityczna jest kontynuacją elementów, jeśli chodzi o materiał, zaś przeciwieństwem, jeśli chodzi o metodę. W tej ostatniej liczba występuje jedynie wtedy, gdy wymaga tego natura problemu, a środkiem dowodowym jest poza tym tylko konstrukcja. Natomiast ta pierwsza przede wszystkim korzysta z teorii liczb oraz analizy, starając się wprost sprowadzić każde zadanie geometryczne do rachunku; przy tym ma się rozumieć, że konstrukcja nie zostaje wykluczona.

To, że geometria analityczna nie jest jedyną owocną metodą w rozwiązywaniu zaawansowanych problemów, w których nie chodzi jedynie o wyznaczanie wartości liczbowych, zostało wykazane poprzez dalszy rozwój czystej geometrii. Odkryto – przygotowane częściowo poprzez bogaty napływ wyników obliczeń – punkty widzenia, które możliwie bezrachunkowo pozwalały na opanowanie zawiłych zależności nie mniej łatwo, jak udawało się to, lub mogło się udawać, na innej drodze. To odkrycie, które czerpało swoje środki bezpośrednio z natury przedmiotu, było odróżniane od geometrii elementarnej oraz geometrii analitycznej jako geometria czysta, wyższa, syntetyczna, a także nowa syntetyczna lub nowa.

Także nowa geometria opiera się na elementarnej. Chociaż obie określać można mianem czystej geometrii ze względu na metodę, to jednak przy przejściu od elementów jest się zaskoczonym różnorodnością. W geometrii elementarnej pojęcia są jak najbardziej wąsko ograniczone, w nowej są one szerokie, wiele ogarniające. W tamtej różnorodne przypadki figury omawianej w twierdzeniu wymagają tyluż rozróżnień w dowodzie, w tej wszystkie przypadki obejmowane są jednym dowodem. Geometria analityczna skorzystała z geometrii syntetycznej. Wypracowała i ujednoliciła ona nowe punkty widzenia, a poprzez dalsze ich zespolenie powstanie być może wyższa geometria o jednolitym charakterze. Geometria niższa, tak jak bywa przekazywana jest – przeciwnie – pod mniejszym wpływem współczesnej. Czy samą istotą sprawy miałoby powodowane być to, że z pytaniami elementarnymi obchodzimy się z trudem, a z tymi wyższymi dajemy sobie radę w bardziej przejrzysty i stosunkowo prosty sposób? Badania dostarczyły tu wyjaśnienia i rozstrzygnęły na korzyść nowej geometrii. Rozszerzone pojęcia są stosowalne także w elementach, a gdy wprowadzi się je w należytym miejscu, czyli wszędzie tam, gdzie wprzódy możliwe jest ich zrozumienie, to ich potrzeba wychodzi na światło dzienne także wcześniej.

Wytyczone niniejszym zadanie nie jest nowe, ale jego ścisłe przeprowadzenie pozostaje w związku z innym zadaniem, które tym bardziej nie jest nowe. Geometrii elementarnej stawia się nie jedynie zarzut trudności, lecz także niedoskonałości lub niejasności, które przepełniają pojęcia i dowody. Podnoszenie rozpoznanych niedostatków jest pożądane ustawicznie i na różnorodne sposoby, a gdy sprawdza się wyniki, to można uzyskać przekonanie, że starania te same w sobie są beznadziejne. W rzeczywistości tak nie jest; ujęte prawidłowo i w pełnym zakresie jawi się to zadanie nie jako nierozwiązalne. Jest ono jednak utrudnione przez okoliczności, o których mowa będzie później.[1] Jednak właśnie w tym względzie pomysł wykorzystania z ważnością wstecz współczesnych poglądów okazuje swój zasięg. Poważne starania, aby przeprowadzić przekształcenie wedle ściśle wyznaczonego wzorca oraz podać rozwinięcie całkiem czystego pojęcia czyni wrażliwym spojrzenie na przeszkadzające szczegóły oraz przywołuje potrzebne do jego wydzielenia rozstrzygnięcia. Jako taki wzorzec sprawdza się współczesna geometria. Prowadzi nas ona wstecz do samych początków geometrii, wyostrza wyczucie na wszystko, co przerywa czystość rozwoju i uczy, jak oddalać owe domieszki, źródła żałosnej niejasności.

Przedstawienie geometrii w tym sensie nie może oczywiście zakładać żadnej wiedzy, którą staramy się zdobywać w geometrii, lecz tylko taką, z którą do nauki zabiera się człowiek z ulicy. Wymaga pewnego wysiłku oraz czujności, aby wytrwale przemyśleć rzeczy, do których ma się zaufanie oraz powrócić do stanowiska, od którego jest się daleko oddalonym. Wysiłek ten jest jednak nieodzowny dla prześledzenia następującego niżej przedstawienia, o ile chcemy osiągnąć jego cel.

—

Pojęcia geometryczne tworzą szczególną grupę wśród pojęć, które służą do opisu świata zewnętrznego. Gdy opisuję kolor jakiegoś przedmiotu, to mówię o własności fizycznej; gdy nazywam go sześciennym, stosuję pojęcie geometryczne. Pojęcia geometryczne, z doliczeniem pojęć liczbowych, można łączyć wzajem ze sobą szeregiem związków, w których nie występują żadne inne pojęcia. Oddzielenie pojęć geometrycznych od pozostałych nie będzie tu jednak badane, a raczej podamy tu stanowisko, którego zamierzamy w dalszym ciągu ściśle się trzymać i wedle którego nie rozpoznajemy w geometrii niczego innego jak część nauk przyrodniczych.

[1] W § 6 oraz § 12.

W ciele, które nazywa się „sześciennym” można wyróżnić ściany boczne, krawędzie, kąty, itd. oraz ustalać ich wzajemne związki. Natomiast „oddalenie” dwóch ciał pozostaje niewystarczająco określone, jak długo wyróżniać można w jednym z nich części bez opuszczania jego granic, które wyznaczone są przez środki lub cele obserwacji. Granice te zmieniają się od przypadku do przypadku; to samo ciało, które przy jednej sposobności może być ujmowane tylko jako całość, okazuje się nieodpowiednim [do takiego ujęcia] przy całkiem innej okazji; wtedy jego części występują jako człony systemu, który badany jest pod względem geometrycznym. Te ciała, których dzielenie nie zgadza się z granicami obserwacji, będą zawsze nazywane *punktami*; natomiast słowo „ciało” zastrzeżone pozostaje do innego użycia w geometrii.

Podobnie rzecz się ma z ograniczoną (prostą) *linią*, na której musi być niemożliwe, przy zatrzymaniu obserwacji na wytyczonych granicach, odłożenie różnych dróg między tymi punktami; każde dwie części stykają się w co najwyżej jednym punkcie. Zamknięta (prosta) linia składa się z dwóch ograniczonych linii. Części *płaszczyzny* mogą stykać się ze sobą tylko w punktach lub liniach. Stosowanie tych pojęć związane jest z pewną niepewnością, jak to ma miejsce z prawie wszystkimi pojęciami, które wypracowaliśmy dla pojmowania zjawisk.

## § 1. O linii prostej

Najpierw będziemy zajmowali się linią prostą. Mówi się: przez dwa punkty można poprowadzić linię prostą. Linia może jednak być różnorako ograniczona; nieokreśloność ograniczenia doprowadza do tego, że o linii prostej mówi się, że nie jest ograniczona, że musi „być przedstawiana” jako nieograniczona, nieskończenie rozciągła. Żądanie to nie odpowiada żadnemu obiektowi spostrzeżenia; to raczej całkiem ograniczona linia prosta, prosta droga między dwoma punktami, *prosty odcinek*, jest bezpośrednio pojmowany w postrzeżeniach. Chcemy trzymać się tego ostatniego wyrażenia i mówić:

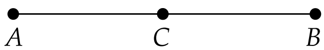
1. o odcinku prostym poprowadzonym między dwoma punktami,

2. o punktach, które leżą *wewnątrz* odcinka prostego.

Wszystkie zwroty, które wystąpią w tym paragrafie, dają się sprowadzić do obu podanych. Będziemy w większości mówić „odcinek” zamiast „odcinek prosty”. Jeśli między punktami $A$ i $B$ (lub $B$ i $A$) poprowadzony jest odcinek, to mówi się też: odcinek łączy $A$ i $B$, prowadzi on od $A$ do $B$, ma punkty końcowe $A$ i $B$, jest ograniczony przez punkty $A$ i $B$. Jeśli nazywa się lub utrzymuje, że $C$ jest „punktem odcinka”, $C$ należy do odcinka, odcinek przechodzi przez $C$, to rozumie się przez to, że albo $C$ leży wewnątrz odcinka, albo jest punktem końcowym. Punkt, dla którego to nie zachodzi leży „na zewnątrz odcinka”.

Rozważania dalszego ciągu powinny nas zaznajomić z własnościami, które dostrzec można dla odcinków i ich punktów. Wyrażamy je w postaci oddzielnych stwierdzeń. Stwierdzenia będą jednak wprowadzane na różny sposób. Niektóre z nich będą *dowodzone*, t.j. będzie pokazane jak ich treść uwarunkowana jest innymi stwierdzeniami; użyte w dowodzie stwierdzenia muszą za każdym razem wystąpić już wprzódy. Przeciwstawiamy teraz te stwierdzenia, które są dowodzone, jako *twierdzenia* [Lehrsätze], pozostałym, które określamy *aksjomatami* [Grundsätze]. Twierdzenia są dedukowane z aksjomatów, tak więc *wszystko, co należy do uzasadnienia twierdzenia, musi bez wyjątku zostać odnalezione w aksjomatach.*

Najprostsze obserwacje dotyczące odcinków i ich punktów dostarczają szeregu związków; część tych ostatnich tworzy treść aksjomatów w tym paragrafie. Jakkolwiek weźmie się punkty $A$ i $B$ (w omówionych bliżej pod koniec tego paragrafu granicach), zawsze można połączyć $A$ i $B$ odcinkiem prostym; nie można tego jednak osiągnąć na więcej sposobów.




Wewnątrz odcinka można wziąć punkt $C$. Można poprowadzić z $A$ do $C$ odcinek prosty; nie przechodzi on przez $B$; jednak wpada wraz ze wszystkimi swoimi punktami w poprzedni odcinek. Gdy połączy się $A$ z $C$ oraz $C$ z $B$, to nie napotka się żadnych punktów, których nie było już w pierwszym odcinku; punkty pierwszego odcinka będą ze swojej strony wyczerpane przez te z obu odcinków. Aksjomaty I.–V. oddają te spostrzeżenia.

I. *Aksjomat.* — Między dwoma punktami można przeprowadzić odcinek prosty, a przy tym tylko jeden.

Na mocy powyższego dla wyznaczenia odcinka wystarcza podanie jego punktów końcowych. Odcinek od $A$ do $B$ będzie oznaczany przez $AB$ lub $BA$.

II. *Aksjomat.* — Zawsze można podać punkt, który leży wewnątrz danego odcinka prostego.

III. *Aksjomat.* — Jeśli punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, to punkt $A$ leży na zewnątrz odcinka $BC$.

Tak samo, punkt $B$ leży na zewnątrz odcinka $AC$.

IV. *Aksjomat.* — Jeśli punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, to wszystkie punkty odcinka $AC$ są jednocześnie punktami odcinka $AB$.

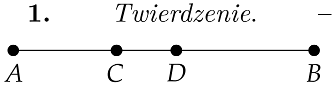
Albo: jeśli punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, a punkt $D$ wewnątrz odcinka $AC$ lub $BC$, to $D$ leży wewnątrz odcinka $AB$.

V. *Aksjomat.* — Jeśli punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, to punkt, który nie należy do żadnego z odcinków $AC$ i $BC$ nie może należeć do odcinka $AB$.

Albo: jeśli punkty $C$ i $D$ leżą wewnątrz odcinka $AB$, punkt $D$ na zewnątrz odcinka $AC$, to punkt $D$ leży wewnątrz odcinka $BC$.

Jeśli teraz weźmiemy punkt $C$ wewnątrz odcinka $AB$ oraz punkt $D$ wewnątrz odcinka $BC$, to okazuje się, że punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$. To spostrzeżenie narzuca się równie bezpośrednio, jak poprzednie; można ustanowić między nim samym a nimi zależność, której nie należy przemilczać. Oto okazuje się, że ta nowa zależność pojawia się nie jako aksjomat, lecz jako twierdzenie.

**1.** *Twierdzenie.* – Jeśli punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, punkt $D$ wewnątrz odcinka $BC$, to punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$.



Dowód. — Ponieważ punkt $D$ został wzięty z wewnątrz odcinka $BC$, więc $C$ leży na zewnątrz odcinka $BD$ (III); ponieważ $C$ leży wewnątrz $AB$, $D$ wewnątrz $BC$, więc $D$ także leży wewnątrz odcinka $AB$ (IV); ponieważ $C$ i $D$ leżą wewnątrz odcinka $AB$, a $C$ na zewnątrz odcinka $BD$, więc $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$ (V).

Odcinek $CD$ nazywa się *częścią odcinka* $AB$, gdy ten ostatni zawiera wszystkie punkty pierwszego, ale nie tylko je (Definicja 1).

**2.** *Twierdzenie.* — Jeśli $C$ i $D$ są punktami odcinka $AB$ i co najmniej jeden z nich leży wewnątrz tego odcinka, to odcinek $CD$ jest częścią odcinka $AB$.

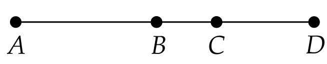
Dowód. — Niech $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$. Wtedy $D$ należy do jednego z dwóch odcinków $AC$ lub $BC$ (V), niech będzie to $BC$; a zatem $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$ (1), zaś $A$ nie jest żadnym punktem odcinka $CD$ (III), którego wszystkie punkty należą do odcinka $AD$ (IV), a więc także do odcinka $AB$ (IV), t.j. odcinki $CD$ i $AB$ pozostają w zależności wprowadzonej w definicji 1.

Pierwszy aksjomat został wykorzystany już przy formułowaniu pozostałych; bez niego bowiem nie można byłoby mówić o „jedynym" odcinku $AB$, „jedynym" odcinku $BC$, itd. Łatwo uznać za bezcelowe nadawanie wprzódy szczególnej formy tak trywialnym wyrażeniom, jakie zawiera np. aksjomat III. Jednak jest ona używana w powyższych dowodach i postanawiamy *pozbyć się wszelkich pozarachunkowych środków dowodowych, nawet tych najbardziej niepokaźnych.*[2]

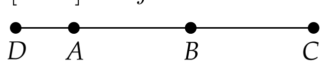
Jeśli weźmie się punkt $B$ wewnątrz odcinka $AC$, to odcinki $AB$ i $BC$ tworzą razem odcinek $AC$ i można wtedy powiedzieć: odcinek $BC$ jest *przedłużeniem* odcinka $AB$ poza punkt $B$, odcinek $AB$ zostaje przedłużony poza $B$ do $C$. Jakkolwiek weźmie się punkty $A$ i $B$ (w omówionych bliżej pod koniec tego paragrafu granicach), zawsze można przedłużyć odcinek $AB$ poza $A$ oraz poza $B$. Jeśli teraz przedłuży się najpierw odcinek $AB$ poza $B$ do $C$, a potem znowu poza $B$ do $D$, to powstają odcinki $AC$ i $AD$, z których jeden wraz ze wszystkimi swoimi punktami wpada w drugi. Jeśli odcinek $AB$ przedłuży się najpierw poza $B$ do $C$, a potem poza $A$ do $E$ oraz połączy $C$ z $E$ odcinkiem prostym, to odcinek $AB$ wraz ze wszystkimi swoimi punktami wpada w odcinek $CE$. Otrzymujemy zatem trzy dalsze aksjomaty, ostatnie, które podać trzeba w tym paragrafie.

[VI.] *Aksjomat.* — Jeśli $A$ i $B$ są dowolnymi punktami, to można wybrać punkt $C$ tak, aby $B$ leżał wewnątrz odcinka $AC$.

[VII.] *Aksjomat.* — Jeśli punkt $B$ leży wewnątrz odcinków $AC$ i $AD$, to albo punkt $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$, albo punkt $D$ leży wewnątrz odcinka $AC$.




[VIII.] *Aksjomat.* — Jeśli punkt $B$ leży wewnątrz odcinka $AC$, punkt $A$ wewnątrz odcinka $BD$ oraz $C$ i $D$ są połączone odcinkiem prostym, to punkt $A$ także leży wewnątrz odcinka $CD$.



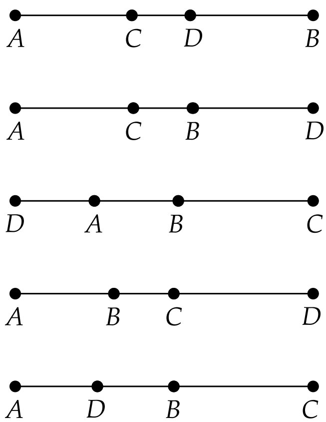

Podobnie, punkt $B$ leży wtedy wewnątrz odcinka $CD$.

Trzy punkty, z których jeden leży wewnątrz odcinka ograniczonego przez dwa pozostałe można nazwać *prostym szeregiem* (Definicja 2).

[2]Por. koniec § 12.

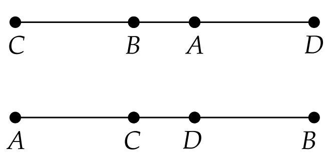
**3.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $ABC$ oraz $ABD$ tworzą proste szeregi, to zachodzi to także dla punktów $ACD$ oraz $BCD$.

Dowód. — Zgodnie z założeniem (def. 2) albo $A$ leży wewnątrz odcinka $BC$, albo $B$ wewnątrz $AC$, albo $C$ wewnątrz $AB$; jednocześnie (def. 2) albo $A$ leży wewnątrz $BD$, albo $B$ wewnątrz $AD$, albo $D$ wewnątrz $AB$. Jeśli $C$ i $D$ leżą wewnątrz $AB$, to albo $D$ leży wewnątrz $BC$ (V) oraz $C$ wewnątrz $AD$ (1), albo $D$ wewnątrz $AC$ oraz $C$ wewnątrz $BD$ (1). Jeśli $C$ leży wewnątrz, a $D$ na zewnątrz $AB$, to możemy wybrać dla punktów $A$ i $B$ takie oznaczenia, że odcinek $AD$ przechodzi przez $B$; wtedy $AD$ przechodzi też przez $C$ (IV), zaś $CD$ przez $B$ (1). Jeśli $C$ leży na zewnątrz $AB$, to oznaczmy punkty $A$ i $B$ tak, iż odcinek $AC$ przechodzi przez $B$. Teraz albo $A$ leży wewnątrz $BD$, a więc (VIII) $A$ i $B$ leżą wewnątrz $CD$; albo $B$ wewnątrz $AD$, a więc (VII) albo $C$ wewnątrz $AD$ oraz (1) $BD$, albo $D$ wewnątrz $AC$ oraz (1) $BC$; albo $D$ wewnątrz $AB$, a więc (IV) $D$ wewnątrz $AC$ oraz (1) $B$ wewnątrz $CD$. Tak więc, $ACD$ oraz $BCD$ tworzą we wszystkich przypadkach proste szeregi (def. 2).




Przy poczynionym tu założeniu dotyczącym punktów $ABC$ prosta droga prowadząca przez punkty $A$ i $B$, należycie przedłużona, przekroczy punkt $C$. Dlatego mówi się (Definicja 3): $C$ leży na *linii prostej przez punkty $A$ i $B$*, a krócej: na linii prostej $AB$, lub na prostej $AB$ (lub $BA$). Równoznacznie: prosta $AB$ przechodzi przez $C$, jest poprowadzona przez $C$, $C$ jest punktem prostej $AB$, itd. Wyrażenia: $A$ leży na prostej $BC$, $B$ leży na prostej $AC$, $C$ leży na prostej $AB$ mają ten sam sens.

Jakkolwiek weźmie się punkty $C$ i $D$, zawsze istnieje prosta, która przez nie przechodzi; weźmy bowiem $A$ wewnątrz odcinka $CD$ (I, II) oraz $B$ wewnątrz odcinka $AC$ (I, II), wtedy $ABC$ (def. 2) oraz $ABD$ (1) są prostymi szeregami, t.j. (def. 3) prosta $AB$ przechodzi przez $C$ oraz $D$; podobnie gdy weźmie się (VI) $A$ oraz $B$ tak, iż $C$ leży wewnątrz odcinka $AD$, a $D$ wewnątrz odcinka $AB$ (IV). A zatem zachodzi:



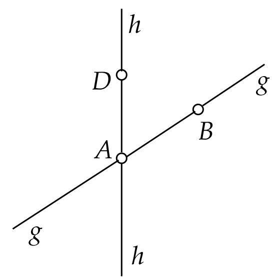

**4.** *Twierdzenie.* — Przez dowolne dwa punkty można zawsze poprowadzić linię prostą.

Niech $A'$ będzie punktem prostej $AB$ (a więc $A$ jest punktem prostej $A'B$). Gdy $C$ również oznacza jakiś punkt prostej $AB$, to $C$ jest różny od $A'$ lub nie. W pierwszym przypadku (def. 3) $ABC$ oraz $ABA'$ są prostymi szeregami, a więc także $BCA'$ nim jest (3), t.j. $C$ leży na prostej $A'B$ (def. 3). Jeśli ustali się, że także punkty $A$ i $B$ są nazywane punktami prostej $AB$, a więc $A'$ punktem prostej $A'B$, to również w drugim przypadku $C$ należy do prostej $A'B$. (W pierwszym przypadku trzeba dodatkowo rozważyć możliwość pokrywania się $C$ z $A$ lub $B$, co jednak nie zmienia niczego w wyniku; założyliśmy jednakże, że $A'$ jest różny od $A$ i $B$.) Stąd wszystkie punkty prostej $AB$ leżą na prostej $A'B$, podobnie jak wszystkie punkty prostej $A'B$ leżą na prostej $AB$; wyrażenie „$C$ leży na prostej $AB$" jest identyczne z wyrażeniem „$C$ leży na prostej $A'B$" i mówimy zatem: proste $AB$ i $A'B$ pokrywają się ze sobą. Jeśli teraz weźmie się dowolne dwa punkty $A'$ i $B'$ na prostej $AB$, to proste $AB$ i $A'B'$ pokrywają się ze sobą, a w końcu pokrywają się też ze sobą proste $AB$ i $CD$, gdy obie są poprowadzone przez $A'$ i $B'$. To wyrażone jest w następnym twierdzeniu.

**5.** *Twierdzenie.* — Każda prosta jest wyznaczona przez dowolne dwa jej punkty, t.j.: wszystkie proste, które mają dwa punkty wspólne pokrywają się ze sobą.

Często dla oznaczenia prostej używa się jakiejś szczególnej litery, zamiast układu dwóch punktów. Jeśli $A$ i $B$ są punktami prostej $g$, to $g$ oznacza prostą $AB$ (5); mówi się: prosta $g$ łączy $A$ z $B$. Wszystkie punkty odcinka $AB$ należą do prostej $g$ (def. 3); nazywa się ten odcinek odcinkiem prostej $g$. Na rysunkach prosta jest reprezentowana przez jakiś swój odcinek.

Gdy dwie proste $g$ i $h$ mają punkt wspólny $A$, to nie mają oprócz tego żadnych innych punktów wspólnych (5). Mówi się: proste $g$ i $h$ spotykają (przecinają) się w punkcie $A$; ten punkt nazywa się *punktem przecięcia* i oznacza przez $gh$.



Rysunek 1

Weźmy pod rozwagę najpierw tylko jedną jedyną prostą. Jeśli $A$, $B$, $C$ są punktami prostej $g$, a więc $C$ leży na prostej $AB$ (5), to (def. 3) te trzy punkty tworzą prosty szereg, t.j. (def. 2) albo $A$ leży wewnątrz odcinka $BC$, albo $B$ wewnątrz odcinka $AC$, albo $C$ wewnątrz odcinka $AB$. Jeśli na przykład $C$ leży wewnątrz odcinka $AB$, to mówi się: punkt $C$ leży na prostej $g$ *między* $A$ i $B$, $A$ i $C$ *z tej samej strony* od $B$, $B$ i $C$ z tej samej strony od $A$, $A$ i $B$ *z różnych stron* $C$. Wtedy jednak $A$ nie leży między $B$ i $C$, ani $B$ między $A$ i $C$ (II). Stąd mamy:


**6.** *Twierdzenie.* — Jeśli trzy punkty leżą na linii prostej, to jeden z nich leży pomiędzy dwoma pozostałymi. — Oraz:

**7.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $C$ leżą na prostej, $C$ między $A$ i $B$, to ani $A$ nie leży między $B$ i $C$, ani $B$ między $A$ i $C$.

Gdy na miejsce pierwotnie wprowadzonych terminów wstawimy nowe: 1) punkt linii prostej, 2) punkt między dwoma punktami (na prostej), to wszystkie stwierdzenia zostaną sformułowane na nowo. Przejdziemy najpierw przez aksjomaty I–VI i wyrazimy ich treść, o ile nie była ona już wysłowiona w twierdzeniach 4–7, przez następujące cztery stwierdzenia:

**8.** *Twierdzenie.* — Jeśli na prostej dane są dwa punkty $A$ i $B$, to zawsze można na niej wybrać $C$ tak, iż $C$ leży między $A$ i $B$.

**9.** *Twierdzenie.* — Jeśli na prostej dane są dwa punkty $A$ i $B$, to zawsze można na niej wybrać $C$ tak, iż $A$ leży między $B$ i $C$.

**10.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na prostej, $C$ między $A$ i $B$, $D$ między $A$ i $C$, to $D$ także leży między $A$ i $B$.

**11.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na prostej, $C$ i $D$ między $A$ i $B$, ale $D$ nie między $A$ i $C$, to $D$ leży między $B$ i $C$.

Obydwa ostatnie stwierdzenia można zastąpić jednym jedynym, które powstaje przez wykorzystanie 6, 10, 11. Niech mianowicie $A$, $B$, $C$, $D$ będą punktami prostej, $D$ położony między $A$ i $B$; wtedy albo $C$ leży miedzy $A$ i $B$ (6), a więc stosujemy twierdzenie 11, albo $A$ między $B$ i $C$, a stąd (10) $D$ między $B$ i $C$, albo $B$ między $A$ i $C$, a stąd (10) $D$ między $A$ i $C$, t.j.:

**12.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na prostej, $D$ między $A$ i $B$, to $D$ leży albo między $A$ i $C$, albo między $B$ i $C$.

Tutaj rzeczywiście stwierdzenie 11 jest bezpośrednio zawarte; zaś 10 otrzymuje się z 7 i 12 w sposób następujący. Niech $A$, $B$, $C$, $D$ będą punktami prostej, które czynią zadość założeniom twierdzenia 10. Ponieważ $C$ leży między $A$ i $B$, więc (12) $C$ leży między $A$ i $D$ lub między $B$ i $D$; ponieważ $D$ leży między $A$ i $C$, więc (12) $D$ leży między $A$ i $B$ lub miedzy $B$ i $C$. Ale (7) $C$ nie leży między $A$ i $D$, a więc $C$ leży między $B$ i $D$, a stąd (7) $D$ nie leży między $B$ i $C$, lecz $D$ leży między $A$ i $B$.

Korzystając z 7, 10, 11, a więc również z 7, 12 można udowodnić następujące twierdzenie, odpowiadające twierdzeniu 1:

**13.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na prostej, $C$ między $A$ i $B$, $D$ między $B$ i $C$, to $C$ leży między $A$ i $B$.

Siódmemu aksjomatowi odpowiada:

**14.** *Twierdzenie.* — Jeśli $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na linii prostej, $B$ między $A$ i $C$, a jednocześnie $B$ między $A$ i $D$, to $A$ nie leży między $C$ i $D$.

To można jednak wyprowadzić z 7 i 12, z wykorzystaniem 13. Niech bowiem wedle owych założeń $A$ leży między $C$ i $D$, a więc $A$ leżałby między $B$ i $D$ (13), podczas gdy $B$ powinien leżeć między $A$ i $D$ (7).

Na mocy (6) albo $C$ leży między $A$ i $D$, a stąd między $B$ i $D$ (13), albo $D$ między $A$ i $C$, a stąd między $B$ i $C$ (13), czyli w każdym przypadku $B$ nie leży między $C$ i $D$ (7), t.j.:

**15.** *Twierdzenie.* — Jeśli $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na linii prostej, $B$ między $A$ i $C$, a jednocześnie $B$ między $A$ i $D$, to $B$ nie leży między $C$ i $D$.

Trzeba jedynie zamienić ze sobą $B$ i $D$, aby z tego otrzymać rozszerzenie twierdzenia dwunastego, wedle którego obie wysłowione w nim możliwości nawzajem się wykluczają. Rozszerzenie to da się jednak otrzymać jako wniosek ze stwierdzeń 6, 7, 12.

Wreszcie, ósmemu aksjomatowi odpowiada:

**16.** *Twierdzenie.* — Jeśli $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na linii prostej, $A$ między $B$ i $C$, $B$ między $A$ i $D$, to $A$ leży między $C$ i $D$.

To także można wyprowadzić z 6, 7, 12. Niech bowiem $C$ leży między $A$ i $D$ (6), wtedy $C$ leżałby między $B$ i $D$ (7 i 11), a stąd $B$ między $A$ i $C$ (13); gdyby $D$ leżał między $A$ i $C$, to $B$ także leżałby między $A$ i $C$ (10). Jedno i drugie jest niemożliwe (7).

Podczas gdy dla określenia odcinka wymagane są oba punkty końcowe, dla wyznaczenia prostej można wziąć dowolne dwa jej punkty. Ta okoliczność pociąga za sobą to, że w przypadku aksjomatu I wchodzą w grę twierdzenia 4, 5, 6, natomiast w przypadku aksjomatów IV, V, VII, VIII jedynie twierdzenie 12; aksjomaty II, III, VI dostarczają, odpowiednio, twierdzeń 8, 7, 9. Ze stwierdzeń 4–9 oraz 12, lub z 4–11 można wyciągnąć te same wnioski, które można związać z aksjomatami. Interesujące są tu jedynie dwa następujące stwierdzenia.

**17.** *Twierdzenie.* — Dla dowolnego (skończonego) zbioru punktów prostej wybrać można dwa punkty, między którymi leżą wszystkie pozostałe.

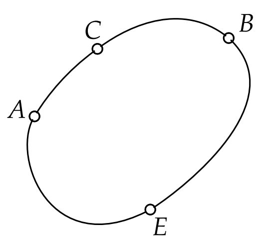
Dowód. — Jeśli wybierze się dowolnie punkty $A$, $B$, to w ogólności pozostałe punkty będą leżały po części między $A$ i $B$, a po części nie. Do drugiego rodzaju niech należy $C$ i niech $B$ leży między $A$ i $C$ (6). Wtedy punkty leżące między $A$ i $B$ znajdują się także między $A$ i $C$ (10), a ponadto punkt $B$ i być może inne jeszcze z podanych punktów [także leżą między $A$ i $C$]. Jeśli część z nich nie leży między $A$ i $C$, to $A$ lub $C$ zastępujemy nowym punktem. Itd.

**18.** *Twierdzenie.* — Jeśli dany jest dowolny zbiór punktów prostej, to można podać na niej dwa punkty tak, że między nimi leżą wszystkie dane.

Dowód. — Spośród podanych punktów można wybrać dwa, miedzy którymi leżą wszystkie pozostałe (17), niech będą to $E$ i $F$. Wybiera się teraz na danej prostej punkt $M$ tak, że $E$ leży między $F$ i $M$ (9), a potem punkt $N$ tak, że $F$ leży między $M$ i $N$ (9). Na mocy (10) wszystkie punkty leżące między $E$ i $F$ znajdują się także między $M$ i $F$, a stąd również między $M$ i $N$ (10). To samo zachodzi dla $E$ i $F$ (10), a więc dla wszystkich podanych punktów.

Twierdzenia 4, 5 wyrażają szczególne własności linii prostej. Natomiast twierdzenia 6–11 dotyczą każdej linii ograniczonej (samej w sobie nigdzie się nie przecinającej ani stycznej do siebie). Gdy wewnątrz takiej [linii] wybierze się trzy punkty $A$, $B$, $C$, to jeden z nich leży między dwoma pozostałymi; jeśli $C$ leży między $A$ i $B$, to $A$ nie leży między $B$ i $C$, itd. Stosowne są więc wszystkie stwierdzenia, które wynikają wyłącznie z 6–11.

Jeśli natomiast wybierze się trzy punkty $A$, $B$, $C$ na linii zamkniętej (samej w sobie nigdzie się nie przecinającej ani stycznej do siebie), to nie ma sensu mówienie, że np. $C$ leży między $A$ i $B$, ponieważ z $A$ do $B$ prowadzą na tej linii dwie drogi, z których jedna przechodzi przez $C$, a druga nie. Niemniej jednak można stworzyć podobne pojęcie. Wybieram na podanej linii dowolny punkt $E$ oraz ustalam, że dopuszczalne są tylko takie drogi, które wykluczają punkt $E$. Wtedy z $A$ do $B$ istnieje tylko jedna droga; jeśli przechodzi ona przez $C$, to $C$ leży między $A$ i $B$, przy przestrzeganiu podanego ustalenia, i mówię: *przy wykluczonym $E$, $C$ leży między $A$ i $B$* (lub $B$ i $A$). Punkt $E$ oznaczam przy tym jako *„punkt graniczny”*.




Rysunek 2

Można operować tym nowym pojęciem tak, jak tym odnoszącym się do linii ograniczonej, i znowu zachodzą stwierdzenia 6–11, gdy wprowadzi się $E$ oraz dopisek „przy wykluczonym $E$” lub „dla punktu granicznego $E$”. Nowe pojęcie odnosi się do czterech punktów $A$, $B$, $C$, $E$ linii zamkniętej. Stosuje się je, gdy wśród dróg, które prowadzą z $A$ do $B$ jedna przechodzi przez $C$, a jednocześnie nie przechodzi przez $E$; wtedy jednak inna droga przechodzi przez $E$, a nie jednocześnie przez $C$, t.j. dla punktu granicznego $C$, $E$ leży między $A$ i $B$. Punkty $C$ i $E$ mogą więc zamieniać się rolami i gdy nie można przejść z $A$ do $B$ bez natrafienia na jeden z nich, to mówi się: *$A$ i $B$ są rozdzielone przez $C$ i $E$ (lub $E$ i $C$).*

Gdy przeniesiemy stwierdzenia 6–11 na linię zamkniętą, to pojawiają się poniższe stwierdzenia b–f, które poprzedzimy [stwierdzeniem], zachodzącym tylko dla linii zamkniętej, a mianowicie:

a) Jeśli $C$ leży między $A$ i $B$ przy wykluczonym $E$, to $E$ leży między $A$ i $B$ przy wykluczonym $C$.

Tutaj, podobnie jak w stwierdzeniach następnych, mowa jest tylko o punktach jednej i tej samej linii zamkniętej oraz o ich położeniu na tej linii.

b) Przy wykluczonym $E$, albo $A$ leży między $B$ i $C$, albo $B$ między $A$ i $C$, albo $C$ między $A$ i $B$, przy czym każde z tych położeń wyklucza oba pozostałe.

c) Jeśli dla wykluczonego punktu granicznego $E$ punkt $C$ leży między $A$ i $B$, punkt $D$ miedzy $A$ i $C$, to $D$ także leży między $A$ i $B$, dla wykluczonego punktu granicznego $E$.

d) Jeśli dla wykluczonego punktu granicznego $E$ punkty $C$ i $D$ leżą między $A$ i $B$, to dla tego samego punktu granicznego punkt $D$ leży albo między $A$ i $C$, albo między $B$ i $C$.

e) Jeśli dane są trzy punkty $A$, $B$, $E$, to można wybrać $C$ tak, że $C$ leży między $A$ i $B$ dla punktu granicznego $E$.

f) Jeśli dane są trzy punkty $A$, $B$, $E$, to można wybrać $D$ tak, że $B$ leży między $A$ i $D$ dla punktu granicznego $E$.

Ostatnie stwierdzenie jest zależne od poprzednich; można je wyprowadzić z a, b, e. Najpierw mianowicie wyciąga się wniosek z a i b.

g) Jeśli $AB$ są rozdzielone przez $CE$, to także $CE$ są rozdzielone przez $AB$.

Dowód. — Zgodnie z założeniem $C$ leży między $A$ i $B$ dla punktu granicznego $E$, zaś $E$ między $A$ i $B$ dla punktu granicznego $C$ (a). Na mocy (b) $BC$ nie są rozdzielone przez $AE$, a tym mniej $BE$ [nie są rozdzielone] przez $AC$. Na mocy (a) $E$ nie leży między $B$ i $C$, $C$ nie leży między $B$ i $E$ przy wykluczonym $A$. Pozostaje zatem tylko możliwość (b), że $B$ leży między $C$ i $E$ przy wykluczonym $A$, t.j. że $CE$ są rozdzielone przez $BA$ (lub $AB$). — Ta obserwacja faktycznie poucza, że ma to miejsce, o ile $AB$ są rozdzielone przez $CE$; jednak wykorzystanie stwierdzeń a i b prowadzi do tego samego wyniku.

Jeśli teraz dane są $E$, $B$, $A$, to mogę wybrać $D$ tak (e), że $D$ leży między $B$ i $E$ przy wykluczonym $A$, t.j. $BE$ są rozdzielone przez $DA$, a więc $DA$ [są rozdzielone] przez $BE$ (g), t.j. $B$ leży między $A$ i $D$ przy wykluczonym $E$.

Ze stwierdzeń 6, 7, 10, 11 wynikają 12–17. Analogicznie postąpić można ze stwierdzeniami b, c, d; dla tych wyników trzeba jedynie wprowadzić dwa [stwierdzenia], które odpowiadają tym o numerach 12 i 15.

h) Jeśli $D$ leży między $A$ i $B$ dla punktu granicznego $E$, ale nie między $B$ i $C$, to $D$ leży między $A$ i $C$ dla tego samego punktu granicznego.

i) Jeśli $D$ leży między $A$ i $B$ dla punktu granicznego $E$, a jednocześnie między $A$ i $C$, to $D$ nie leży między $B$ i $C$ dla tego samego punktu granicznego.

Przy rozważeniu (g) wnioskuje się teraz: jeśli $DE$ są rozdzielone przez $AB$, ale nie przez $BC$, to $DE$ są rozdzielone przez $AC$; jeśli $DE$ są rozdzielone przez $AB$ oraz przez $AC$, to $DE$ nie są rozdzielone przez $BC$; jeśli $DE$ nie są rozdzielone ani przez $AC$, ani przez $BC$, to nie są one też rozdzielone przez $AB$, t.j.:

k) Jeśli $AB$ są rozdzielone przez jedną z par $CE$ i $DE$, ale nie przez drugą, to $AB$ są rozdzielone przez $CD$. Oraz:

l) Jeśli $AB$ są rozdzielone przez pary $CE$ i $DE$, lub nie są przez obie rozdzielone, to $AB$ nie są też rozdzielone przez $CD$. Albo: jeśli $AB$ są rozdzielone przez $CD$, to $AB$ są rozdzielone przez jedną z par $CE$ i $DE$, ale nie przez drugą.

Stwierdzenia a–e można określić jako aksjomaty; z nich wyprowadzone są stwierdzenia f–l. Tak jak 10 i 11 wynikają z 7 i 12, tak c oraz d wynikają z b oraz h, lub z a, b oraz k, ponieważ h jest wnioskiem z g oraz k, zaś g jest wnioskiem z a oraz b. Przy pomocy stwierdzeń a, b, e, k, a przy tym wyłącznie przy tej pomocy można potem udowodnić wszystkie pozostałe stwierdzenia grupy a–l.

Po przyjęciu ustalonego punktu $E$ na linii zamkniętej udaje się powtórzyć obserwacje, które przedstawione zostały dla linii ograniczonej; linia zamknięta, poprzez wyłączenie punktu $E$, jest traktowana w pełnej analogii z ograniczoną. Także na odwrót, pojęcie pary rozdzielonej daje się przenieść na linię ograniczoną; w jaki sposób tego się dokonuje, pouczają stwierdzenia k oraz l. Ograniczając się teraz do linii prostej, podamy następującą definicję. Jeśli jeden z punktów $C$, $D$ na linii prostej leży między $A$ i $B$, lecz drugi nie, to mówimy (Definicja 4): *punkty $AB$ są rozdzielone przez $CD$*, lub: przy wykluczonym $D$ (dla *punktu granicznego $D$*) $C$ leży między $A$ i $B$. Wymienność $A$ z $B$ oraz $C$ z $D$ zasadza się w samej definicji. Dla linii prostej zachodzi zatem stwierdzenie a, i powinno zostać pokazane, że także stwierdzenia b, e, k zachowują swoją ważność. To, że zachodzą wszystkie zdania a–l nie potrzebuje odtąd dowodu.

**19.** *Twierdzenie.* — Jeśli $A$, $B$, $C$, $E$ są punktami prostej, to albo $BC$ są rozdzielone przez $AE$, albo $CA$ przez $BE$, albo $AB$ przez $CE$ i każde z tych położeń wyklucza oba pozostałe.

Dowód. — Można tak oznaczyć punkty $A$, $B$, $C$, że $A$ leży między $B$ i $C$ (6). Teraz albo $B$ znajduje się między $C$ i $E$, albo $C$ między $B$ i $E$, albo $E$ między $B$ i $C$ (6). W pierwszym przypadku $B$ leży między $C$ i $E$, $A$ między $B$ i $C$, a zatem $A$ między $C$ i $E$ (10), $B$ między $A$ i $E$ (13); tak więc (stwierdzenie 7 i def. 4), $BC$ są rozdzielone przez $AE$, ale $CA$ nie są rozdzielone przez $BE$, a $AB$ nie są rozdzielone przez $CE$. Drugi przypadek powstaje poprzez zamianę $B$ z $C$, a więc prowadzi do tego samego wyniku. W trzecim przypadku $A$ i $E$ leżą między $B$ i $C$, a zatem $A$ leży albo między $B$ i $E$, albo między $C$ i $E$ (11). Jeśli $A$ leży między $B$ i $E$, a więc $E$ między $A$ i $C$ (13), to (stwierdzenie 7 i def. 4) $AC$ są rozdzielone przez $BE$, ale $BC$ nie są rozdzielone przez $AE$, a $AB$ nie są rozdzielone przez $CE$. Jeśli $A$ leży między $C$ i $E$, to $AB$ są rozdzielone przez $CE$, lecz $BC$ nie są rozdzielone przez $AE$, a $AC$ nie są rozdzielone przez $BE$ (stwierdzenia 7, 13 i def. 4).

**20.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $A$, $B$, $E$ leżą na linii prostej, to można wybrać $C$ tak, że $AB$ są rozdzielone przez $CE$.

Dowód. — Jeśli $E$ nie leży między $A$ i $B$, to wybiera się $C$ między $A$ i $B$ (8). Jeśli $E$ leży między $A$ i $B$, to wybiera się $C$ tak $B$ leży między $A$ i $C$ lub $A$ leży między $B$ i $C$ (9), a więc $C$ nie leży miedzy $A$ i $B$ (7). W obu przypadkach $AB$ są rozdzielone przez $CE$ (def. 4).

**21.** *Twierdzenie.* — Jeśli punkty $AB$ na prostej są rozdzielone przez jedną z par $CE$ i $DE$, lecz nie przez drugą, to $AB$ są rozdzielone przez $CD$.

Dowód. — Niech $AB$ będą rozdzielone przez $CE$, a nierozdzielone przez $DE$. Jeśli teraz $C$ leży między $A$ i $B$, a więc $E$ nie [leży między $A$ i $B$] (def. 4), to także $D$ nie leży między $A$ i $B$ (def. 4). Jeśli jednak $C$ nie leży między $A$ i $B$, to $E$ znajduje się między tymi dwoma punktami (def. 4), a stąd (def. 4) również $D$ [leży między $A$ i $B$]. W obu przypadkach $AB$ są rozdzielone przez $CD$ (def. 4).

Tym samym wyprowadzone zostało przeniesienie stwierdzeń a, b, e, k na takie, które odnoszą się do punktów na linii prostej. Z tych trzech otrzymanych twierdzeń bez trudności wyprowadza się wnioski, które odpowiadają pozostałym stwierdzeniom poprzedniej grupy. Stwierdzenia g oraz l przechodzą na dwa następujące:

**22.** *Twierdzenie* (Odwrotność poprzedniego). — Jeśli $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ są punktami prostej oraz $AB$ są rozdzielone przez $CD$, to $AB$ są rozdzielone przez jedną z par $CE$ i $DE$, lecz nie przez drugą.

**23.** *Twierdzenie.* — Jeśli na prostej punkty $AB$ są rozdzielone przez $CD$, to również $CE$ są rozdzielone przez $AB$.

Dzięki tym wynikom możliwe staje się traktowanie linii prostej podobnie jak zamkniętej. —

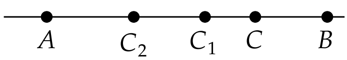
Do wprowadzonych pierwotnie pojęć geometrycznych dołączyły, w trakcie rozwoju [teorii], nowe, które jednak są sprowadzalne do owych [wyjściowych]. Te właśnie będziemy nazywali *pojęciami wyprowadzonymi* [abgeleitete Begriffe], a pozostałe *pojęciami pierwotnymi* [Grundbegriffe]. Pojęcia wyprowadzone są *definiowane*, przy czym za każdym razem używane są do tego poprzednie pojęcia, żadne inne; gdy dochodzi do zastosowania wyprowadzonego pojęcia, bezpośrednio lub pośrednio uwzględniana jest jego definicja; bez takiego odwołania się nie byłoby możliwe interesujące nas prowadzenie dowodów. *Pojęcia pierwotne nie są definiowane*; żadne wyjaśnienie nie jest w stanie zastąpić tych środków, które same rekonstruują rozumienie owych prostych pojęć, niesprowadzalnych do innych, czyli wskazań na stosowne obiekty natury. Gdy Euklides mówi: „Punktem jest to, co nie ma części; linia jest długością bez szerokości; linia prosta (odcinek) jest tym, co jest jednakowo położone względem znajdujących się na niej punktów", to wyjaśnia wprowadzone pojęcia przez pojęcia, które nie nadają się do wykorzystania i które nigdzie w dalszym wykładzie nie zostają wykorzystane. W rzeczywistości żadne miejsce [w tekście] nie odwołuje się do którejś z owych wypowiedzi, dzięki którym czytelnik, który z „Elementów" o pierwotnych pojęciach geometrycznych niczego w ogóle nie może się nauczyć, bez przedstawienia utworzonego już wprzódy przez powtarzane obserwacje, co najwyżej przypomni sobie stosowne przedstawienia i będzie zmuszony do tego, aby ograniczyć je lub rozszerzyć, zgodnie z wymogami naukowymi.

Matematyka ustanawia relacje między pojęciami matematycznymi, które powinny odpowiadać rzeczywistości doświadczenia, lecz w większości nie są bezpośrednio zapożyczone z doświadczenia, ale „dowodzone"; wiedza potrzebna do przeprowadzania dowodów (poza definicjami pojęć wyprowadzonych) sama tworzy część ustanawianych relacji. Po wydzieleniu stwierdzeń opartych na dowodzie, [czyli] *twierdzeń*, pozostaje grupa stwierdzeń, z których wyprowadzić można wszystkie pozostałe, [czyli] *aksjomatów*; te osadzone są bezpośrednio w obserwacjach,[3] ma się rozumieć w obserwacjach, które nieustannie powtarzały się od nie-

[3]Empirycznym źródłom aksjomatów geometrycznych poświęcił gruntowne rozważania Helmholz w swoim wykładzie „O źródle i znaczeniu aksjomatów geometrycznych" (Populäre wissenschaftliche Vorträge von H. Helmholz, zeszyt trzeci, Braunschweig 1876).

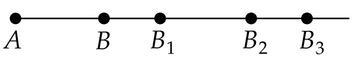
pamiętnych czasów, które pojmowane są jaśniej niż te innego rodzaju, i z którymi ludzie z tego powodu tak są od dawna oswojeni, że ich źródło niknie w zapomnieniu i może być przedmiotem sporu.

Aksjomaty powinny w sposób pełny obejmować wypracowany dla matematyki materiał empiryczny, tak, aby po ich ustanowieniu nie było już potrzeby odwoływania się do doświadczeń zmysłowych. Tym ostrożniej muszą być ustalane ewentualne uprzednie ograniczenia, którym podlega zastosowanie poszczególnych aksjomatów. Dla części ustalonych wyżej aksjomatów geometrycznych, a mianowicie dla I i VI, poczyńmy teraz takie ograniczenia. W pierwszym aksjomacie punkty połączone odcinkiem prostym nie powinny być zbyt blisko siebie. Jak długo wszystkie rozważane punkty rozdzielone są przestrzenią między nimi, zastrzeżenie to okazuje się zbędne. Jest to rzeczywiście przypadek figur, z których oglądu tworzy się aksjomaty; dla takich figur ósme twierdzenie – jedyne, którego dotyczy to zastrzeżenie – będzie więc zawsze zachodziło. Jednak przez wielokrotne zastosowanie tego stwierdzenia figura traci swoją pierwotną własność. Jeśli $A$ i $B$ są punktami wyjściowej figury i na prostej $AB$ włączony zostanie punkt $C$ między $A$ i $B$, potem $C_1$




między $A$ i $C$, $C_2$ między $A$ i $C_1$, itd., to można trafiać coraz bliżej punktu $A$ trzeba wtedy w końcu zrezygnować z dalszych włączeń.[4] Ósmego twierdzenia nie można zatem stosować *dowolnie często* na prostej. Jakiejś ustalonej ostrej granicy nie da się co prawda podać; trzeba jednak wystrzegać się wnioskowania nieistnienia jakiejkolwiek granicy z braku istnienia ściśle podanej granicy.

Geometrycznych aksjomatów i pojęć pierwotnych uczymy się na obiektach, od których jesteśmy względnie mało oddaleni; poza takim obszarem ich stosowanie nie jest bez zastrzeżeń prawomocne. Jeśli na przykład wyjdzie się od odcinka prostego




$AB$ i przedłuży go poza $B$ do $B_1$ (VI), potem $BB_1$ poza $B_1$ do $B_2$, $B_1B_2$ poza $B_2$ do $B_3$, itd., to można przez dłuższy czas wprowadzać odcinki proste $AB_1$, $AB_2$, itd., ale prędzej czy później przychodzi punkt $B_n$, o którego połączeniu odcinkiem prostym z punktem $A$ nie może być mowy bez tego, iżby pojęcie to utraciło swój charakter jako pojęcie pierwotne. Mówi się też mianowicie (gdy każdy ciąg następujących po sobie odcinków prostych, z których każde dwa sąsiednie łączą się w odcinek prosty, znów nazywa się odcinkiem prostym), że odcinek $AB$ przedłuża się do $B_1$, odcinek $AB_1$ do $B_2$, odcinek $AB_2$ do $B_3$, itd. To jednak nie zmienia nic w sposobie, na jaki punkty $B_1$, $B_2$,... rzeczywiście są przedłużane; albowiem gdy $B_n$ jest zbyt daleko od $A$, to można dla utworzenia $B_{n+1}$ nie korzystać już z $A$, ale można z $B_{n-1}$. A zatem również szósty aksjomat (lub dziewiąte twierdzenie[5]) nie może być stosowane *dowolnie często* dla jednej i tej samej figury, przy czym znowu nie istnieje jakaś ostra granica.

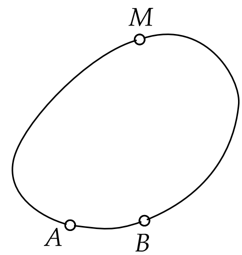
Następne rozważania zakładają, jak dotychczasowe, wszelkie figury,[6] których części są wystarczająco blisko siebie, aby umożliwić ocenę ich związków geometrycznych. *Do połączeń takich figur można sprowadzić wszystkie zastosowania geo-*

[4] Por. dokładniejszy wywód w § 23.

[5] Na ósmym i dziewiątym opiera się dwudzieste.

[6] Por. Riemann, Gesammelte Werke, str. 266; F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, str. 576 i 624, Bd. 6, str. 134.

*metrii*, temat, który nie będzie tu bliżej omawiany. Jednak to, jak pojęcia i zasady geometryczne, które dobrze sprawdzają się wewnątrz ograniczonego obszaru, mogą utracić swoją ważność przy rozszerzeniu tego obszaru, zostanie unaocznione przez całkiem proste rozważania. Załóżmy, że po zamkniętej (zwykłej) linii porusza się obserwator, który może ogarniać wzrokiem tylko małą jej część, a w ogóle może przebyć jedynie część tej linii, i który na skutek tego nie rozpoznał jeszcze owej linii jako zamkniętej. Obserwator ten będzie podczas każdego obejrzenia przebytej drogi dochodził do przekonań, które wyrażone są w stwierdzeniach 6–11 dla linii prostej, i będzie potem rozszerzać je na cały dostępny mu obszar; będzie w końcu skłonny przenieść je na linię w całej jej rozciągłości, lecz gdy to uczyni, dotrze naturalnie do niewłaściwych wniosków. Niech na przykład $A$, $B$ będą punktami w niewielkiej odległości od siebie, a punkt $M$ niech z założenia będzie osiągalny poprzez przedłużenie drogi $AB$; mówi się następnie, że $B$ leży między $A$ i $M$ oraz wnioskuje dalej, że $A$ nie leży między $B$ i $M$, a więc zaprzecza się mającej rzeczywiście miejsce możliwości osiągnięcia punktu $M$ poprzez rozszerzenie drogi $BA$ poza $A$.




Rysunek 3

Tę uwagę należy uwzględniać m.in. przy pytaniu, czy proste $AB$ i $CD$ mogą mieć punkt wspólny, gdy figury $ABC$ oraz $CDA$ (nie $ADC$) są przystające (§ 13), a punkty $B$, $D$ leżą po różnych stronach prostej $AC$. Figury $ABCD$ i $CDAB$ są przystające, a odcinki proste $AB$, $CD$ nie mają żadnego punktu wspólnego. Zwykło się wnioskować: gdyby proste $AB$ i $CD$ miały punkt wspólny $M$, to figury $ABCDM$ i $CDABM$ byłyby przystające, a $M$ leżałby poza odcinkiem $AB$; gdyby np. $B$ leżał między $A$ i $M$, to $D$ także leżałby między $C$ i $M$, $D$ i $M$ po tej samej stronie prostej $BC$, podobnie $A$ i $M$, t.j. $A$ między $B$ i $M$, co nie jest możliwe. To jednak nie rozstrzyga tego pytania, ponieważ niektóre pojęcia geometryczne i stwierdzenia być może nie powinny być stosowane do figury $ABCDM$, jak to przed chwilą się zdarzyło.

* * *

Podstawa tłumaczenia: Moritz Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882. Einleitung, str. 1–20.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
5 lipca 2013

**Uwagi tłumacza**

1. W tekście niemieckim używa się rodzajników określonych „der” Strecke. Kategoria *sposobu określoności* nie jest zgramatykalizowana w języku polskim.

2. Tłumaczyłem *Grundbegriffe* jako *pojęcia pierwotne*, zaś *Grundsätze* jako *aksjomaty.*

3. Polski uzus językowy każe mówić, że punkty leżą ***na*** odcinku (lub ***na*** prostej). W tekście niemieckim jest wszędzie: *der Punkt liegt innerhalb der Strecke*, *der Punkt liegt in einer Geraden.* Po polsku *punkt leży wewnątrz odcinka* jest oczywiście akceptowalne.

* * *

**Od Redakcji**

Współczesne aksjomatyki geometrii syntetycznej, poczynając od Hilberta, przez Borsuka i Szmielew, po Tarskiego, przyjmują aksjomaty *incydencji* oraz *leżenia między.* Pierwsza próba usystematyzowania tych pojęć pochodzi właśnie z *Wykładów nowszej geometrii* Moritza Pascha.

*Jerzy Pogonowski*
*Zakład Logiki i Kognitywistyki*
*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza*
*Instytut Psychologii*
*ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)*
*PL-60-568 Poznań*
*e-mail:* pogon@amu.edu.pl